# MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

L. BIEBERBACH W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR H. WEYL

35. BAND. 3. UND 4. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 7. JUNI 1932)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1932

Die MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT
erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen und deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:
**K. Knopp,** Tübingen, Neckarhalde 56,
**L. Lichtenstein,** Leipzig, Großgörschenstraße 3,
**E. Schmidt,** Berlin NW, Altonaerstr. 30,
**I. Schur,** Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

---

35. Band. **Inhalt:** 3. u. 4. Heft.

Seite

Warschawski, St., Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung . . . . . 321
Falckenberg, H., Die Anzahl der Nullstellen der Hankelschen Funktionen . . 457
Siddiqi, M. R., Zur Theorie der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen vom parabolischen Typus . . . . . 464
Schlesinger, L., Weitere Beiträge zum Infinitesimalkalkul der Matrizen . . . 485
Bergmann, G., Zur algebraisch-axiomatischen Begründung der Topologie . . . 502
Rinow, W., Über Zusammenhänge zwischen der Differentialgeometrie im Großen und im Kleinen . . . . . 512
Rembs, E., Über die Verbiegung parabolisch berandeter Flächen negativer Krümmung 529
Schauder, J., Bemerkung zu meiner Arbeit „Potentialtheoretische Untersuchungen I (Anhang)“ . . . . . 536
Kamke, E., Zu dem Integralsatz von Cauchy . . . . . 539
Korn, A., Über eine Entwicklung der Lösung der Telegraphengleichung nach Besselschen Funktionen . . . . . 542
Ważewski, T., Zur Theorie des Unitätsproblems für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen . . . . . 553
Perron, O., Eine Abschätzung für die untere Grenze der absoluten Beträge der durch eine reelle oder imaginäre binäre quadratische Form darstellbaren Zahlen 563
Szegö, G., Über gewisse Interpolationspolynome, die zu den Jacobischen und Laguerreschen Abszissen gehören . . . . . 579
Ciorănescu, N., Sur les conditions linéaires dans l'intégration des équations différentielles ordinaires . . . . . 603
Seifert, H., Homologiegruppe berandeter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten . 609
Nicolesco, M., Sur la décomposition des polynomes différentiels en facteurs du premier ordre . . . . . 612
Mehmke, R., Bemerkungen zu der Abhandlung „Ein neues Analogon zum Satz von Desargues in Räumen von gerader Dimension“ von E. A. Weiß (Math. Zeitschr. Bd. 33 (1931), S. 388—395) . . . . . 618
Sidon, S., Berichtigung zu meiner Arbeit: „Einige Sätze und Fragestellungen über Fourier-Koeffizienten“, Math. Zeitschr. Bd. 34, Heft 4, S. 477—480 . . . . 624

# Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung*).

Von

Stefan Warschawski in Königsberg i. Pr.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung . . . . . 322

I. Kapitel. Anwendungen des Löwnerschen Satzes, Herleitung der Hauptungleichungen . . . . . 338

§ 1. Der Löwnersche Satz . . . . . 338

§ 2. Weitere Hilfssätze . . . . . 349

§ 3. Die Unbewalltheitsfunktion, die Richtungsfunktion und der metrische Parameter . . . . . 355

§ 4. Formulierung und Beweis der Hauptungleichungen . . . . 361

§ 5. Folgerungen aus den Sätzen 1 und 2 . . . . . 376

§ 6. Heranziehung der Vergleichskurven . . . . . 381

II. Kapitel. Der Hauptsatz über konforme Ecken und Anwendungen 386

§ 7. Formulierung des Hauptsatzes über konforme Ecken und Vorbemerkungen . . . . . 386

§ 8. Hilfssätze . . . . . 392

§ 9. Beweis des Hauptsatzes. Zusätze und Ergänzungen . . . 410

§ 10. Anwendungen des Hauptsatzes auf rektifizierbare Kurven . 427

§ 11. Kurven mit stetiger Tangente. Lipschitzbedingungen für die Tangente . . . . . 443

Anhang . . . . . 452

*) Die vorliegende Arbeit wurde im Juli 1930 als Dissertation von der philosophischen Fakultät der Universität Basel angenommen.

## Einleitung.

Im folgenden bezeichne $G$ ein von einer geschlossenen Jordankurve begrenztes Gebiet in der $w$-Ebene, $z = \varphi(w)$ eine Funktion, die $G$ auf das Innere des Einheitskreises umkehrbar eindeutig und konform abbildet. Bekanntlich hat H. A. Schwarz bewiesen, daß, wenn $C$ eine analytische Kurve ist, $\varphi(w)$ auch noch auf der Randkurve C selber analytisch ist. Insbesondere ist dann also auch $\varphi(w)$ in $G + C$ stetig und besitzt dort Ableitungen von beliebig hoher Ordnung. Painlevé[1]) hat nun (1891) zum ersten Male die Frage aufgeworfen, unter welchen allgemeineren Annahmen über die Randkurve $C$ von $G$ die Funktion $\varphi(w)$ in $G + C$ stetig ist, und wann sie darüber hinaus dort Ableitungen — bis zu einer bestimmten Ordnung $p \geqq 1$ — besitzt. Die Stetigkeit von $\varphi(w)$ in $G + C$ bewies er unter der Annahme, daß $C$ stückweise stetige Tangente hat; sein auf die Existenz der Ableitungen bezügliches Resultat lautet folgendermaßen: *Ist $C$ durchweg durch die Gleichung*

$$w = w(s) = x(s) + i\,y(s) \tag{1}$$

*gegeben, wo $s$ die längs $C$ gezählte Bogenlänge ist, existieren ferner die Ableitungen $x^{(n+2)}(s)$, $y^{(n+2)}(s)$ und sind diese durchweg auf $C$ stetig, so existiert durchweg in $G + C$ $\varphi^{(n)}(w)$ und ist dort stetig*[2]).

Später (1909) hat Herr Lichtenstein[3]) über die erste Ableitung $\varphi'(w)$ von $\varphi(w)$ ein wesentlich schärferes Resultat hergeleitet: er zeigte, daß *bereits unter der Annahme, daß die Randkurve $C$ von $G$ stetig gekrümmt ist, $\varphi'(w)$ in $G + C$ existiert und stetig ist und daß darüber hinaus $\varphi'(w)$, das ja wegen der Schlichtheit der Abbildung $z = \varphi(w)$ in $G$ nicht verschwindet, auch in $G + C$ nirgends gleich Null ist.* Insbesondere folgt hieraus, daß es zwei positive Zahlen $\mu_1$ und $\mu_2$ gibt, so daß für alle $w$ in $G + C$

$$0 < \mu_1 \leqq |\varphi'(w)| \leqq \mu_2$$

gilt. Ist $w = f(z)$ die zu $z = \varphi(w)$ inverse Funktion, die also den Einheitskreis auf $G$ abbildet, so folgt hieraus offenbar die Existenz und Stetig-

---

[1]) P. Painlevé, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris **112** (1891), p. 653—657. Dort wird auch auf seine Thèse hingewiesen.

[2]) Sind die Annahmen dieser Sätze nur längs eines Bogens erfüllt, so gelten die in ihnen ausgesprochenen Behauptungen gleichfalls auf diesem Bogen. Wir haben die obige Formulierung nur der Kürze halber gewählt. Analoges gilt von den weiter unten genannten Sätzen von Lichtenstein, Kellogg und Lawrentieff.

[3]) L. Lichtenstein, Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen des elliptischen Typus, Math. Annalen **67** (1909), S. 559—575, s. insbesondere S. 561 bis 563. Dort wird dieser Satz als Hilfssatz für die weiteren Untersuchungen hergeleitet.

keit von $f'(z)$ in der abgeschlossenen Kreisscheibe $|z| \leqq 1$. Vorher hatte Herr Korn[4]) dieses Ergebnis unter Hinzunahme weiterer Voraussetzungen über $C$ hergeleitet.

Einige Jahre darauf (1912) hat O. D. Kellogg[5]) die Frage nach der Existenz und Stetigkeit der Ableitungen von $\varphi(w)$ wieder aufgenommen und ist so zu noch weitergehenden Resultaten gelangt. Diese Frage, die ja, potentialtheoretisch formuliert, auf die Frage nach dem Verhalten der Ableitungen der Greenschen Funktion von $G$ auf dem Rande hinausläuft, wird bei Kellogg im Rahmen einer allgemeineren Untersuchung über das Verhalten der Lösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie und zwar über das Verhalten ihrer Ableitung auf dem Rande des Definitionsgebietes behandelt. Die in dieser Arbeit eingeschlagene Methode ist rein potentialtheoretisch und benutzt die Theorie der Integralgleichungen. Er bewies den folgenden Satz (der übrigens auch für mehrfach zusammenhängende Gebiete gilt; wir formulieren ihn nur für unser einfach zusammenhängendes Gebiet $G$): *Die Randkurve $C$ von $G$ möge durchweg eine sich stetig drehende Tangente besitzen und unter Zugrundelegung der Bogenlänge als Parameter durch die Gleichung* (1) *dargestellt sein. Ferner möge $w(s)$ $n$-mal stetig differenzierbar sein und $w^{(n)}(s)$ möge darüber hinaus gleichmäßig auf $C$ einer Lipschitzbedingung mit dem Exponenten $\alpha$, $0<\alpha<1$, genügen*

$$|w^{(n)}(s_1) - w^{(n)}(s_2)| \leqq K|s_1 - s_2|^{\alpha} \qquad (K \text{ Konstante}).$$

*Dann existieren durchweg in $G+C$ die Ableitungen $\varphi^{(\nu)}(w)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ sind dort stetig, und es gilt darüber hinaus in $G+C$*

$$|\varphi^{(n)}(w_1) - \varphi^{(n)}(w_2)| \leqq K'|w_1 - w_2|^{\alpha} \quad (K' \text{ Konstante}).$$

Hieraus folgt insbesondere für $n = 1$ die Existenz und Stetigkeit von $\varphi'(w)$ in $G + C$. Darüber hinaus bewies Kellogg, daß $\varphi'(w)$ *nirgends in $G+C$ verschwindet.* Ferner zeigte Kellogg durch Angabe eines Beispiels, daß die Existenz einer endlichen oder von 0 verschiedenen ersten Ableitung noch keineswegs aus der Annahme der bloßen Stetigkeit der Tangente in der Umgebung des betrachteten Randpunktes allein folgt. (Er betrachtet die durch $z \lg z$ in der Umgebung des Nullpunktes vermittelte Abbildung geeigneter Gebiete.)

---

[4]) A. Korn, Lehrbuch der Potentialtheorie Bd. 2 (1901), S. 348—354. Herr Korn hat sich vor allem auch mit analogen Fragen im Raume beschäftigt (vgl. den Enzyklopädieartikel von Herrn Lichtenstein).

[5]) O. D. Kellogg, Harmonic functions and Greens integral, Transactions of the Americ. Math. Society **13** (1912), pp. 109—132. Siehe auch L. Lichtenstein, Encyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. II, III, Neuere Entwickelung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung.

Während in den bisher genannten Untersuchungen nach dem Verhalten der Ableitung von $\varphi(w)$ auf einem Bogen der Kurve $C$ gefragt wird, längs dessen durchweg gewisse Regularitätseigenschaften der Kurve angenommen werden, kommt in der Literatur auch die Frage vor, wie sich die Ableitung von $\varphi(w)$ in einzelnen Punkten verhält, die gerade gegenüber ihrer Umgebung „singuläre" Punkte sind. So hat Herr Lichtenstein[6]) (ein Jahr vor dem Erscheinen der Kelloggschen Arbeit) die Frage nach dem Verhalten der Ableitung in einer Ecke aufgeworfen, die von zwei in einem Punkte $w = w_1$ von $C$ zusammenstoßenden bis auf die Endpunkte analytischen Kurvenzweigen von $C$ gebildet wird. Im Punkte $w_1$ erleidet die von 0 verschiedene Krümmung einen Sprung. Er bewies, daß, wenn *die Ecke die Öffnung* $\pi\tau$, $0 < \tau \leqq 2$, *hat, in der Umgebung von* $w_1$ *für* $w$ *in* $G + C$

$$\varphi'(w) = (w - w_1)^{\frac{1}{\tau}-1} \varphi_0(w)$$

*ist, wo* $\varphi_0(w)$ *eine stetige Funktion und* $\varphi_0(w_1) \neq 0$ *ist.* Analoge Sätze hat er auch für höhere Ableitungen hergeleitet. Aus diesem Resultat folgt leicht, daß der Grenzwert

$$\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}},$$

der für eine Ecke einen Ersatz für die Ableitung bildet, existiert. Zwei Jahre später haben Osgood und Taylor[7]) das obige Resultat von Herrn Lichtenstein auf anderem Wege bewiesen, und zwar mit einer Methode, die sich ohne weiteres auf Ecken anwenden läßt, die von zwei stetig gekrümmten Kurvenästen gebildet sind.

In neuerer Zeit (1927) hat Herr Lawrientieff[8]) eine C. R.-Note veröffentlicht, in der er (ohne Beweis) unter anderm auch einige Resultate über das Randverhalten des Differenzenquotienten $\left|\frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{w - w_1}\right|$ mitteilt. Wir erwähnen vor allem den Satz, daß dieser Differenzenquotient zwischen zwei positiven Schranken bleibt, wenn $C$ durchweg stetige Krümmung besitzt. Dieser Satz geht zwar weniger weit, als der entsprechende Satz von Kellogg; Herr Lawrientieff führt aber seinen Beweis, wie er angibt, auf rein funktionentheoretischem Wege, und zwar benutzt er einen Hilfssatz, den auch wir im folgenden verwenden werden (den Satz von Löwner § 1,

[6]) L. Lichtenstein, Über die konforme Abbildung ebener, analytischer Gebiete mit Ecken, Journal für Mathematik **140** (1911), S. 100—119. Siehe auch den in Fußnote [5]) zitierten Encyklopädieartikel von Herrn Lichtenstein.

[7]) W. F. Osgood und E. H. Taylor, Transactions of the Americ. Math. Society **14** (1913), pp. 277—298, s. insbesondere S. 282—283.

[8]) Lawrentieff, Sur la représentation conforme, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris **184** (1927), p. 1407.

Satz A). Der Beweis von Herrn Lawrientieff hat vermutlich mit unserem Ansatz einige Berührungspunkte gemeinsam. — Ein weiteres Resultat, das sich auf Kurven mit stetiger Tangente bezieht, besprechen wir weiter unten (Kap. I, § 6, Satz 6).

Auf eine weitere Fragestellung, die mit den oben geschilderten Fragen zusammenhängt und in neueren Arbeiten der Herren J. Wolff, C. Carathéodory, E. Landau und G. Valiron behandelt worden ist, gehen wir weiter unten ein.

Die vorliegenden Untersuchungen sind nun aus den Versuchen hervorgegangen, den Kelloggschen Satz und vor allem den auf die erste Ableitung bezüglichen Teil dieses Satzes auf rein funktionentheoretischem Wege zu beweisen. Diese Versuche lassen sich an eine allgemeinere Fragestellung anknüpfen, die wir in folgendem behandeln und so formulieren wollen: *Die Randkurve $C$ möge in einem Punkte $P$ $(w = w_1)$ eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leqq 2$, besitzen. Bekanntlich ist $\varphi(w)$ in $G + C$ stetig. Wie verhält sich dann der „Differenzenquotient"*

$$\frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}, \tag{2}$$

*wenn $w \to w_1$ $(w \neq w_1)$ in $G + C$ konvergiert?* (Für $\tau = 1$ ist (2) der gewöhnliche Differenzenquotient von $\varphi(w)$ in $w = w_1$.) Insbesondere handelt es sich dann darum, möglichst einfache geometrische Bedingungen über die Natur der Randkurve $C$ in der Umgebung von $w_1$ dafür anzugeben, daß (2) zwischen zwei positiven Schranken bleibt — wir sagen dann, $C$ besitzt in $P$ eine *„konforme Ecke"* [9]) — und daß ferner der $\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$ existiert. — Nachdem wir so Kriterien für die Existenz der Ableitung gefunden haben, fragen wir weiter, wann diese längs eines Bogens von $C$ stetig ist. In dieser Abhandlung beschäftigen wir uns nur mit der Untersuchung der auf die erste Ableitung bezüglichen Fragen. Das Verhalten der höheren Ableitungen soll einer zweiten, dieser folgenden Mitteilung vorbehalten werden.

Es sei hier noch gleich auf eine etwas andere Auffassung dieser Fragestellung hingewiesen. Ist $w = f(z)$ die zu $z = \varphi(w)$ inverse Funktion, so liefert $f(e^{i\vartheta})$, $-\pi \leqq \vartheta \leqq \pi$, eine Parameterdarstellung der Kurve $C$ vermittels des Parameters $\vartheta$, die in gewisser Beziehung als eine *„natürliche" Parameterdarstellung* der Kurve $C$ angesehen werden kann, da sie ja immer

[9]) Der Begriff der konformen Ecke sowie der weiter unten zu besprechende Begriff der generalisierten konformen Ecke wurde von Herrn Ostrowski in seiner Arbeit: Über quasianalytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen, Acta Math. **53** (1929), S. 234 bzw. S. 244, 245 eingeführt.

vorhanden ist und bekanntlich gewisse ausgezeichnete Eigenschaften besitzt. Die obige Frage nach der Beschränktheit des Differenzenquotienten (2) nach oben und unten bzw. nach der Existenz des $\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$ läuft im wesentlichen, wenn $f(1) = w_1$ angenommen wird, auf die Frage nach der Beschränktheit des Differenzenquotienten $\frac{|f(e^{i\vartheta}) - f(1)|}{|\vartheta|^\tau}$ nach oben und unten bzw. auf die Existenz des $\lim_{\vartheta \to 0} \frac{f(e^{i\vartheta}) - f(1)}{\vartheta^\tau}$ hinaus. Es sei nun $w(t)$, $-T \leqq t < T$, eine andere Parameterdarstellung unserer Kurve $C$, $w(0) = w_1$. Man kann dann insbesondere fragen, ob aus der Beschränktheit von $\left| \frac{w(t) - w(0)}{t^\tau} \right|$ nach oben und unten bzw. der Existenz eines endlichen und von 0 verschiedenen $\lim_{t \to 0} \frac{|w(t) - w(0)|}{|t|^\tau}$ auch die entsprechenden Tatsachen für $\frac{f(e^{i\vartheta}) - f(1)}{\vartheta^\tau}$ folgen, d. h. ob der durch die konforme Abbildung gelieferte Parameter *ebenso „leistungsfähig" wie ein anderer Parameter ist.* Wie das eben genannte Kelloggsche Beispiel zeigt, ist dies — bei dieser Formulierung der Frage — *nicht* der Fall. Wir werden jedoch sehen, daß dies in einem gewissen Umfange doch zutrifft, wenn die Frage etwas anders gestellt wird. —

Es hat sich nun als zweckmäßig erwiesen, die Frage nach dem Verhalten des Differenzenquotienten (2) noch weiter zu gliedern, und zwar den *„allseitig" genommenen* Differenzenquotienten von dem *„im Winkelraum" gebildeten* Differenzenquotienten (2) zu unterscheiden. Wir sprechen dabei im folgenden von dem Verhalten einer in $G$ definierten Funktion $\psi(w)$ bei *allseitiger* Annäherung von $w$ an den Randpunkt $w_1$ von $G$ — und also auch von dem des allseitig genommenen Differenzenquotienten $\frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}} = \psi(w)$ —, wenn $w (\neq w_1)$ in beliebiger Weise in dem Definitionsbereich von $\psi(w)$ gegen $w_1$ konvergiert. Insbesondere soll ausdrücklich die Annäherung von $w$ an $w_1$ längs $C$ dabei zugelassen sein, wenn $\psi(w)$ — wie z. B. der Differenzenquotient — auf $C$ (mit eventueller Ausnahme von $w_1$) definiert ist. Wir sprechen ferner von dem Verhalten der Funktion $\psi(w)$ bei Annäherung von $w$ an $w_1$ *„im Winkelraum"*, wenn $w \to w_1$ innerhalb eines jeden Winkelraumes konvergiert, der von zwei von $w_1$ ausgehenden mit je einem an $w_1$ anstoßenden Stück ganz in $G$ verlaufenden Strahlen gebildet ist.

Die Frage nach der Existenz der im Winkelraum gebildeten Ableitung ist in den oben genannten Arbeiten von Herrn Carathéodory und Herrn Valiron behandelt worden. Allerdings braucht bei diesen Untersuchungen $G$ nicht als ein von einer Jordankurve begrenztes Gebiet vorausgesetzt zu werden, sondern kann ein wesentlich allgemeineres einfach zusammenhängendes Ge-

biet sein. Diese Untersuchungen stützen sich auf den folgenden Satz[10]: a) Ist $f(z)$ in $|z|<1$ regulär und absolut $<1$, so existiert stets der

$$\lim_{z\to 1}\frac{1-f(z)}{1-z}=\alpha,$$

wenn $z\to 1$ „im Winkelraum" konvergiert, und $\alpha$ ist entweder endlich und dann positiv oder $\infty$. Im ersten Falle konvergiert auch $f'(z)\to\alpha$, wenn $z\to 1$ „im Winkelraum" strebt. Mit Hilfe dieses Satzes beweist Herr Carathéodory vor allem: b) *G sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $P$ $(w=w_1)$ ein Randpunkt von G, $w=f(z)$ bilde $|z|<1$ auf G ab. Gibt es dann einen Kreis $K_1$, der den Punkt P mit dem Rande von G gemeinsam hat und dessen Inneres ganz G angehört, und ferner einen Kreis $K_2$, der gleichfalls den Punkt P mit dem Rande von G gemeinsam hat und sonst ganz außerhalb von G verläuft, so gibt es einen Punkt $z_1$ auf $|z|=1$, so daß $\lim_{z\to z_1} f(z)=w_1$ ist, wenn $z\to z_1$ im Winkelraum gegen $w_1$ konvergiert, und $f(z)$ in $z_1$ eine im Winkelraum gebildete Ableitung besitzt.* Ferner konvergiert $f'(z)\to f'(z_1)$, wenn $z\to z_1$ „im Winkelraum" strebt. In einer etwas später erschienenen Arbeit leitet Herr Valiron[11]) einen allgemeineren Satz über die Existenz der endlichen Winkelderivierten her, bei dem an die Stelle des von „innen berührenden" Kreises $K_1$ des Carathéodoryschen Satzes Kurven allgemeineren Charakters treten, die im „Berührungspunkte" $P$ keine endliche Krümmung mehr besitzen.

In der vorliegenden Abhandlung beschäftigen wir uns, wie gesagt, mit der Frage nach dem Verhalten des Differenzenquotienten (2) bei *allseitiger Annäherung von w an $w_1$* und beschränken uns daher nur auf Punkte,

---

[10]) In dieser Form wurde dieser Satz zum ersten Male explizite formuliert und bewiesen von Herrn Carathéodory in seiner Arbeit: Über Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen, Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1929, S. 39—54 und unabhängig und nahezu gleichzeitig von den Herren Landau und Valiron mit einem überraschend einfachen Beweis in der gemeinsam veröffentlichten Note: A deduction from Schwarz's lemma, Journal of the London Math. Society **4**, March 1929, pp. 162—163. Wie ich durch eine freundliche Mitteilung von Herrn Prof. Landau erfuhr, findet sich dieser Satz implizite in einer bereits 1926 erschienenen C. R.-Note (**183**, S. 500—502) von Herrn J. Wolff, in der Herr Wolff einen etwas anderen Satz herleitet, nämlich: Aus $f(z)$ regulär und absolut $<1$ für $|z|<1$ und $f(z)-z\neq 0$ in $|z|<1$, folgt die Existenz eines einzigen Randpunktes $z=\alpha$, in dem $\frac{\alpha-f(z)}{\alpha-z}$ und $f'(z)$ für $z\to\alpha$ „im Winkelraum" gegen einen und denselben endlichen und positiven Grenzwert konvergieren. Doch enthält Nr. 1 bis 5 seiner Note, in denen er noch nicht von der speziellen Annahme $f(z)-z\neq 0$ in $|z|<1$ Gebrauch macht, genau den Beweis des obigen Satzes.

[11]) G. Valiron, Sur un théorème de Julia, étendant le lemme de Schwarz, Bullet. des Sciences mathem. 1929.

die *auf freien Jordanbögen* des Randes liegen. Wir dürfen dann weiter annehmen (vgl. Hilfssatz 4 in Nr. 6), daß der Rand von $G$ eine geschlossene Jordankurve ist. Nur in einem Anhang zu dieser Arbeit geben wir kurz eine Verallgemeinerung der eben erwähnten Resultate über die Winkelderivierte der Herren Carathéodory und Valiron an in einem Umfange, wie sie die einfache Anwendung der über die allseitig gebildete Ableitung hergeleiteten Ergebnisse zu formulieren gestattet. —

Bei unserer Untersuchung gehen wir folgendermaßen vor: Unter einer geeigneten Annahme über die Struktur der Randkurve in der Umgebung von $P$ läßt sich das Verhalten des längs $C$ gebildeten Differenzenquotienten (2) durch das Verhalten geeigneter in jedem festen Winkelraum gebildeter Differenzenquotienten (2) charakterisieren. Um diese Bedingung zu formulieren, führen wir eine neue Begriffsbildung ein, nämlich die sog. *Unbewalltheitsfunktion* $\Delta(\varepsilon)$ der Kurve $C$ im Punkte $P$. Darunter verstehen wir folgendes: Es sei $c$ ein beliebiger Teilbogen von $C$, der $P$ als inneren Punkt enthält. Wir beschreiben dann um $P$ den Kreis $k_\varepsilon$ mit so kleinem Radius $\varepsilon$, daß $k_\varepsilon$ nur den Bogen $c$ trifft, nicht aber den übrigen Teil der Kurve $C$, $P_1$ und $P_2$ seien die beiden „letzten“ Schnittpunkte von $k_\varepsilon$ mit $c$, die man bei der Durchlaufung von $c$ von $P$ aus nach beiden Seiten antrifft. $\Delta(\varepsilon)$ ist dann der Radius der kleinsten abgeschlossenen Kreisscheibe, die beide Bögen $\overset{\frown}{PP_1}$ und $\overset{\frown}{PP_2}$ von $c$ enthält. Die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ braucht nur für *hinreichend kleine* Werte von $\varepsilon$ definiert zu sein und ist im folgenden Sinne unabhängig vom Bogen $c$: ersetzt man $c$ durch einen größeren $c$ umfassenden oder einen kleineren in $c$ enthaltenen Bogen (der gleichfalls $P$ als inneren Punkt enthält), so hat $\Delta(\varepsilon)$ für hinreichend kleines $\varepsilon$ immer denselben Wert, unabhängig davon, welcher Bogen zur Definition zugrunde gelegt wird. Die oben genannte Bedingung besteht nun darin, daß wir verlangen, der Quotient $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$, der ja seiner Definition nach $\geqq 1$ ist, soll nach oben beschränkt sein oder, wie wir sagen wollen, $C$ soll in $P$ *„linear unbewallt“* sein. Die dieser Bedingung zugrunde gelegte anschauliche Vorstellung ist die, daß die Kurve $C$ in der Umgebung des Punktes $P$ keine allzu starken „Schwankungen“ macht. Es stellt sich nämlich heraus, daß notwendig dafür, daß der Differenzenquotient (2) zwischen zwei positiven Schranken bleibt bzw. einem Grenzwert zustrebt, ist, daß $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ bzw. $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$ [12]) gilt. Da es uns nun vor allem auf die Frage nach der Beschränktheit bzw. der Konvergenz des Differenzenquotienten (2) ankommt, *setzen wir nun von vornherein das Bestehen der Relation*

[12]) Wir benutzen das von Herrn Ostrowski eingeführte Symbol $\uparrow$ bzw. $\downarrow$, um das monotone Zunehmen bzw. Abnehmen zum Ausdruck zu bringen.

$\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ *voraus.* Unter dieser Annahme leiten wir nun den folgenden Satz her, der das für uns wichtigste Hilfsmittel zur Untersuchung der allseitig genommenen Ableitung darstellt (Satz 1 und 2):

Die Hauptungleichungen. *$W$ bezeichne einen von zwei von $w_1$ ausgehenden Strahlen gebildeten Winkelraum der Öffnung $2\psi_1 < \tau$, der in der Umgebung von $w_1$ ganz in $G$ liegt. Dann gibt es zwei Konstanten $M$ und $M'$, sowie zu jedem hinreichend nahe bei $w_1$ gelegenen $w$ auf $C$ zwei Zahlen $R, R'$, die mit $w \to w_1$ gegen 0 konvergieren, so daß für alle Punkte $c, c'$ in $W$ im Abstande $R$ bzw. $R'$ von $w_1$*

$$M \frac{|\varphi(c) - \varphi(w_1)|}{|c - w_1|^{1/\tau}} \leqq \frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} \leqq M' \frac{|\varphi(c') - \varphi(w_1)|}{|c' - w_1|^{1/\tau}}$$

*gilt. Die Konstanten $M, M'$ hängen wesentlich von $\tau$, $\varkappa = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ und $\psi$ ab. Sie können von $w$ abhängig gemacht werden und konvergieren dann mit $w \to w_1$ gegen* $\dfrac{1}{\varkappa^{\frac{1}{\tau}}} \cos^2\left(\dfrac{\psi}{\tau}\right)$ *bzw.* $\varkappa^{\frac{1}{\tau}} \dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\psi}{\tau}\right)}$.

Der etwas komplizierte Beweis dieses Satzes, dem der § 4 dieser Arbeit gewidmet ist, beruht auf einer konsequenten mehrmaligen Anwendung des bereits oben erwähnten Löwnerschen Satzes (Satz A, § 1), und erfordert eine Reihe von Hilfssätzen, die wir zu einem Teil im § 1 (Hilfssätze 1 bis 3) und zum andern Teil im § 2 (Hilfssätze 6 bis 9) herleiten. Diese Hilfssätze sind, wie wir glauben, auch unabhängig von diesem Zusammenhange von Interesse; sie liefern genauere Abschätzungen für die Bildlänge eines Randbogens bei konformer Abbildung unter verschiedenen Annahmen über die Normierung der Abbildungsfunktion.

Aus diesem Satze leitet man ohne Schwierigkeit den folgenden Satz (Satz 3) ab: *Existiert der Grenzwert von* (2), *wenn $w \to w_1$ längs einer in $w_1$ mündenden Kurve $L$ in $G$ strebt, die $C$ nicht berührt, so ist notwendig und hinreichend, damit* (2) *bei allseitiger Annäherung von $w$ an $w_1$ einen Grenzwert besitzt, daß $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 1$ konvergiert (d. h. $C$ in $P$, wie wir sagen werden, „regulär unbewallt" ist).*

Es genügt somit, das Verhalten des Differenzenquotienten (2) längs einer beliebigen in $w_1$ mündenden und die Kurve in $C$ nicht berührenden Kurve $L$ zu kennen, um — unter den Annahmen $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ bzw. $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$ — auf das Verhalten des allseitig genommenen Differenzenquotienten (2) Rückschlüsse ziehen zu können.

Um nun das Verhalten des Differenzenquotienten (2) bei der Annäherung längs solcher Kurven $L$ zu untersuchen, führen wir die sogenannten *Vergleichskurven* ein. Wir verstehen unter einer *inneren* resp.

*äußeren Vergleichskurve* $\mathfrak{C}_i$ bzw. $\mathfrak{C}_a$ von $C$ in $P$ eine geschlossene Jordankurve, die den Punkt $P$ mit $C$ gemeinsam hat und sonst nirgends außerhalb bzw. nirgends innerhalb von $C$ verläuft und im letzten Falle das Innere von $C$ enthält. Die in der oben genannten Abhandlung von Herrn Carathéodory benutzten Kreise und die allgemeineren Kurven von Herrn Valiron können als solche Vergleichskurven aufgefaßt werden.

Es seien $G$ und $G_1$ allgemein zwei von den geschlossenen Jordankurven $C$ und $C_1$ begrenzte Gebiete, von denen das eine bis auf den gemeinsamen Randpunkt $P$ im Innern des andern enthalten ist und die beide in $P$ eine Ecke (nicht notwendig von derselben Öffnung) besitzen. Bildet man $G$ und $G_1$ beide Male auf das Innere des Einheitskreises ab und bildet mit jeder Abbildungsfunktion den in einem festen Winkelraum genommenen Differenzenquotienten (2), so besteht zwischen den absoluten Beträgen dieser Ausdrücke eine gewisse eigentümliche Monotonierelation, wie man sie ähnlich vom Schwarzschen Lemma und seiner Verallgemeinerung, dem Lindelöfschen Prinzip, her kennt. Man kann sie etwas unpräzise dahin formulieren, daß der Differenzenquotient für das größere Gebiet im wesentlichen größer ist. (Die Ungleichung gilt also in der entgegengesetzten Richtung wie beim Lindelöfschen Prinzip; Näheres siehe § 6.) Somit ist es also klar, daß wir Schranken für den allseitig gebildeten Differenzenquotienten (2) finden können, wenn wir geeignete Vergleichskurven konstruieren. Auf die Beschränktheit des Differenzenquotienten nach oben und unten kommt es zunächst vor allem an. Unter den im folgenden zu machenden Annahmen werden wir dann die Existenz des $\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$ verhältnismäßig leicht nachweisen können.

Die Bedingung, die wir zur Kennzeichnung des Verhaltens des Differenzenquotienten (2) benutzen, besteht also, wie wir zusammenfassend sagen können, aus zwei „Komponenten", die nach zwei wesentlich verschiedenen Richtungen dem Verhalten der Kurve in der Nachbarschaft von $P$ Rechnung tragen: 1. aus der Bedingung über die Unbewalltheitsfunktion, welche die innere Struktur von $C$ in der Umgebung von $P$ charakterisiert und 2. aus der Annahme der Existenz geeigneter Vergleichskurven, eine Bedingung, die sich mehr auf den „äußeren" Verlauf von $C$ in der Umgebung von $P$ bezieht. Nach dem Obigen erscheint es wohl auch verständlich, daß es für Untersuchungen über die Winkelderivierten nur auf die zweite Bedingung ankommt (vgl. die oben genannten Sätze der Herren Carathéodory und Valiron).

Die Konstruktion von Vergleichskurven führen wir nun am Anfang des zweiten Kapitels durch, wo wir den Hauptsatz über die konformen Ecken herleiten. Eine genauere Analyse der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ zeigt, daß diese Bedingung damit äquivalent ist, daß gewisse ausgezeichnete

Parameterdarstellungen der Kurve $C$: $w = w(t)$, $-T \leqq t < T$ existieren, und zwar folgender Art: Entspricht dem Scheitelpunkt $P$ der Ecke der Parameterwert $t = 0$, so gibt es zwei positive Konstanten $c_1$ und $C_1$, so daß für alle $t$ im betrachteten Intervall

$$0 < c_1 \leqq \left| \frac{w(t) - w(0)}{t} \right| \leqq C_1 \tag{3}$$

gilt. Wir bezeichnen dann $t$ als einen *„metrischen Parameter"*. Zwischen dem $\overline{\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0}} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \varkappa$ und dem Quotienten $\frac{L}{l}$ der Größen $L = \overline{\lim\limits_{t \to 0}} \frac{|w(t) - w(0)|}{|t|}$, $l = \underline{\lim\limits_{t \to 0}} \frac{|w(t) - w(0)|}{|t|}$ besteht ein enger Zusammenhang. Des weiteren ist die Bedingung $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$ damit äquivalent, daß es einen metrischen Parameter $t$ gibt, für den über (3) hinaus auch noch der $\lim\limits_{t \to 0} \frac{w(t) - w(0)}{t}$ existiert und positiv ist.

Wir nehmen nun an, die Kurve $C$ sei in einer solchen Parameterdarstellung durch einen metrischen Parameter gegeben; $\gamma_-$, $\gamma_+$ seien die beiden in $P$ zusammenstoßenden Kurvenäste von $C$, welche die Ecke der Öffnung $\pi\tau$ in P bilden, $t_-$, $t_+$ die Halbtangenten an $\gamma_-$ bzw. $\gamma_+$ in $P$; $\xi(t)$ bezeichne den Abstand des Punktes $w(t)$ auf $\gamma_-$ bzw. $\gamma_+$ von der entsprechenden Halbtangente. Es sei $\Xi(t)$ eine *„monotone Majorante"* von $\xi(t)$, d. h. eine monotone mit $|t| \downarrow 0$ selber monoton gegen 0 abnehmende Funktion, für die $\xi(t) \leqq \Xi(t)$ ist. Z. B. kann $\Xi(t) = \xi^*(t)$ gesetzt werden, wo

$$\xi^*(t) = \begin{cases} \operatorname{Max}\limits_{0 < \sigma \leqq t} \xi(\sigma), & t > 0, \\ \operatorname{Max}\limits_{0 > \sigma \geqq t} \xi(\sigma), & t < 0, \end{cases}$$

ist; $\xi^*(t)$ ist die *„kleinste"* derartige monotone Majorante.

Wir erläutern nun kurz die Konstruktion der Vergleichskurven für den Fall der Ecke der Öffnung $\pi$ ($\tau = 1$), da wir alles auf diesen Fall vermittelst der Transformation $u = (w - w_1)^{1/\tau}$ reduzieren können und es somit nur auf diesen Fall ankommt.

Wir setzen voraus, daß das Integral $\int_0^\omega \frac{\xi^*(t)}{t^2}\, dt$, $\omega > 0$, konvergiert. Unter diesen Annahmen können wir zwei im Einheitskreise $|z| < 1$ reguläre Funktionen $w = F(z)$, $w = F_1(z)$ konstruieren, die $|z| < 1$ auf das Innere von geschlossenen Jordankurven abbilden, von denen die eine innere, die andere äußere Vergleichskurve von $C$ in $P$ ($w = w_1$) ist. Ferner besitzen $F(z)$, $F_1(z)$ im Punkte $z = 1$, den sie in $w = w_1$ überführen, im Winkelraum gebildete Ableitungen. So gewinnen wir zunächst Schranken für den im Winkelraum gebildeten und hieraus dann nach den Haupt-

ungleichungen auch für den allseitig genommenen Differenzenquotienten (2). Für diese Konstruktion der Vergleichskurven brauchen wir einen Hilfssatz (Hilfssatz 12, § 8), der zu jeder mit $|t| \downarrow 0$ monoton gegen 0 abnehmenden Funktion $X(t)$ eine andere monotone (und übrigens stetig differenzierbare) Funktion $V(t)$ von ähnlichem Charakter zuordnet, die *schwächer* als $X(t)$ gegen 0 konvergiert, darüber hinaus aber gewisse weitere Eigenschaften besitzt (es konvergiert ein gewisses im folgenden benutztes Integral, das Integral (8, 2)). Dieser Satz hängt mit dem bekannten Reihensatze zusammen, daß es zu jeder Reihe mit positiven Gliedern eine schwächer konvergierende Reihe mit positiven Gliedern gibt; die hier verwendeten Überlegungen liegen aber wesentlich tiefer.

Nachdem das Vorhandensein einer konformen Ecke in $P$ bewiesen ist, folgt — im wesentlichen unter Zuhilfenahme eines potentialtheoretischen Hilfssatzes (Hilfssatz 14), den wir zu diesem Zwecke herleiten — leicht auch die Existenz des $\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$ zunächst bei Annäherung von $w$ an $w_1$ längs einer speziellen Kurve und dann unter Hinzunahme der Bedingung $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 1$ auch bei allseitiger Annäherung. — Übrigens gestattet die Beweismethode dieses Hilfssatzes einen neuen Beweis des oben zitierten Satzes a) über die Existenz des $\lim_{z \to 1} \frac{1 - f(z)}{1 - z}$ bei einer im Einheitskreise regulären und beschränkten Funktion $f(z)$ für $|z| < 1$ im Winkelraum. —

So erhalten wir das folgende Resultat (Satz 7):

Hauptsatz über konforme Ecken: *Hat die geschlossene Jordankurve $C$ in $P$ eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$ $(0 < \tau \leqq 2)$, ist ferner $C$ in $P$ linear unbewallt (d. i. $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$) und ist schließlich das mit der oben definierten Funktion $\xi^*(t)$ gebildete Integral $\int_0^\omega \frac{\xi^*(t)}{t^2} dt$, $\omega \gtrless 0$, konvergent, so hat $C$ in $P$ eine konforme Ecke.*

*Ist darüber hinaus $C$ in $P$ regulär unbewallt $\left(d.\ i.\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1\right)$, so existiert sogar für die Abbildungsfunktion $z = \varphi(w)$ des Inneren von $C$ auf das Innere des Einheitskreises der $\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$ bei allseitiger Annäherung und ist von 0 und $\infty$ verschieden.*

Diesem Satz können wir eine Ergänzung beifügen, die zeigt, daß die Bedingung dieses Satzes, was die Größenordnung von $\xi(t)$ betrifft, nicht verbessert werden kann. Wir beweisen nämlich (Satz 8), daß, *wenn die Kurve $C$ in der Umgebung des Punktes $P$ ganz innerhalb eines der beiden von den Halbtangenten $t_-$ und $t_+$ in $P$ gebildeten Winkelräume verläuft und wenn ferner $\xi(t)$ monoton, also $\xi^*(t) = \xi(t)$ ist, notwendig aus der Voraussetzung der konformen Ecke die Existenz eines metrischen Para-*

*meters* $\sigma$ *und die Konvergenz des Integrals* $\int_0^{\omega} \frac{\xi_1^*(\sigma)}{\sigma^2} ds$ *folgt.* ($\xi_1^*(\sigma)$ ist die Funktion $\xi^*(t)$ als Funktion von $\sigma$ aufgefaßt.)

Von dem Standpunkt der oben erwähnten Frage nach der „*Güte*" des durch die konforme Abbildung gelieferten Parameters, können wir das im Hauptsatze gewonnene Resultat auch folgendermaßen formulieren: Ist $t$ ein metrischer Parameter in $w = w_1$, für den das Integral $\int_0^{\omega} \frac{\xi^*(t)}{t^2} dt$ existiert, so ist auch $\sigma = |\vartheta|^{\tau} \operatorname{sgn} \vartheta$ ein metrischer Parameter von $C$ in $w = w_1$, für den gleichfalls das Integral $\int_0^{\omega'} \frac{\xi_1^*(\sigma)}{\sigma^2} d\sigma$, $\omega' \gtrless 0$ ($\xi_1^*(\sigma) = \xi^*(t)$ gesetzt) konvergiert. In diesem Sinne kann man also behaupten, daß der konforme Parameter mit der „*beste*" ist. Vgl. auch Satz 12.

Wenn auch der Beweis des Satzes 7 etwas kompliziert erscheint, so liegt dies zum Teil daran, daß wir im Hinblick auf die weiteren Anwendungen dieses Satzes die *Art der Abhängigkeit der für den Differenzenquotienten* (2) *hergeleiteten Schranken von der Kurve* $C$ ermitteln wollen. Dies zwang uns, beim Beweise in weit höherem Maße, als es sonst nötig gewesen wäre, auf quantitative Überlegungen einzugehen. Ferner haben wir auch an geeigneten Stellen des Beweises in Fußnoten Bemerkungen angefügt, deren Zweck es ist, diese Abhängigkeit herauszuarbeiten. Das Ergebnis haben wir dann im Zusatze zu Satz 7 zusammengefaßt. Die Schranken hängen natürlich einmal von den die Kurve $C$ in der Umgebung von $P$ charakterisierenden Größen, weiter von der Normierung der Abbildungsfunktion $z = \varphi(w)$ (d. h. davon, welcher Punkt bei der Abbildung in den Nullpunkt übergeführt wird) und schließlich auch von der Gesamtausdehnung der Kurve $C$ ab. —

Der übrige Teil des zweiten Kapitels (§§ 10, 11) bringt Anwendungen des Satzes 7. Das wichtigste Ergebnis des § 10 ist der Satz 10. Dort wird unter der Annahme, daß *die Kurve* $C$ *längs eines Bogens* $c$ *stetig sich drehende Tangente besitzt, und daß ferner, falls der Bogen* $c$ *unter Zugrundelegung der Bogenlänge* $s$ *als Parameter durch die Gleichung* $w = w(s)$, $0 \leqq s \leqq a$, *dargestellt wird, das Integral* $\int_0^{\delta} \frac{w'(s+\sigma) - w'(s)}{\sigma} d\sigma$ *in jedem Intervall der Form* $0 < \alpha \leqq s \leqq \beta < a$ *gleichmäßig konvergiert, bewiesen, daß* $\varphi'(w)$ *auf dem (offenen) Bogen* $c$ *existiert, stetig und von* 0 *verschieden ist.* Zum Beweise dieses Satzes zeigen wir zuerst, daß $\varphi'(w)$ auf $c$ existiert und zwischen zwei positiven Schranken liegt, und leiten erst dann die Stetigkeit von $\varphi'(w)$ her. Für spätere Anwendungen, bei

denen der Satz nicht nur auf eine einzige feste Kurve, sondern auf eine *Schar* von Kurven $C$ mit gemeinsamen für diese Schar charakteristischen Eigenschaften angewandt werden soll, haben wir den Beweis des Satzes von vornherein so angelegt, daß wir diese Schranken in ihrer Abhängigkeit von diesen Eigenschaften der Kurve $C$ bestimmen. Dies macht natürlich den Beweis etwas umständlicher, als er es sonst wäre. Ferner haben wir an geeigneten Stellen des Beweises in Fußnoten Bemerkungen hinzugefügt, die diese Abhängigkeit herausarbeiten sollen und das Ergebnis im Zusatz 1 zum Satz 10 formuliert. Ein weiterer Zusatz (über die „Stetigkeitsfunktion" von $f'(z) - f(z)$ ist die zu $z = \varphi(w)$ inverse Funktion — s. Nr. 98) soll gleichfalls bei späteren Überlegungen verwertet werden. Da die erwähnten Anwendungen des Satzes 10 erst in der zweiten Mitteilung angegeben werden sollen, können alle diese auf die „Gleichmäßigkeit" bezüglichen Bemerkungen auch zunächst überschlagen werden.

Im § 11 untersuchen wir Kurven $C$ mit einer Ecke in einem ihrer Punkte $P$, die von zwei in $P$ zusammenstoßenden Kurvenzweigen mit stetiger Tangente gebildet ist. Wir charakterisieren die Änderung des Tangentenwinkels in der Umgebung des Punktes $P$ durch die Angabe einer *allgemeinen Lipschitzbedingung*: bildet die (etwa im Sinne wachsender $s$ gerichtete) Tangente im Punkt $P(s)$ mit der positiven reellen Achse den Winkel $\theta(s)$, wobei $s$ die von $P$ aus gezählte Bogenlänge bedeutet $(-\delta \leqq s \leqq \delta)$ und haben die Halbtangenten in $P$ die Richtungswinkel $\theta_-$ und $\theta_+$, so möge

$$(4) \qquad |\theta(s) - \theta_+| \leqq \omega(s), \quad \underset{s<0}{|\theta(s) - \theta_-|} \leqq \omega(|s|)$$

sein, wo $\omega(\sigma)$ eine für $\sigma \downarrow 0$ monoton nach 0 abnehmende stetige Funktion von $\sigma$ ist, $0 < \sigma \leqq \delta$. Wir bezeichnen $\omega(\sigma)$ als den *„Lipschitzschen Modul"* von $\theta(s)$ in $s = 0$. Wir fassen alle geschlossenen Jordankurven, deren Tangentenwinkel $\theta(s)$ als Funktion der Bogenlänge $s$ in einer von zwei Kurvenästen mit stetiger Tangente gebildeten Ecke $P(s = 0)$ der Lipschitzschen Bedingung (4) genügen, zu einer Klasse $L(\omega(\sigma))$ zusammen. Dann gilt der Satz (Satz 11): *Hinreichend und notwendig dafür, daß alle Kurven der Klasse $L(\omega(\sigma))$ in dem betrachteten Punkte $P$ eine konforme Ecke besitzen, ist, daß das Integral* $\int_0^\delta \frac{\omega(\sigma)}{\sigma} d\sigma$ *konvergiert.*

Hat $C$ längs eines Bogens $c$ durchweg sich stetig drehende Tangente und gibt es einen Lipschitzschen Modul $\omega(\sigma)$ mit konvergentem Integral $\int_0^\delta \frac{\omega(\sigma)}{\sigma} d\sigma$, so daß durchweg auf diesem Bogen

$$|\theta(s) - \theta(s_1)| \leqq \omega(|s - s_1|)$$

gilt, so ist $\varphi'(w)$ längs dieses Bogens stetig und von 0 verschieden. Indem man $\omega(\sigma)$ spezialisiert, erhält man weitere spezielle Kriterien. So ergibt sich für $\omega(\sigma) = K\sigma^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, ($K$ Konstante) der Teil des eingangs genannten Satzes von Kellogg (für $n = 1$), der die Stetigkeit von $\varphi'(w)$ und $\frac{1}{\varphi'(w)}$ behauptet. Aber auch das Bestehen der Lipschitzbedingung für $\varphi'(w)$ und $\frac{1}{\varphi'(w)}$ läßt sich dann — unter Zuhilfenahme eines Satzes von Herrn I. Privaloff über konjugierte Potentialfunktionen — leicht herleiten. —

Im einzelnen ist die Arbeit folgendermaßen angeordnet. Das erste Kapitel, in dem wir die Hauptungleichungen herleiten und aus ihnen verschiedene Folgerungen ziehen, umfaßt die Paragraphen 1 bis 6. In den Paragraphen 1 und 2 leiten wir im wesentlichen die Hilfssätze her, die wir zum Beweise der Hauptungleichungen im § 4 brauchen. Wir gehen im § 1 von dem Löwnerschen Satze aus (Nr. 1), besprechen einige Folgerungen und Anwendungen (Sätze A, B, C) und sodann drei Hilfssätze (die Hilfssätze 1 bis 3), die wir für den Beweis der Hauptungleichungen brauchen. Dagegen werden die dort weiter folgenden Hilfssätze 4 und 5 erst später (§ 9) benutzt. § 2 enthält die Hilfssätze 6 bis 9, die nur in § 4 gebraucht werden. Der § 3 ist vor allem der Diskussion der Unbewalltheitsfunktion gewidmet und bereitet im übrigen alle im folgenden zu benutzenden geometrischen Hilfsmittel vor. Die Begriffe der „Richtungsfunktion“ und des „metrischen Parameters“ werden erst im zweiten Kapitel gebraucht. § 4 enthält die Formulierung und den Beweis der Hauptungleichungen, § 5 weitere Anwendungen, deren wichtigste der oben genannte Satz 3 ist. Im § 6 führen wir die Vergleichskurven ein und leiten den Zusammenhang zwischen dem Differenzenquotienten (2) der Abbildungsfunktion von $G$ und gewissen Differenzenquotienten der Abbildungsfunktion des Innern der Vergleichskurven auf den Einheitskreis ab. Daraus ziehen wir dann einige Folgerungen, unter denen wir den Satz 5 hervorheben möchten, der den Zusammenhang der „*generalisierten konformen*“ *Ecke* mit der „*konformen*“ *Ecke* klärt.

Das zweite Kapitel enthält den Hauptsatz über konforme Ecken und Anwendungen. Es umfaßt die Paragraphen 7 bis 11. Im § 7 wird der Hauptsatz formuliert und daran werden drei Vorbemerkungen angeschlossen. Im § 8 leiten wir drei Hilfssätze her, die zum Beweise des Hauptsatzes, der im § 9 durchgeführt wird, benötigt werden. Am Schlusse von § 9 leiten wir den Satz 8 (s. oben) her, der für eine spezielle Klasse von Kurven die Umkehrung des Satzes 7 darstellt. § 10 enthält Anwendungen des Satzes 7 auf rektifizierbare Kurven und § 11 auf Kurven mit stetiger Tangente, bei denen das Verhalten der Tangente durch eine allgemeine Lipschitz-Bedingung charakterisiert wird.

Schließlich gehen wir in einem Anhang kurz auf eine naheliegende Verallgemeinerung der Sätze der Herren Carathéodory und Valiron über

die Existenz einer endlichen und von 0 verschiedenen im Winkelraum genommenen Ableitung ein[13]).

[13]) Nachdem ich die Redaktion dieser Arbeit bereits abgeschlossen hatte, erschien die Abhandlung von Herrn L. Ahlfors, Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen, Acta societatis scientiarum Fennicae, Nova series A, **1**, Nr. 9 (1930), S. 1—40, die in ihren Resultaten mit einem Teile dieser Arbeit enge Berührungspunkte aufweist. Herr Ahlfors befaßt sich dort mit der Frage nach der „im Winkelraum" gebildeten Ableitung in einem Randpunkte. Er geht von einem anderen Gesichtspunkt aus als wir, indem er zur Charakterisierung des Randes in der Umgebung des betrachteten Randpunktes eine etwas andere Bedingung als wir benutzt, und gelangt zu einem schärferen Resultat über die Existenz der Winkelableitung, als wir es unter Benutzung unserer Ergebnisse über die allseitige Ableitung im Anhang formulieren konnten. Man könnte aber auch sein Resultat beim Beweise unseres Satzes 7 verwenden. Dieser Beweis besteht, wie oben ausgeführt, darin, daß wir zunächst vermittels der „Hauptungleichungen" das Verhalten des allseitig gebildeten Differenzenquotienten in einem Randpunkte auf dasjenige des im Winkelraum gebildeten reduzieren und sodann die Beschränktheit dieses Differenzenquotienten beweisen. Dieser letzte Teil des Beweises — der im wesentlichen auf der Konstruktion der Vergleichskurven beruht — ließe sich nun auch durch das Ahlforssche Resultat über die Existenz der Winkelableitung ersetzen. Mit seinem schärfsten Ergebnis (Satz II, S. 36) könnte man unseren Satz 7 sogar etwas verschärfen. Im übrigen enthält aber seine Arbeit keines der in unserer Arbeit selbst formulierten Resultate, die sich ja alle auf die allseitige Ableitung beziehen. Seine Methode ist von der unseren wesentlich verschieden, wenn auch die Grundidee seines Beweises seines Satzes II (S. 36) auch in der Konstruktion eines geeigneten „Vergleichsgebietes" besteht.

Anmerkung bei der Korrektur. Während des Druckes der vorliegenden Abhandlung erschienen die folgenden Arbeiten, die mit dieser vielfach Berührungspunkte gemeinsam haben: 1. P. Bessonoff et M. Lawrientieff, Sur l'existance de la dérivée limite, Bull. de la soc. math. de France **58** (1930), p. 175—198. Dort wird vor allem ein Spezialfall unseres Satzes 7 bewiesen (nämlich $\xi^*(t) = c\,t^{1+\alpha}$, $\alpha, c$ positive Konstanten, $0 < \alpha < 1$). Der Beweis weist, sowohl was die Verwendung des Löwner-Montelschen Satzes als auch die Heranziehung von „Vergleichskurven" anbetrifft, sehr enge Berührungspunkte mit dem unsrigen auf, ist aber einfacher als dieser, da er für den Spezialfall direkt zugeschnitten ist. 2. J. Wolff, Comptes rendus **191** ($1930_2$), p. 921—923, wo die Ableitung der Abbildungsfunktion bei Kurven untersucht wird, die in dem betrachteten Punkt $P$ eine Tangente $t$ haben und in seiner Umgebung in Polarkoordinaten $(r, \varphi)$ — $\varphi$ Winkel des Radiusvektors $r$ gegen $t$, $P$ sein Scheitelpunkt — durch $r = r(\varphi)$ mit *monotonem* $r(\varphi)$ gegeben sind, die aber insbesondere dort ganz auf einer Seite von $t$ verlaufen. Es wird 1. gezeigt, daß die Abbildungsfunktion in $P$ stets eine *allseitige* Ableitung hat ($\infty$ zugelassen), und 2. wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Endlichkeit der Ableitung angegeben, die mit der unseres Satzes 7 $\left(\text{Konvergenz von } \int_0^\delta \frac{\xi^*(t)}{t^2}\,dt\right)$ für diese speziellen Kurven äquivalent ist. 2. ist in unserem Sätzesystem 7, 8 enthalten, 1. kann mit der Beweismethode von Satz 8 unter Zuhilfenahme der Hauptungleichungen erhalten werden. Die Wolffschen Beweise sind besonders einfach. 3. W. Seidel, Über die Ränderzuordnung bei konformen Abbildungen, Math. Annalen **104** (1931), S. 183—243. Dort wird neben der Abbildung von speziellen

(Fortsetzung der Fußnote [13]) auf nächster Seite.)

Die Anregung zu dieser Arbeit sowie viele wertvolle Ratschläge sowohl bei der allmählichen Herausarbeitung der Fragestellungen als auch bei der Durchführung sowie bei ihrer endgültigen Darstellung verdanke ich Herrn Professor Ostrowski. So geht unter anderem insbesondere die Formulierung der im folgenden neu eingeführten geometrischen Begriffsbildungen (vgl. auch das Verzeichnis am Schlusse der Einleitung), so die des Kurvenelements, der Unbewalltheitsfunktion, des metrischen Parameters u. a. teils auf mündliche Besprechungen mit ihm und teils auf seine Vorlesungen zurück. Es sei mir gestattet, Herrn Professor Ostrowski für das stete freundliche Interesse, mit dem er den Fortgang meiner Arbeit sowie meiner bisherigen Studien überhaupt unterstützte und förderte, meinen herzlichsten und aufrichtigsten Dank auszusprechen. — Ferner danke ich der philosophischen Fakultät der Universität Basel für einen mir freundlichst gewährten Zuschuß zu den Veröffentlichungskosten der Arbeit.

## Verzeichnis der im folgenden eingeführten Begriffsbildungen.


| | Seite |
|---|---|
| Abschirmen | 340 |
| Konforme Ecke | 384 |
| Generalisierte konforme Ecke | 384 |
| Konforme Länge | 339 |
| Konformes Maß | 339 |
| Konvergenzfunktion (eines Integrals) | 413 |
| Kurvenelement | 355 |
| Lipschitzscher Modul | 443 |
| Metrischer Parameter | 357 |
| Richtungsfunktion | 357 |
| $\varrho$-Kurve | 428 |
| Stetigkeitsfunktion | 438 |
| Unbewalltheitsfunktion | 355, 357 |
| Unbewallt: linear unbewallt | 357 |
| regulär unbewallt | 357 |
| Vergleichskurve | 381 |


Gebietsklassen auch das Randverhalten der Ableitungen der Abbildungsfunktion $w = f(z)$ von $|z| < 1$ auf das Innere von geschlossenen Jordankurven $C$ untersucht. Zu unserem Gegenstand stehen vor allem die Sätze 18 bis 20 in Beziehung, wo unter der Annahme, daß $C$ durchweg „beschränkte Krümmung“ hat (der Tangentenwinkel $\theta(s)$ genügt einer Lipschitzbedingung), die Totalstetigkeit von $f'(z)$ und ferner die Existenz für fast alle $\vartheta$ von $\lim_{r \uparrow 1} f''(re^{i\vartheta})$ und die die Integrabilität von $|f''(e^{i\vartheta})|^p$ für jedes $p > 0$ bewiesen wird. Vgl. hierzu unsere Sätze 10, 12. — Ferner möchten wir auf die kürzlich erschienenen Arbeiten von O. D. Kellogg, On the derivatives of harmonic functions on the boundary, Transactions of the American Math. Soc. **33** (1931), p. 486–510, J. Schauder, Potentialtheoretische Untersuchungen I, Math. Zeitschr. **33** (1931), S. 602–640, und L. Lichtenstein, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie IV, Sächsische Berichte **82** (1930), S. 265–344, hinweisen, wo sich weitere Untersuchungen über die Ableitungen von (räumlichen) Potentialfunktionen am Rande befinden.

## I. Kapitel.

## Anwendungen des Löwnerschen Satzes. Herleitung der Hauptungleichungen.

### § 1.

### Der Löwnersche Satz.

1. Ein bekannter von Herrn Löwner[14]) herrührender Satz lautet:

*Es sei* $f(z)$ *in* $|z|<1$ *regulär und absolut* $<1$, *es sei ferner* $f(0)=0$. *Ferner besitze* $f(z)$ *auf einem Bogen* $\gamma$ *von* $|z|=1$ *stetige Randwerte vom Betrage* 1. *Dann wird durch* $f(z)$ *dieser Bogen auf einen nicht kürzeren abgebildet. Die Länge von* $\gamma$ *bleibt nur erhalten, wenn* $f(z)\equiv e^{i\tau}z$ ($\tau$ *reell*) *ist.*

Beweis. Durchläuft $z$ den Bogen $\gamma$ in mathematisch positivem Sinne, so durchlaufen sowohl $f(z)$ als auch $\frac{f(z)}{z}$ ihre Bildbögen in mathematisch positivem Sinne, da beide Funktionen in $|z|<1$ regulär und absolut $<1$ sind und auf $\gamma$ stetige Randwerte vom Betrage 1 besitzen[15]). Ferner ist $\arc f(z)=\arc z+\arc\frac{f(z)}{z}$, und weil der Zuwachs von $\arc\frac{f(z)}{z}$ auf $\gamma$ nicht negativ ist, ist der Zuwachs von $\arc f(z)$ auf $\gamma$ nicht kleiner als die Länge

---

[14]) K. Löwner, Math. Annalen **89** (1923), S. 111f. Siehe auch L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, S. 124.

[15]) Ist $\gamma$ durch $|z|=|e^{i\vartheta}|=1$, $\vartheta_1\leqq\vartheta\leqq\vartheta_2$, $\vartheta_2-\vartheta_1\leqq 2\pi$ dargestellt, so ist $\lg f(z)=\lg|f(z)|+i\theta(z)$ in $0<\varrho=|z|<1$, $\vartheta_1<\vartheta<\vartheta_2$ eindeutig regulär, wenn für $\theta(z)$ in einem inneren Punkte dieses Kreissektors irgendeine Bestimmung gewählt wird und für alle anderen Werte $\theta(z)$ durch stetige Fortsetzung aus diesem festgelegt wird. Nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gilt dann:

$$\varrho\frac{\partial\lg\frac{f(z)}{\partial\varrho}}{\partial\varrho}=\frac{\partial\theta(z)}{\partial\vartheta}.$$

Da $f(z)$ längs jedes inneren Teilbogens des Kreisbogens $\gamma$ nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip fortsetzbar ist, so gilt diese Gleichung auch noch auf einem solchen Teilbogen: $\varrho=1$, $\vartheta_1<\vartheta_1'\leqq\vartheta\leqq\vartheta_2'<\vartheta_2$. Wegen $|f(z)|<1$ für $|z|<1$ ist für $0<|z|<1$ weiter

$$\frac{\lg|f(e^{i\vartheta})|-\lg|f(\varrho e^{i\vartheta})|}{1-\varrho}=-\frac{\lg|f(\varrho e^{i\vartheta})|}{1-\varrho}>0,\quad \vartheta_1'\leqq\vartheta\leqq\vartheta_2',$$

und daher für $\varrho=|z|=1$, $\vartheta_1'\leqq\vartheta\leqq\vartheta_2'$

$$\frac{\partial\lg|f(z)|}{\partial\varrho}\geqq 0\ \text{ und somit auch }\ \frac{\partial\theta(e^{i\vartheta})}{\partial\vartheta}\geqq 0,$$

d. h. aber $\theta(e^{i\vartheta})$ ist eine monoton wachsende Funktion von $\vartheta$. Analoges gilt für $\frac{f(z)}{z}$.

von $\gamma$ (der Zuwachs von $\arg z$). Soll er gleich der Länge von $\gamma$ sein, so muß notwendig $\frac{f(z)}{z} = \text{konst.}$ auf $\gamma$ und daher nach einem bekannten Satz von Schwarz im Innern konstant sein, und zwar muß wegen $\left|\frac{f(z)}{z}\right| = 1$ auf $\gamma$ $f(z) \equiv e^{i\tau} z$ sein.

Konforme Abbildung liefert sofort eine etwas allgemeinere Formulierung dieses Satzes:

*$G$ sei ein von einer geschlossenen Jordankurve $C$ begrenztes Gebiet in der $w$-Ebene, $w_0$ sei ein Punkt in $G$. Es sei ferner $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär, $f(0) = w_0$, und es möge der Wertevorrat von $f(z)$ im Innern von $G$ liegen. $f(z)$ möge überdies auf einem gewissen (von $f(z)$) abhängigen Bogen $\gamma_f$ von $|z| = 1$ stetige Randwerte besitzen und $\gamma_f$ auf ein festes (von $f$ unabhängiges) Bogenstück $c$ von $C$ abbilden. $w = F(z)$ bilde $|z| < 1$ so auf $G$ ab, daß $z = 0$ in $w = w_0$ übergeht. Die zu $F(z)$ inverse Funktion $z = \Phi(w)$ führt $c$ in den Kreisbogen $\gamma_F$ über.*

*Dann ist $\gamma_f \leqq \gamma_F$, und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn $f \equiv F(e^{i\tau} z)$ ist ($\tau$ reell).*

Beweis. $\zeta = \Phi(w)$ bildet $G$ auf den Einheitskreis einer $\zeta$-Ebene so ab, daß $w = w_0$ in $\zeta = 0$ übergeht. $\zeta = \Phi(f(z))$ genügt den Voraussetzungen des Löwnerschen Satzes und bildet $\gamma_f$ auf $\gamma_F$ ab. Daher ist $\gamma_f \leqq \gamma_F$. Das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn $\Phi(f(z)) \equiv e^{i\tau} z$ ist, also $f(z) \equiv F(e^{i\tau} z)$ ist.

2. Für das Weitere führen wir noch die folgende Sprechweise ein: Es sei $G$ ein von einer geschlossenen Jordankurve $C$ begrenztes Gebiet, $a$ ein Punkt in $G$. Wir bilden $G$ so auf das Innere des Einheitskreises ab, daß $a$ in den Nullpunkt übergeht. $\mathfrak{M}$ sei eine Punktmenge auf $C$, die bei dieser Abbildung auf eine meßbare Punktmenge $\mathfrak{M}'$ auf der Peripherie des Einheitskreises abgebildet wird. Dann nennen wir das Maß von $\mathfrak{M}'$ das *„konforme Maß von $\mathfrak{M}$ bei dieser Abbildung“ — durch die es offenbar eindeutig festgelegt ist — und bezeichnen es mit $m_{G,a}\mathfrak{M}$ oder auch mit $m_{C,a}\mathfrak{M}$.* Ist $\mathfrak{M}$ insbesondere ein Bogen $\gamma$ von $C$, so ist auch $\mathfrak{M}'$ ein Bogen $\gamma'$ der Kreisperipherie und $m_{G,a}\gamma$ ist die Länge von $\gamma'$, die wir auch als die *„konforme Länge von $\gamma$“* bezeichnen wollen.

Wir formulieren nun den folgenden Spezialfall des obigen Satzes:

A. *Es sei $G$ ein von einer geschlossenen Jordankurve $C$ begrenztes Gebiet, $G_1$ ein Teilgebiet von $G$, das von einer Jordankurve $C_1$ begrenzt wird, und es habe $C$ einen Bogen $c$ mit $C_1$ gemeinsam. $a$ sei ein in beiden Gebieten liegender Punkt. Dann ist*

$$m_{G,a}\, c \geqq m_{G_1,a}\, c,$$

*und das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn $C \equiv C_1$ ist.*

Hieraus ergibt sich sofort der folgende Satz:

B. *Es seien $G$ und $G_1$ zwei von den Jordankurven $C$ bzw. $C_1$ begrenzte Gebiete, und es möge $C_1$ ganz im Innern von $G$ verlaufen bis auf endlich oder unendlich viele Bögen $c_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, die $C$ und $C_1$ miteinander gemeinsam haben. Die Gesamtheit der übrigen Bögen von $C$ bzw. $C_1$ sei mit $S$ bzw. $S_1$ bezeichnet. $a$ sei ein im Innern von $G$ und $G_1$ liegender Punkt. Dann ist*

$$m_{G_1,a} S_1 \geqq m_{G,a} S,$$

*und auch hier gilt das Gleichheitszeichen nur dann, wenn $C \equiv C_1$ ist.*

Denn es ist ja nach dem Satze A: $m_{G,a} c_\nu \geqq m_{G_1,a} c_\nu$ (wobei $m_{G,a} c_\nu = m_{G_1,a} c_\nu$ nur dann gilt, wenn $C \equiv C_1$ ist) und daher

$$m_{G_1,a} S_1 = 2\pi - \sum_\nu m_{G_1,a} c_\nu \geqq 2\pi - \sum_\nu m_{G,a} c_\nu = m_{G,a} S.$$

3. Es sei $C$ eine geschlossene Jordankurve, $\bar{\beta}$ und $\beta$ seien zwei echte Teilbögen von $C$, und $\beta$ enthalte $\bar{\beta}$ [16]). $P$ und $Q$ seien die Endpunkte von $\beta$; der komplementäre Bogen zu $\beta$ werde mit $\alpha$ bezeichnet. Ferner sei $a$ ein im Innern von $C$ gelegener Punkt. Wir sagen dann, *der Jordanbogen $\gamma$ „schirmt" $\bar{\beta}$ von $a$ ab*, wenn $\gamma$ die Punkte $P$ und $Q$ miteinander verbindet und mit $\alpha$ eine geschlossene Jordankurve $\Gamma$ bildet, die $a$ in ihrem Innern, $\bar{\beta}$ (bis eventuell auf seine Endpunkte) in ihrem Äußeren enthält.

Dann gilt der folgende Satz:

C. *Es sei $C$ eine geschlossene Jordankurve, $a$ ein Punkt im Innern von $C$, $\widehat{PQ} = \alpha$ ein echter Teilbogen von $C$, $\beta$ der komplementäre Bogen und $\bar{\beta}$ ein Teilbogen von $\beta$* [16]). *Der Bogen $\gamma$ verbinde $P$ und $Q$ miteinander und möge dabei $\bar{\beta}$ von $a$ abschirmen. Die von $\alpha$ und $\gamma$ gebildete geschlossene Jordankurve sei mit $\Gamma$ bezeichnet. Dann ist*

$$m_{C,a} \bar{\beta} \leqq m_{\Gamma,a} \gamma.$$

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus dem Satze B, wenn der Bogen $\gamma$ nicht außerhalb von $C$ verläuft, s. Fig. 1. Es ist ferner auch noch sehr einfach, den Beweis für den Fall zu erbringen, daß $\gamma$ zwar Punkte mit dem Äußeren von $C$ gemeinsam hat, aber doch so verläuft, daß es möglich ist, eine die Bögen $\alpha$ und $\bar{\beta}$ als Teilbögen enthaltende geschlossene Jordankurve $C^*$ zu finden, die sowohl das Innere von $C$ als auch das von $\Gamma$ enthält, s. Fig. 2 [17]). Für die weitere Anwendung, die wir von diesem Satze machen müssen, würde es genügen, den Satz für diesen

[16]) Insbesondere darf $\bar{\beta}$ mit $\beta$ identisch sein.

[17]) Die Fig. 3 veranschaulicht eine Konfiguration, bei der diese Bedingungen über den Bogen $\gamma$ offenbar in der schlichten Ebene nicht mehr erfüllt sind.

zuletzt genannten Fall zu beweisen. Allein um nicht den Begriff des „Abschirmens“ unnötigerweise einzuschränken, müssen wir den folgenden etwas komplizierteren Weg, als es der oben erwähnte ist, einschlagen.

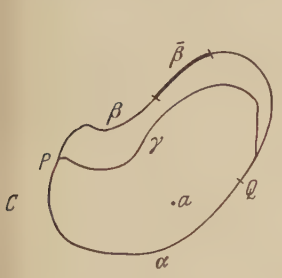


Fig. 1.

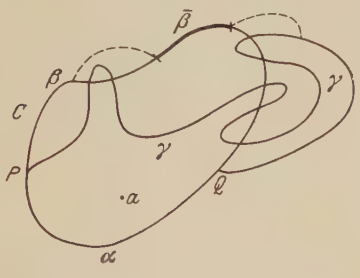


Fig. 2.

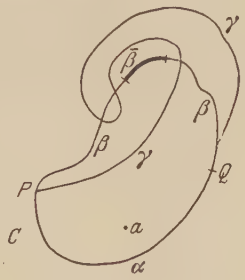


Fig. 3.

Zunächst bemerken wir, daß es sicher Bögen von $\gamma$ gibt, die nicht zu $C$ gehören. Denn der Bogen $\bar{\beta}$ von $C$ liegt ja sicher außerhalb von $\Gamma$. Wir bezeichnen die Gesamtheit dieser Bögen von $\gamma$ mit $\gamma^*$. Es sei nun $G^*$ das größte einfach zusammenhängende Gebiet, das dem Durchschnitt des Innern von $C$ und des Innern von $\Gamma$ angehört und zugleich den Punkt $a$ im Innern enthält. Nach einem Satze aus der Topologie der Kurven[18]) besteht der Rand von $G^*$ aus einer geschlossenen (sich aus Bögen von $C$ und $\gamma^*$ zusammensetzenden) Jordankurve $\Gamma^*$. $\Gamma^*$ enthält notwendig Bögen von $\gamma^*$ und von $C$. Denn enthielte $\Gamma^*$ keinen Bogen von $\gamma^*$, so hieße dies doch offenbar, daß $\Gamma^*$ nur aus Bögen besteht, die sämtlich (auch) zu $C$ gehören. Da nun aber $C$ doppelpunktfrei ist, könnten nur dann Teilbögen von $C$ eine geschlossene Jordankurve $\Gamma^*$ bilden, wenn $\Gamma^* \equiv C$ wäre, und dies ist unmöglich, weil der Bogen $\bar{\beta}$ sicher außerhalb von $\Gamma^*$ liegt. Enthielte andererseits $\Gamma^*$ keinen Bogen von $C$, so müßte $\Gamma^*$ aus lauter Bögen von $\gamma$ bestehen. Teilbögen von $\gamma$ können aber keine geschlossene Jordankurve bilden, da ja $\gamma$ als doppelpunktfrei und nicht geschlossen vorausgesetzt wurde.

Die beiden geschlossenen Jordankurven $C$ und $\Gamma^*$, von denen $\Gamma^*$ nicht außerhalb von $C$ liegt, enthalten also beide $a$ im Innern und besitzen gemeinsame Randbögen *ohne miteinander identisch zu sein*. Es bezeichne nun $S$ die Gesamtheit derjenigen Bögen von $C$, die nicht zu $\Gamma^*$ gehören, und $\Sigma$ die Gesamtheit der Bögen von $\Gamma^*$, die nicht zugleich $C$ angehören. Unter den zuerst genannten befindet sich sicher $\bar{\beta}$, die zuletzt erwähnten

[18]) Vgl. B. v. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie Bd. 1, Berlin 1923, S. 87. Dieser Satz lautet: *Es seien $j_1, j_2, \ldots, j_n$ endlich viele einfache geschlossene Kurven (Jordankurven), von denen je zwei einander in wenigstens zwei Punkten treffen. Der Rand eines beliebigen von der Menge $j_1 + j_2 + \ldots + j_n$ bestimmten Gebietes besteht aus einer einfachen geschlossenen Kurve.*

sind sämtlich im Bogen $\gamma$ enthalten. Dann ist nach Satz B:

$$m_{C,a}\,S \leqq m_{\Gamma^*,a}\,\Sigma$$

und daher auch wegen $m_{C,a}\,\bar{\beta} \leqq m_{C,a}\,S$

$$m_{C,a}\,\bar{\beta} \leqq m_{\Gamma^*,a}\,\Sigma. \tag{1,1}$$

Nun betrachten wir $\Gamma^*$ und $\Gamma$ und bemerken, daß $\Gamma^*$ nicht außerhalb von $\Gamma$ liegt, sicher die Bögen $\Sigma$ mit $\Gamma$ gemeinsam hat, und daß schließlich beide Kurven $a$ im Innern enthalten. Daher ist nach dem Satze A:

$$m_{\Gamma^*,a}\,\Sigma \leqq m_{\Gamma,a}\,\Sigma$$

und somit wegen $m_{\Gamma,a}\,\Sigma \leqq m_{\Gamma,a}\,\gamma$ und wegen (1,1)

$$m_{C,a}\,\bar{\beta} \leqq m_{\Gamma,a}\,\gamma, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

4. Wir besprechen nunmehr zwei geometrische Konfigurationen, auf die wir im folgenden unsere Sätze anwenden müssen. Unser Ziel wird hierbei im wesentlichen sein, die folgende Aufgabe zu lösen: Es sei $C$ eine geschlossene Jordankurve, $\gamma$ ein Bogen von $C$; wir suchen dann nach einer Abschätzung für $m_{C,a}\,\gamma$ (bei beliebigem $a$ im Innern von $C$) nach oben und unten. Unter Heranziehung von Kreisabbildungen werden wir nun diese Frage in einem für unsere Zwecke hinreichendem Umfange beantworten können.

Hilfssatz 1. *Es sei $C$ eine geschlossene Jordankurve in der $w$-Ebene, $k$ ein die Kurve $C$ in mindestens zwei Punkten durchsetzender Kreis, $\alpha = \overset{\frown}{PQ}$ irgendein von zwei Schnittpunkten $P$ und $Q$ von $k$ und $C$ begrenzter Bogen von $C$, der bis auf seine Endpunkte außerhalb von $k$ verläuft, $\gamma$ der zu $\alpha$ komplementäre Bogen von $C$. Der Kreisbogen $\overset{\frown}{PQ}$, der $\alpha$ zu einer geschlossenen, das Kreisinnere im Innern enthaltenden Jordankurve $C_1$ ergänzt, werde mit $\beta$ bezeichnet. Es sei ferner $c$ ein dem Durchschnitt der Innengebiete von $k$ und $C$ angehörender Punkt*[19]*, so daß also auch $c$ im Innern von $C_1$ liegt. Schließlich möge $\bar{\beta}$ ein Teilbogen des Bogens $\beta$, also auch der Kurve $C_1$ sein, der durch den Bogen $\gamma$ von $C$ von $c$ abgeschirmt wird*[20]*) (s. Fig. 4). Dann ist*

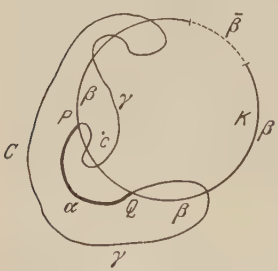


Fig. 4.

$$m_{k,c}\,\bar{\beta} \leqq m_{C,c}\,\gamma.$$

[19]) Offenbar gibt es einen solchen Punkt $c$, da ja $k$ die Kurve $C$ durchsetzen soll.

[20]) Es entspricht also die Kurve $C_1$ der Kurve, die wir in der Definition des Abschirmens mit $C$ bezeichnet haben, und die Kurve $C$ übernimmt die Rolle der dort mit $\Gamma$ bezeichneten Kurve.

Beweis. Da der Bogen $\gamma$ von $C$ den Bogen $\bar{\beta}$ von $C_1$ von $c$ abschirmt, ist nach Satz C

$$m_{C_1,c}\bar{\beta} \leqq m_{C,c}\gamma . \tag{1,2}$$

Nun ist aber das Innere des Kreises $k$ im Innern von $C_1$ enthalten, und da der Bogen $\bar{\beta}$ beiden Kurven $C_1$ und $k$ gemeinsam ist, so ist nach Satz A:

$$m_{k,c}\bar{\beta} \leqq m_{C_1,c}\bar{\beta},$$

woraus in Verbindung mit (1,2) die Behauptung folgt.

Hilfssatz 2. *Es sei $C$ eine geschlossene Jordankurve, $k$ ein die Kurve $C$ in mindestens zwei Punkten durchsetzender Kreis. Es sei ferner $\alpha = \overset{\frown}{PQ}$ ein von zwei Schnittpunkten von $k$ und $C$ begrenzter, sonst außerhalb von $k$ verlaufender Bogen von $C$ mit den folgenden weiteren Eigenschaften: Ergänzt man $\alpha$ durch einen solchen der beiden Kreisbögen $\overset{\frown}{PQ}$, etwa $\gamma$, zu einer geschlossenen Jordankurve $\Gamma$, daß das Innere von $k$ dem Äußeren von $\Gamma$ angehört, so möge im Innern von $\Gamma$ ein Punkt $c'$ aus dem Innern von $C$ liegen. $\beta$ sei der zu $\alpha$ in bezug auf $C$ komplementäre Bogen, $\bar{\beta}$ ein Teilbogen von $\beta$, der durch $\gamma$ von $c'$ abgeschirmt wird* (s. Fig. 5). *Dann ist*

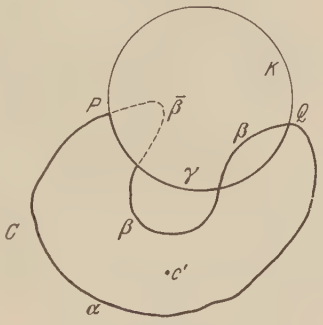


Fig. 5.

$$m_{C,c'}\bar{\beta} \leqq m_{k,c'}\gamma .$$

Beweis. Da der Bogen $\gamma$ von $\Gamma$ den Bogen $\bar{\beta}$ von $C$ von $c'$ abschirmt, ist

$$m_{C,c'}\bar{\beta} \leqq m_{\Gamma,c'}\gamma . \tag{1,3}$$

Nun gehört aber das Innere von $\Gamma$ ganz dem *Äußeren* von $k$ an, und da der Bogen $\gamma$ sowohl $k$ wie $\Gamma$ angehört, so folgt nach dem Satze A[21]):

$$m_{\Gamma,c'}\gamma \leqq m_{k,c'}\gamma ,$$

woraus sich in Verbindung mit (1,3) die Behauptung ergibt. —

5. Wir leiten nunmehr einen sehr einfachen Hilfssatz über Jordankurven her, den wir gleichfalls später (§ 4, Nr. 21 und Nr. 30) verwenden werden.

[21]) Man beachte, daß es für die Gültigkeit der Sätze A und B (Nr. 2) gleichgültig ist, ob $G$ bzw. $G_1$ das Innere oder das Äußere der diese Gebiete begrenzenden Jordankurven $C$ bzw. $C_1$ sind.

Hilfssatz 3. *Es sei $C$ eine geschlossene Jordankurve, $c$ ein Punkt im Innern von $C$. $g$ sei eine $C$ in mindestens zwei Punkten durchsetzende Gerade, und $\alpha = \overset{\frown}{AB}$ sei ein Bogen von $C$, der (eventuell bis auf seine Endpunkte $A$, $B$, die auf $g$ liegen dürfen) ganz auf der $c$ abgewandten Seite von $g$ verläuft. $\beta$ sei der zu $\alpha$ komplementäre Bogen. Verbindet man dann $A$ und $B$ durch einen Jordanbogen $\gamma$, der die Kurve $C$ höchstens in Punkten des Bogens $\alpha$ trifft und ganz auf derselben Seite von $g$ bleibt wie $\alpha$, so enthält die von $\gamma$ und $\beta$ gebildete geschlossene Jordankurve $\Gamma$ den Punkt $c$ im Innern* (s. Fig. 6).

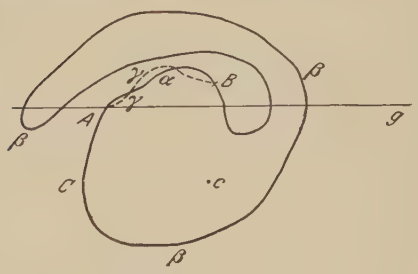


Fig. 6.

Beweis. Wir benutzen im folgenden als Kriterium dafür, daß ein Punkt $P$ im Innern von $C$ liegt, die Tatsache, daß *seine Ordnung $O(P, C)$ in bezug auf die Kurve $C$ dann und nur dann gleich $\pm 1$ ist, wenn $P$ sich im Innern von $C$ befindet*[22]). Dabei versteht man unter der Ordnung $O(P, C)$ des Punktes $P$ in bezug auf die geschlossene Jordankurve $C$ den $\frac{1}{2\pi}$-fachen Zuwachs des Winkels $\theta(Q)$, den der von $P$ nach einem beliebigen Punkte $Q$ von $C$ gezogene Radiusvektor $\overrightarrow{PQ}$ mit der positiven reellen Achse (oder allgemeiner irgendeiner festen Geraden) bildet, bei einem vollen Umlauf des Punktes $Q$ längs der Kurve $C$. Bezeichnet man also die Änderung des Winkels $\theta(Q)$ bei dem genannten Umlauf von $Q$ längs $C$ mit $\Delta\theta$, so ist

$$O(P, C) = \frac{\Delta\theta}{2\pi}.$$

Wir denken uns nun den Radiusvektor $r$ vom Punkte $c$ nach dem Punkte $A$ gezogen; $\theta(A)$ sei der Winkel, den dieser Radiusvektor mit der positiven reellen Achse bildet, und zwar werde $\theta(A)$ durch die Bedingung $0 \leqq \theta(A) < 2\pi$ normiert. Der Endpunkt des Radiusvektors $r$ möge nun stetig von $A$ aus die Kurve $C$ durchlaufen. Dabei ändert sich der Winkel $\theta$, den $r$ mit der positiven reellen Achse bildet, stetig mit dem Endpunkt $Q$, und wir denken uns diesen Winkel $\theta = \theta(Q)$ vom Werte $\theta(A)$ aus stetig fortgesetzt. Nach der Durchlaufung des Bogens $\alpha$ von $A$ nach $B$ möge der Winkel $\theta(Q)$ im Punkte $B$ auf den Wert $\theta(B)$ und nach dem vollen Umlauf von $C$ auf den Wert $\theta'(A)$ angewachsen sei. Da $c$ im Innern von $C$ liegt, ist $\theta'(A) = \theta(A) \pm 2\pi$. Ferner ist $|\theta(B) - \theta(A)| < \pi$, da ja $c$ und der (offene) Bogen $\alpha$ auf verschiedenen Seiten von $g$ liegen.

[22]) Vgl. z. B. B. von Kerékjártó loc. cit. S. 82f.

Nun denken wir uns die Kurve $\Gamma$ zuerst von $A$ nach $B$ längs $\gamma$ und dann von $B$ nach $A$ längs $\beta$ durchlaufen. Im Punkte $A$ bildet (bei der obigen Normierung) der von $c$ nach $A$ gezogene Radiusvektor $r$ mit der positiven reellen Achse gleichfalls den Winkel $\theta(A)$. Nach der Durchlaufung von $\gamma$ möge der stetig von $\theta(A)$ aus fortgesetzte Winkel $\theta = \theta(Q)$, den der von $c$ nach dem Punkte $Q$ von $C$ gezogene Radiusvektor $r = r(Q)$ mit der positiven reellen Achse bildet, auf den Wert $\theta^*(B)$ angewachsen sein, nach dem vollen Umlauf von $\Gamma$ möge sein Wert $\theta^*(A)$ sein. Es ist

$$\theta^*(B) - \theta(A) = [\theta(B) - \theta(A)] + 2\pi n,$$

wo $n$ eine ganze Zahl $\gtrless 0$ ist. Es muß notwendig $n = 0$ sein. Denn da $c$ und der Bogen $\gamma$ auf verschiedenen Seiten von $g$ liegen, ist dieser Winkel seinem absoluten Betrage nach sicher $< \pi$, und da auch $|\theta(B) - \theta(A)| < \pi$ ist, ist

$$\theta^*(B) - \theta(A) = \theta(B) - \theta(A), \quad \theta^*(B) = \theta(B).$$

Da nun $\Gamma$ den Bogen $\beta$ mit $C$ gemeinsam hat, ist

$$\theta^*(A) - \theta^*(B) = \theta'(A) - \theta(B),$$

und hieraus folgt wegen $\theta^*(B) = \theta(B)$

$$\theta^*(A) = \theta'(A) = \theta(A) \pm 2\pi, \quad \frac{\theta^*(A) - \theta(A)}{2\pi} = \pm 1,$$

w. z. b. w.

6. Wir werden im folgenden unsere Sätze über das Verhalten des Differenzenquotienten der Abbildungsfunktion in einem Randpunkte $P$ für Gebiete $G$ formulieren, die von einer geschlossenen Jordankurve $C$ begrenzt werden. Sie gelten dann aber auch für wesentlich allgemeinere Gebiete, nämlich für beliebige einfach zusammenhängende Gebiete, deren Rand einen *„freien“* Jordanbogen enthält, wenn der Randpunkt $P$ innerer Punkt eines solchen Bogens ist. (Dabei verstehen wir unter einem „freien“ Randbogen einen solchen, der sich durch einen geeigneten Querschnitt von $G$ so zu einer geschlossenen Jordankurve ergänzen läßt, daß ihr Inneres ganz $G$ angehört.) Dies ergibt sich sofort aus dem folgenden

Hilfssatz 4. *Sind $G$ und $G_1$ zwei einfach zusammenhängende Gebiete, deren Ränder einen freien Jordanbogen $C'$ gemeinsam haben, und stoßen die beiden Gebiete von derselben Seite an $C'$ an, bilden ferner $\varphi(w)$ bzw. $\varphi_1(w)$ $G$ bzw. $G_1$ auf $|z| < 1$ ab, so konvergiert für einen festen inneren Punkt $w_1$ von $C'$ der Quotient*

$$\frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1)} \tag{1,4}$$

*gegen eine von 0 verschiedene Konstante $c$, wenn $w$ auf $C'$ oder aus der Teilumgebung von $C'$, die dem Durchschnitt von $G$ und $G_1$ angehört gegen $w_1$ strebt. Es ist also*

$$\frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{w-w_1} \sim c\,\frac{\varphi_1(w)-\varphi_1(w_1)}{w-w_1}.$$

*Insbesondere gibt es also auch zwei Konstanten $c_1$ und $c_2$, so daß*

$$0 < c_1 \leqq \left|\frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{\varphi_1(w)-\varphi_1(w_1)}\right| \leqq c_2$$

*für solche $w$ gilt.*

Der Inhalt dieses Satzes kann etwas unpräzis auch so wiedergegeben werden: Das Verhalten des Differenzenquotienten $\frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{w-w_1}$ hängt nur von der Umgebung des betrachteten Randpunktes ab, nicht aber von der Beschaffenheit der übrigen Teile von $G$.

Beweis. Zum Beweise darf man annehmen, daß $G_1$ im Innern von $G$ (bis auf den Bogen $C'$) liegt, da man sonst beide Gebiete $G$ und $G_1$ mit einem dritten in beiden gelegenen vergleichen könnte. — Bei der Abbildung von $G$ vermittels $z=\varphi(w)$ geht dann $G_1$ in ein im Innern von $|z|=1$ liegendes Gebiet $D_1$ über, das einen Bogen $\gamma$, das Bild von $C'$, mit der Peripherie gemeinsam hat. Man beachte nun, daß man die Abbildung von $G_1$ auf den Einheitskreis $|\zeta|<1$ auch so durchführen kann, indem man $G_1$ vermittels $z=\varphi(w)$ auf $D_1$ und $D_1$ vermittels $\zeta=g(z)$ auf $|\zeta|<1$ passend abbildet. $g(z)$ ist dann noch auf jedem festen inneren Teilbogen $\gamma'$ von $\gamma$ nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip analytisch und von 0 verschieden. Wegen $\zeta=\varphi_1(w)=g(\varphi(w))$, $z_1=\varphi(w_1)$ ist

$$\frac{\varphi_1(w)-\varphi_1(w_1)}{\varphi(w)-\varphi(w_1)} = \frac{g(z)-g(z_1)}{z-z_1},$$

und da der Quotient $\frac{g(z)-g(z_1)}{z-z_1}$ mit $z \to z_1$ gegen eine von 0 verschiedene Zahl konvergiert, folgt hieraus die obige Behauptung.

7. Es seien nun $G$ und $G_1$ zwei von den Jordankurven $C$ und $C_1$ begrenzte Gebiete, wobei $C_1$ bis auf einen gemeinsamen Randbogen $C'$ im Innern von $G$ liegt. Für das Folgende ist es von Wichtigkeit, genauer zu wissen, in welcher Weise die eben erhaltenen Konstanten $c_1$ und $c_2$ von den Kurven $C$ und $C_1$ abhängen, um für den Quotienten (1, 4) eine gleichmäßige Abschätzung auch für den Fall angeben zu können, daß es sich nicht nur um ein festes Paar solcher Kurven $C$ und $C_1$ handelt, sondern um eine Schar von derartigen Kurvenpaaren $C$ und $C_1$. In dieser Richtung beweisen wir den folgenden Satz (den wir gleich in der für die spätere Anwendung geeigneten Form aussprechen).

Hilfssatz 5. *Es sei* $w = f_1(z)$ *in* $|z| < 1$ *regulär, in* $|z| \leqq 1$ *stetig, und es möge* $f_1(z)$ *die Peripherie des Kreises in eine geschlossene Jordankurve* $C_1$ *überführen. Es sei* $\gamma$ *ein den Punkt* $z = 1$ *im Innern enthaltender Bogen von* $|z| = 1$. *Sein Bild in der* $w$*-Ebene, das ein Teilbogen von* $C_1$ *ist, sei mit* $C'$ *bezeichnet. Ferner möge eine volle Kreisscheibe mit dem Radius* $d > 0$ *um* $f_1(0)$ *als Mittelpunkt im Innern von* $C_1$ *Platz haben, und* $C_1$ *liege selbst innerhalb eines Kreises* $k_D$ *mit dem Radius* $D$ *um* $f_1(0)$. $C$ *sei eine zweite im Innern von* $k_D$ *verlaufende Jordankurve, die den Bogen* $C'$ *mit* $C_1$ *gemeinsam hat und sonst* $C_1$ *im Innern enthält.* $w = f(z)$ *bilde* $|z| < 1$ *so auf das Innere von* $C$ *ab, daß* $f(0) = f_1(0)$ *und* $f(1) = f_1(1) = w_1$ *ist.*

*Ist* $z = \varphi_1(w)$ *die zu* $w = f_1(z)$, $z = \varphi(w)$ *die zu* $w = f(z)$ *inverse Funktion, so gibt es eine nur von* $\gamma, d, D$, *sonst aber von den Kurven* $C, C_1$ *bzw. den Funktionen* $f, f_1$ *nicht weiter abhängige Konstante* $c_2 \geqq 1$, *so daß für* $w \to w_1$ ($w$ *aus dem Innern von* $C_1$ *oder auf* $C_1$)

$$1 \leqq \lim_{w \to w_1} \left| \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1)} \right| \leqq c_2$$

*gilt.*

Beweis. Wir schicken die folgende Bemerkung voraus: Es sei $G$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der $w$-Ebene, das die volle Kreisscheibe um den in $G$ liegenden Punkt $w = a$ mit dem Radius $d > 0$ enthält und selber ganz innerhalb des Kreises mit dem Radius $D$ um $w = a$ liegt. Bildet $z = \Phi(w)$ $G$ so auf $|z| < 1$ ab, daß $w = a$ in $z = 0$ übergeht, so ist für alle $w$ in $G$

$$\left| \frac{w-a}{D} \right| \leqq |\Phi(w)| \leqq \left| \frac{w-a}{d} \right| . \tag{1,5}$$

Um die rechte der in (1,5) steckenden Ungleichungen einzusehen, beachte man, daß, $w' = \frac{w-a}{d}$ gesetzt, $\psi(w') = \Phi(dw' + a) = \Phi(w)$, in $|w'| < 1$ regulär, absolut $< 1$ ist und daß ferner $z = \psi(w')$ im Nullpunkt verschwindet. Daher ist nach dem Schwarzschen Lemma $|\Phi(w)| = |\psi(w')| \leqq |w'| = \frac{|w-a|}{d}$, und da für $|w - a| > d$, $\left|\frac{w-a}{d}\right| > 1$ ist und $|\Phi(w)|$ in $G < 1$ ist, gilt diese Ungleichung für alle $w$ in $G$. Um die linke der in (1,5) steckenden Ungleichungen zu beweisen, hat man nur das Schwarzsche Lemma auf die zu $z = \Phi(w)$ inverse Funktion $w = F(z)$ oder genauer auf die Funktion $w' = \frac{F(z)-a}{D}$ anzuwenden. Diese Funktion ist in $z < 1$ regulär und absolut kleiner als 1 und verschwindet in $z = 0$. Daher gilt

$$\frac{|F(z)-a|}{D} \leqq |z| = |\Phi(w)|,$$

$$|\Phi(w)| \geqq \frac{|w-a|}{D}.$$

Aus dieser Bemerkung folgt nun zunächst, daß die Werte der Funktion $w = f_1(z)$ für $1 \geqq |z| \geqq \frac{1}{2}$ sicher außerhalb des Kreises mit dem Radius $\frac{d}{2}$ um $w = f(0)$ liegen. Denn es ist für $|z| = |\varphi_1(w)| \geqq \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \leqq |\varphi_1(w)| \leqq \frac{|w - f(0)|}{d},$$

also $|w - f(0)| \geqq \frac{d}{2}$. Wir wählen einen $z = 1$ als Mittelpunkt enthaltenden Teilbogen $\gamma_z$ von $\gamma$ so, daß das von $\gamma_z$ und dem durch die Endpunkte von $\gamma_z$ um $z = 1$ beschriebenen innerhalb von $|z| < 1$ liegenden Kreisbogen $\mathfrak{K}$ begrenzte Kreisbogenzweieck $Z_z$ ganz außerhalb des Kreises $|z| = \frac{1}{2}$ liegt. Das Bild des Innern von $Z_z$ bei der Abbildung durch $f_1(z)$ in der $w$-Ebene ist dann ein von einer Jordankurve $Z_w$ umschlossenes Gebiet, das ganz außerhalb des Kreises mit dem Radius $\frac{d}{2}$ um $w = f(0)$ liegt.

Bei der Abbildung des Inneren von $C$ vermittels $u = \varphi(w)$ geht das Innere von $C_1$ in ein von einer geschlossenen Jordankurve $\Gamma$ begrenztes Gebiet über. $Z_w$ entspricht dabei einer geschlossenen, nirgends außerhalb von $\Gamma$ verlaufenden Jordankurve $Z_u$, die einen (von den Funktionen $f_1$ und $f$ abhängigen) Bogen $\gamma_u$ mit der Peripherie gemeinsam hat. $\gamma_u$ enthält $u = 1$ im Innern. Wir behaupten, $Z_u$ verläuft außerhalb des Kreises mit dem Radius $\frac{d}{2D}$ um $u = 0$. Dies ergibt sich aus der links in (1, 5) stehenden Ungleichung, angewandt auf die Funktion $z = \varphi(w)$ (für $\Phi(w)$). Denn da $Z_w$ außerhalb des Kreises $|w - f(0)| = \frac{d}{2}$ liegt, ist für Punkte $w$ aus $Z_w$ nach dieser Ungleichung

$$\frac{d}{2D} \leqq |\varphi(w)|.$$

Jetzt beachte man, daß man die Funktion $z = \varphi_1(w)$ (analog wie im Beweise des obigen Hilfssatzes) auch so gewinnen kann, daß man das Innere von $\Gamma$ auf $|z| < 1$ vermittels $z = \Psi(u)$ so abbildet, daß $\Psi(0) = 0$, $\Psi(1) = 1$ ist und die Funktion $z = \Psi(\varphi(w))$ bildet. Dann ist

$$\frac{\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1)}{\varphi(w) - \varphi(w_1)} = \frac{\Psi(u) - \Psi(1)}{u - 1}.$$

Um den Quotienten auf der rechten Seite dieser Gleichung absolut abzuschätzen, wenden wir wieder wie oben das Spiegelungsprinzip an. Es sei $u = \psi(z)$ die zu $z = \Psi(u)$ inverse Funktion. $u = \psi(z)$ bildet den (festen, d. h. von $f$ und $f_1$ unabhängigen) Bogen $\gamma_z$ auf den Bogen $\gamma_u$, das Innere des Kreisbogenzweiecks $Z_z$ auf das Innere der Jordankurve $Z_u$ ab. Spiegeln wir nun $Z_z$ an $\gamma_z$, so erhalten wir ein Kreisbogenzweieck $Z_z'$ das längs $\gamma_z$ mit $Z_z$ zusammenstößt und mit diesem zusammen ein Kreisbogenzweieck $(Z_z + Z_z')$ bildet. Im Innern dieses neuen Kreisbogenzweiecks ist $u = \psi(z)$

regulär. Das durch $u = \psi(z)$ vermittelte Bild des Innern von $Z_z'$ in der $u$-Ebene ist das Innere der durch Spiegelung von $Z_u$ an $\gamma_u$ entstehenden Jordankurve $Z_u'$, und das Bild des Innern von $(Z_z + Z_z')$ ist das Innere derjenigen Jordankurve, die entsteht, wenn man von $Z_u$ und $Z_u'$ den Kreisbogen $\gamma_u$ entfernt. Dieses Bildgebiet ist jedenfalls beschränkt, und zwar liegt es, da $Z_u$, wie oben gesagt, außerhalb des Kreises mit dem Radius $\frac{d}{2D}$ um $u = 0$ verläuft, ganz innerhalb des Kreises mit dem Radius $\frac{2D}{d}$ um $u = 0$. Es gibt nun eine nur von $\gamma_z$, also nur von $\gamma$ abhängige Zahl $\varrho > 0$, so daß $\psi(z)$ in $|z-1| \leqq \varrho$ regulär ist. Daher ist nach der Cauchyschen Koeffizientenabschätzung

$$(1,6) \qquad |\psi'(z)| \leqq \frac{2D}{d} \cdot \frac{1}{\frac{\varrho}{2}} = \frac{2K}{\varrho}, \qquad K = \frac{2D}{d}, \qquad |z-1| \leqq \frac{\varrho}{2}.$$

Um eine Abschätzung für $|\psi'(1)$ nach unten herzuleiten, beachte man, daß wegen $|\psi(z)| \leqq |z|$ für positive $z < 1$ [23])

$$\frac{|\psi(1) - \psi(z)|}{|1-z|} = \frac{|1-\psi(z)|}{1-z} \geqq \frac{1-|z|}{1-z} = \frac{1-z}{1-z} = 1$$

ist. Da $\psi(z)$ in $z = 1$ regulär ist, folgt daraus mit $z \uparrow 1 \; |\psi'(1)| \geqq 1$, und hieraus ergibt sich dann in Verbindung mit (1, 6) die Behauptung des Hilfssatzes.

## § 2.

## Weitere Hilfssätze.

8. Hilfssatz 6. *Es sei $k$ der Kreis $|w-a| \leqq \varrho$, $w_1 = a + \varrho e^{i\tau_1}$ sei ein Punkt der Peripherie von $k$. Ferner sei $c$ ein Punkt im Innern von $k$ im Abstande $\sigma\varrho$ von $w = w_1$, $0 < \sigma < 1$. Es werde $|c-a| = \lambda\varrho$ gesetzt, und $\chi$ $(\geqq 0)$ bezeichne den Winkel $caw_1$ im Dreieck $caw_1$* (siehe Fig. 7). *Bildet man dann $k$ vermittels*

$$\zeta = \frac{\frac{w-a}{\varrho} - \frac{c-a}{\varrho}}{1 - \frac{w-a}{\varrho} \cdot \frac{\overline{c-a}}{\varrho}} e^{i\gamma} = \frac{(w-c)\varrho e^{i\gamma}}{\varrho^2 - (w-a)(\overline{c-a})}$$

($\gamma$ reell)

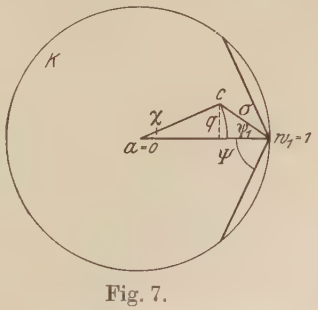


Fig. 7.

*so auf den Einheitskreis ab, daß $w = c$ in $\zeta = 0$ übergeht, so gilt für die Bildlänge $\alpha_k'$ eines an $w_1$ anstoßenden Bogens der Länge $\varrho\alpha$, $0 \leqq \alpha \leqq \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$,*

---

[23]) Vgl. für diese auf Herrn K. Löwner zurückgehende Überlegung L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie II, S. 124.

*der Kreisperipherie*

$$(2,1) \qquad \alpha_k' \geqq \frac{1-\lambda^2}{(1-\lambda)^2+4\lambda\sin^2\frac{\alpha_0+\chi}{2}}\cdot\frac{\alpha\varrho}{\varrho} = A\frac{\alpha\varrho}{\varrho}.$$

Zusatz. *Der Punkt $c$ liege im Innern des Winkelraumes $W$ der Öffnung $2\Psi$, $0 \leqq \Psi < \frac{\pi}{2}$, der von zwei von $w_1$ ausgehenden symmetrisch zum Radius in $w_1$ verlaufenden Kreissehnen gebildet wird. Macht man dann $\sigma$ von $\alpha_0$ abhängig, indem man für hinreichend kleine $\alpha_0$ $\sigma = m\alpha_0^{2/3}(1+\vartheta(\alpha_0))$ setzt, wo $m$ eine beliebige positive Konstante und $\vartheta(\alpha_0)$ eine mit $\alpha_0 \to 0$ gleichfalls gegen 0 konvergierende Funktion von $\alpha_0$ ist, so gilt gleichmäßig für alle oben definierten Punkte $c$ in $k$ und $W$ mit dem Abstand $R = \sigma\varrho$ von $w_1$*

$$\lim_{\alpha_0 \to 0} A\sigma \geqq 2\cos\Psi,$$

*d. h. zu jedem $\varepsilon$ mit $0 < \varepsilon < 1$ gibt es ein von $\varepsilon$ — sowie $\Psi$, $m$ und der Funktion $\vartheta(\alpha_0)$ — abhängiges $\delta(\varepsilon)$, so daß für alle $\alpha_0 \leqq \delta(\varepsilon)$ und für alle diese Punkte $c$ mit dem Abstande $R$ von $w_1$*

$$A\sigma \geqq 2(1-\varepsilon)\cos\Psi, \qquad 0 < \varepsilon < 1,$$

*gilt.*

Bemerkung. Dieser Zusatz bleibt, wie leicht zu sehen ist, auch noch richtig, wenn der Punkt $c$ im Abstande $R = \sigma\varrho$ von $w_1$ nicht den Winkelraum $W$ der Öffnung $2\Psi$, sondern in dem analog gebildeten Winkelraum $W'$ der Öffnung $2(\Psi+\omega)$, $\omega > 0$, angenommen wird, wo $\omega$ nur Funktion von $\alpha_0$ ist und mit $\alpha_0 \to 0$ selber gegen 0 konvergiert. ($\delta(\varepsilon)$ hängt dann auch noch von $\omega(\alpha_0)$ ab.)

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varrho = 1$, $\tau_1 = 0$, $\gamma = 0$. Man beachte nun, daß ($w - a = e^{i\vartheta}$ gesetzt)

$$(2,2) \qquad \alpha_k' = \left|\int_0^{\pm\alpha}\left|\frac{d\zeta}{dw}\right| d\vartheta\right| = \int \frac{1-|c-a|^2}{|1-(w-a)(\overline{c-a})|^2}\, d\vartheta$$

ist. Wir schätzen den Nenner des Integranden nach oben für $|\vartheta| \leqq \alpha \leqq \alpha_0$ ab. Es ist, wegen $c - a = \lambda e^{\pm i\chi}$

$$|1-(w-a)(\overline{c-a})|^2 = 1+\lambda^2-2\lambda\cos(\vartheta\mp\chi) = (1-\lambda)^2+4\lambda\sin^2\frac{\vartheta\mp\chi}{2}.$$

Wegen $|\vartheta| \leqq \alpha \leqq \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq \chi < \frac{\pi}{2}$ [24]) ist weiter

$$|1-(w-a)(\overline{c-a})|^2 \leqq (1-\lambda)^2+4\lambda\sin^2\frac{\alpha_0+\chi}{2}.$$

[24]) Wegen $\sigma < 1$.

(Zwischen $\lambda$ und $\sigma$ besteht dabei die Relation

$$\sigma^2 = 1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\chi = (1-\lambda)^2 + 4\lambda\sin^2\frac{\chi}{2}. \tag{2,3}$$

Daher folgt aus (2,2)

$$\alpha_k' \geqq \frac{1-\lambda^2}{(1-\lambda)^2 + 4\lambda\sin^2\dfrac{\alpha_0+\chi}{2}}\,\alpha,$$

w. z. b. w.

Beweis des Zusatzes. Es ist nach (2,1), (2,3)

$$\sigma A = \frac{(1-\lambda^2)\sqrt{(1-\lambda)^2 + 4\lambda\sin^2\dfrac{\chi}{2}}}{(1-\lambda)^2 + 4\lambda\sin^2\dfrac{\alpha_0+\chi}{2}} = \frac{(1+\lambda)(1-\lambda)^2\sqrt{1+\dfrac{4\lambda\sin^2\dfrac{\chi}{2}}{(1-\lambda)^2}}}{(1-\lambda)^2\left(1+\dfrac{4\lambda\sin^2\dfrac{\alpha_0+\chi}{2}}{(1-\lambda)^2}\right)},$$

$$\sigma A = \frac{(1+\lambda)\sqrt{1+\dfrac{4\lambda\sin^2\dfrac{\chi}{2}}{(1-\lambda)^2}}}{1+\dfrac{4\lambda\sin^2\dfrac{\alpha_0+\chi}{2}}{(1-\lambda)^2}}. \tag{2,4}$$

Aus der Figur 7 folgt leicht ($\psi_1$ ist der Winkel $c\,w_1\,a$ im Dreieck $c\,w_1\,a$)

$$\sin\chi = \frac{q}{\lambda} \geqq \frac{1-\lambda}{\lambda}\operatorname{tg}\psi_1 \tag{2,5}$$

und daher

$$\sin\frac{\chi}{2} = \frac{\sin\chi}{2\cos\dfrac{\chi}{2}} \geqq \frac{\sin\dfrac{\chi}{2}}{2} \geqq \frac{1-\lambda}{2\lambda}\operatorname{tg}\psi_1.$$

Somit ergibt sich für den Zähler $Z$ in (2,4)

$$Z \geqq (1+\lambda)\sqrt{1+\frac{4\lambda(1-\lambda)^2\operatorname{tg}^2\psi_1}{4\lambda^2(1-\lambda)^2}} \tag{2,6}$$

$$= (1+\lambda)\sqrt{1+\frac{\operatorname{tg}^2\psi_1}{\lambda}} \geqq (1+\lambda)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi_1} = \frac{1+\lambda}{\cos\psi_1}.$$

Bei der Abschätzung des Nenners in (2,4) gehen wir so vor: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ mögen im folgenden Größen bezeichnen, die — bei festem $\Psi$, $m$ und fester Funktion $\vartheta(\alpha_0)$ — gleichmäßig in $\psi_1$ mit $\alpha_0 \to 0$ gegen 0 konvergieren. Dann folgt wegen

$$\lambda^2 = 1 + \sigma^2 - 2\sigma\cos\psi_1, \qquad 1-\lambda^2 = 2\sigma\cos\psi_1 - \sigma^2$$

und wegen $\cos\psi_1 \geqq \cos\Psi > 0$ für hinreichend kleines $\alpha_0$

$$1-\lambda = \sigma(2\cos\psi_1 - \sigma)\frac{1}{1+\lambda} = \sigma(1+\varepsilon_1)\cos\psi_1, \qquad 1+\varepsilon_1 > 0.$$

Daher wird (vgl. (2, 5))

$$\sin\chi = \frac{q}{\lambda} = \frac{\sigma \sin\psi_1}{\lambda} = (1-\lambda)\cdot\frac{\operatorname{tg}\psi_1}{1+\varepsilon_1},$$

$$\chi = (1+\varepsilon_2)(1-\lambda)\operatorname{tg}\psi_1$$

und somit

$$\alpha_0 + \chi = \alpha_0 + (1+\varepsilon_2)(1-\lambda)\operatorname{tg}\psi_1,$$

$$\sin\frac{\alpha_0+\chi}{2} = \frac{1+\varepsilon_3}{2}\left(\alpha_0 + (1+\varepsilon_2)(1-\lambda)\operatorname{tg}\psi_1\right),$$

$$\begin{aligned}
\frac{4\lambda\sin^2\frac{\alpha_0+\chi}{2}}{(1-\lambda)^2} &= (1+\varepsilon_4)\left(\frac{\alpha_0}{1-\lambda} + (1+\varepsilon_2)\operatorname{tg}\psi_1\right)^2 \\
&= (1+\varepsilon_4)\left(\frac{\alpha_0}{\sigma(1+\varepsilon_1)\cos\psi_1} + (1+\varepsilon_2)\operatorname{tg}\psi_1\right)^2 \\
&\leqq (1+|\varepsilon_4|)\left(\frac{\sigma^{3/2}}{m^{3/2}\cdot(1+\vartheta)^{3/2}\,\sigma(1+\varepsilon_1)\cos\psi_1} + (1+\varepsilon_2)\operatorname{tg}\psi_1\right)^2 \\
&= (1+|\varepsilon_4|)\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{m^{3/2}(1+\vartheta)^{3/2}(1+\varepsilon_1)\cos\psi_1} + (1+\varepsilon_2)\operatorname{tg}\psi_1\right)^2.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also für den Nenner $N$ in (2, 4) die Abschätzung

$$N \leqq 1 + \operatorname{tg}^2\psi_1(1+\varepsilon_5) + C\sqrt{\sigma} \leqq \frac{1}{\cos^2\psi_1} + \varepsilon_5\operatorname{tg}^2\Psi + C\sqrt{\sigma},$$

wo $C$ bei festem $m$ und fester Funktion $\vartheta(\alpha_0)$ eine nur von $\Psi$ abhängige Konstante ist, wenn $\alpha_0$ hinreichend klein angenommen wird. Hieraus und aus (2, 6) ergibt sich unmittelbar die Behauptung des Zusatzes.

9. Hilfssatz 7. *Es sei $k$ der Kreis $|w-a| = \varrho$, $w_1 = a + \varrho e^{i\tau_1}$ sei ein Punkt der Peripherie von $k$. Ferner bezeichne $W$ den von zwei von $w = w_1$ ausgehenden symmetrisch zur Außennormalen in $w_1$ verlaufenden Strahlen gebildeten Winkelraum der Öffnung $2\Psi$, $0 \leqq \Psi < \frac{\pi}{2}$. $c$ sei ein Punkt in $W$ (mit Rand) im Abstande $\sigma\varrho$ von $w_1$, $\sigma > 0$, so daß also $c$ außerhalb von $k$ liegt. Bildet man dann das Äußere des Kreises $|w-a| = \varrho$ vermittels*

$$(2,7)\qquad \zeta = -\frac{\frac{w-a}{\varrho} - \frac{c-a}{\varrho}}{1 - \frac{w-a}{\varrho}\cdot\frac{\overline{c-a}}{\varrho}}\, e^{i\gamma} = \frac{(w-c)\varrho\, e^{i\gamma}}{\varrho^2 - (w-a)(\overline{c-a})} \qquad (\gamma \text{ reell})$$

*auf den Einheitskreis ab, so daß $w = c$ in $\zeta = 0$ übergeht, so gilt für die Bildlänge $\alpha_k'$ eines Bogens der Länge $\alpha\varrho$ der Kreisperipherie*

$$\alpha_k' \leqq \frac{(2+\sigma)^2}{2\sigma\cos\Psi}\,\frac{\alpha\varrho}{\varrho} = A_1\frac{\alpha\varrho}{\varrho}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varrho = 1$, $\tau_1 = 0$, $\gamma = 0$. Wegen (2, 7) ist dann

$$\left|\frac{d\zeta}{dw}\right| = \frac{|c-a|^2 - 1}{|1-(w-a)(\overline{c-a})|^2},$$

und daher ergibt sich durch Integration (ähnlich wie oben)

$$\alpha_k' \leqq \frac{|c-a|^2-1}{(|c-a|-1)^2}\alpha = \frac{|c-a|+1}{|c-a|-1}\alpha.$$

Nun ist $|c-a| = \sqrt{1+\sigma^2+2\sigma\cos\psi_1}$ (siehe Fig. 8). Daraus folgt

$$\frac{|c-a|+1}{|c-a|-1} = \frac{\sqrt{1+\sigma^2+2\sigma\cos\psi_1}+1}{\sqrt{1+\sigma^2+2\sigma\cos\psi_1}-1} = \frac{\left(\sqrt{1+\sigma^2+2\sigma\cos\psi_1}+1\right)^2}{\sigma^2+2\sigma\cos\psi_1} \leqq \frac{(2+\sigma)^2}{2\sigma\cos\psi_1} \leqq \frac{(2+\sigma)^2}{2\sigma\cos\Psi},$$

und daher, wie behauptet,

$$\alpha_k' \leqq \frac{(2+\sigma)^2}{2\sigma\cos\Psi}\alpha.$$

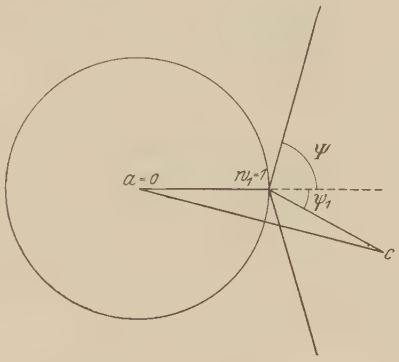


Fig. 8.

10. Wir leiten nun noch zwei Hilfssätze her, in denen wir die folgende Aufgabe behandeln. Es sei $C$ eine geschlossene Jordankurve, $\alpha$ ein fester Bogen von $C$. Wir bilden das Innere von $C$ auf den Einheitskreis ab und zwar so, daß einmal ein im Innern von $C$ liegender Punkt $w = w_0$ in den Nullpunkt, und ein anderes Mal ein in $C$ liegender Punkt $w = c + w_0$ in den Nullpunkt übergeht. Wir fragen dann, wie sich die konforme Länge von $\alpha$ beim Übergang von einer Abbildung zur anderen ändert, insbesondere auch dann, wenn $c$ gegen den Rand konvergiert und die Größe von $\alpha$ in bestimmter Weise von $c$ abhängig gemacht wird.

Hilfssatz 8. *Es sei $C$ eine geschlossene Jordankurve in der $w$-Ebene, $\alpha$ ein Bogen von $C$. $z = \varphi(w)$ bilde das Innere von $C$ so auf $|z| < 1$ ab, daß $w = w_0$ im Innern von $C$ in $z = 0$ übergeht; $\zeta = \Phi(w)$ vermittele die Abbildung des Inneren von $C$ auf $|\zeta| < 1$ so, daß $w = c + w_0$ $\zeta = 0$ entspricht. Hat das Bild von $\alpha$ bei der ersten Abbildung die Länge $\alpha'$, bei der zweiten die Länge $\alpha''$, so ist*

$$\alpha' \frac{1-|\varphi(c)|}{1+|\varphi(c)|} \leqq \alpha'' \leqq \frac{1+|\varphi(c)|}{1-|\varphi(c)|}\alpha'.$$

Der Beweis ergibt sich einfach aus der Bemerkung, daß man $\Phi(w)$ aus $\varphi(w)$ gewinnen kann, indem man den Kreis $|z| < 1$ auf $|\zeta| < 1$ vermittels

$$\zeta = \frac{z-b}{1-z\bar{b}}e^{i\gamma}, \quad b = \varphi(c), \quad \gamma \text{ reell},$$

abbildet, so daß $z=0$ in $\zeta=b$ übergeht. Dann ist $\Phi(w)=\dfrac{\varphi(w)-\varphi(c)}{1-\varphi(w)\,\overline{\varphi(c)}}\,e^{i\gamma}$. Daher ist (vgl. den Beweis von Hilfssatz 6)[25])

$$\alpha''=\left|\int\limits_{(\alpha')}\frac{1-|b|^2}{|1-z\bar{b}|^2}\,d\vartheta\right|\leqq\frac{1-|b|^2}{(1-|b|)^2}\,\alpha'=\frac{1+|\varphi(c)|}{1-|\varphi(c)|}\,\alpha',$$

$$\alpha''\geqq\frac{1-|b|^2}{(1+|b|)^2}\,\alpha'=\frac{1-|\varphi(c)|}{1+|\varphi(c)|}\,\alpha'.$$

Hilfssatz 9. *Es sei $C$ eine geschlossene Jordankurve, $\overset{\frown}{PQ}=\alpha$ ein Bogen von $C$. $z=\varphi(w)$ bilde das Innere von $C$ so auf $|z|<1$ ab, daß $w=w_0$ (im Innern von $C$) in $z=0$, $P(w=w_1)$ in $z=1$ und $\alpha$ in einen Bogen der Länge $\alpha'$ der Kreisperipherie übergeht. $\zeta=\Phi(w)=\dfrac{\varphi(w)-\varphi(c)}{1-\varphi(w)\,\overline{\varphi(c)}}$ vermittele die Abbildung des Innern von $C$ auf $|\zeta|<1$, so daß $w=c\neq w_0$ $\zeta=0$ und $\alpha$ einem Kreisbogen der Länge $\alpha''$ entspricht. Der Punkt $P$ werde als fest, der Punkt $Q$ als variabel angenommen. Ferner möge für $Q\to P$ auch $c\to P$ konvergieren, und zwar so, daß der Bildpunkt $b=\varphi(c)=|b|e^{i\chi}$ von $c$ in der $z$-Ebene innerhalb des Winkelraumes*

$$\pi-\tau_1\leqq\arg(z-1)\leqq\pi+\tau_1,\qquad 0<\tau_1<\frac{\pi}{2},$$

*bleibt. Schließlich mögen $Q$ und $c$ so gegen $P$ gehen, daß für hinreichend kleine $\overline{PQ}$ (und $\overline{Pc}$) $\alpha''\leqq\delta<\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\tau_1\right)$ ist. Dann ist für genügend kleine $\overline{PQ}$ und $\overline{Pc}$*

$$\alpha'\leqq\frac{1-|b|}{2\,|b|\cos^2\left(\tau_1+\dfrac{\delta+|\chi|}{2}\right)}\,\alpha'',$$

$$b=\varphi(c)=|b|e^{i\chi}.$$

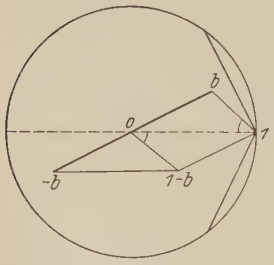


Fig. 9.

Beweis. Es ist

$$\zeta_1=\Phi(w_1)=\frac{1-\varphi(c)}{1-\overline{\varphi(c)}}=\frac{1-b}{1-\bar{b}}$$

und

$$\arg\Phi(w_1)=\arg\frac{1-b}{1-\bar{b}}=\vartheta_1.$$

Aus der Figur 9 erkennt man, daß wegen unserer Annahme $|\vartheta_1|\leqq 2\tau_1<\pi$ ist[26]).

---

[25]) Das Zeichen $\int\limits_{(\alpha')}$ soll bedeuten, daß über den Bildbogen von $\alpha$ in der $z$-Ebene von der Länge $\alpha'$ integriert werden soll.

[26]) Bei geeigneter Zählung des $\arg\dfrac{1-b}{1-\bar{b}}$. In der Figur 9 ist das Viereck mit den Endpunkten $1$, $b$, $0$, $1-b$ ein Parallelogramm, bei dem die Seite $0\ldots 1-b$ parallel und gleich der Seite $b\ldots 1$ ist.

Wir haben nun, da $z = \varphi(w) = \frac{\zeta + b}{1 + \bar{b}\zeta}$, $\zeta = \Phi(w)$, ist,

$$\alpha' = \left| \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_1 \pm \alpha''} \frac{1 - |b|^2}{|1 + \bar{b}\zeta|^2} \, d\vartheta \right|$$

nach oben abzuschätzen. Zu diesem Zwecke wählen wir $\overline{PQ}$ so klein, daß bereits $|\alpha''| \leqq \delta < \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \tau_1\right)$ und $|\arc b| = |\chi| \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \tau_1\right)$ ist und schätzen den Nenner des Integranden für alle $\zeta = e^{i\vartheta}$ mit $\vartheta$ in $\langle \vartheta_1, \vartheta_1 \pm \delta \rangle$, $|\vartheta_1| \leqq 2\tau_1$, ab. Dann ist

$$\begin{aligned} |1 + \bar{b}\, e^{i\vartheta}|^2 &= 1 + |b|^2 + 2|b| \cos(\vartheta - \chi) \\ &= (1 - |b|)^2 + 4|b| \cos^2 \frac{\vartheta - \chi}{2} \\ &\geqq (1 - |b|)^2 + 4|b| \cos^2\left(\frac{2\tau_1 + \delta + |\chi|}{2}\right) \\ &= (1 - |b|)^2 + 4|b| \cos^2\left(\tau_1 + \frac{\delta + |\chi|}{2}\right); \end{aligned}$$

mithin wird

$$\alpha' \leqq \frac{(1 - |b|)(1 + |b|)\,\alpha''}{4|b| \cos^2\left(\tau_1 + \frac{\delta + |\chi|}{2}\right)} \leqq \frac{1 - |b|}{2|b| \cos^2\left(\tau_1 + \frac{\delta + |\chi|}{2}\right)} \alpha'',$$

w. z. b. w.

## § 3.

## Die Unbewalltheitsfunktion, die Richtungsfunktion und der metrische Parameter einer Jordankurve.

11. Um das Verhalten eines Jordanbogens in der Umgebung eines seiner Punkte zu charakterisieren, wollen wir die folgenden Begriffsbildungen einführen.

Wir verstehen unter einem „*Kurvenelement*“ $c$ einen Punkt $P$ und einen durch diesen Punkt hindurchgehenden (stetigen) Kurvenbogen $b$, wobei das Kurvenelement — definitionsgemäß — als dasselbe anzusehen ist, wenn der Bogen $b$ durch einen $P$ als inneren Punkt enthaltenden Teilbogen $b'$ ersetzt wird. Die Beziehung zwischen dem Kurvenelement $c$, und dem Punkt $P$, der bei der Definition des Kurvenelements zugrunde gelegt wird, bringen wir zum Ausdruck, indem wir sagen, $c$ gehe durch $P$ hindurch.

12. Um das Verhalten eines solchen Kurvenelementes zu charakterisieren, führen wir die „*Unbewalltheitsfunktion*“ ein. Diese soll folgendermaßen definiert werden: Wir beschreiben um den Punkt $P$, durch den $c$ hindurchgeht, einen Kreis $k_\varepsilon$ mit so kleinem Radius $\varepsilon > 0$, daß $k_\varepsilon$ bereits das Kurvenelement $c$ (in endlich oder unendlich vielen Punkten) schneidet.

Durchläuft man den Bogen $b$ von $P$ aus zuerst in der einen Richtung und dann in der entgegengesetzten, so möge in der einen Durchlaufungsrichtung der letzte Schnittpunkt von $b$ mit $k_\varepsilon$ der Punkt $P_1$ und in der anderen der letzte derartige Schnittpunkt $P_2$ sein. Wir betrachten dann die (abgeschlossene) Kreisscheibe $k_\Delta$ mit dem kleinsten Radius $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ um $P$, welche die beiden Kurvenbögen $\overset{\frown}{PP_1}$, $\overset{\frown}{PP_2}$ enthält (siehe Fig. 10).

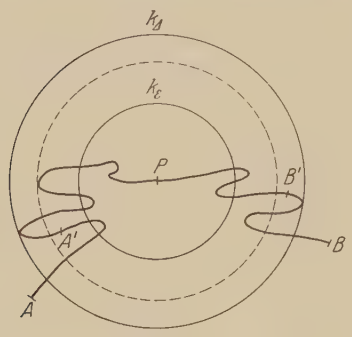


Fig. 10.

$\Delta(\varepsilon)$ ist dann offenbar (wegen der Stetigkeit des Kurvenbogens $b$) eine mit $\varepsilon \downarrow 0$ monoton gegen 0 abnehmende von rechts (aber nicht notwendig von links) stetige Funktion. Ferner ist $\Delta(\varepsilon)$ in dem folgenden Sinne von der „Ausdehnung" des Bogens $b$ von $c$ unabhängig: Ersetzt man $b$ durch einen $P$ als inneren Punkt enthaltenden Teilbogen $b'$, so hat offenbar $\Delta(\varepsilon)$ für alle hinreichend kleinen $\varepsilon$ [27]) denselben Wert. Daher kann man $\Delta(\varepsilon)$ zur Charakterisierung einer Eigenschaft des Kurvenelementes benutzen, und wir bezeichnen $\Delta(\varepsilon)$ als die *„Unbewalltheitsfunktion" des Kurvenelements* $c$. — Im folgenden wird es vor allem auf den Quotienten $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ ankommen. Wir werden verlangen, daß der $\overline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ endlich ist, oder also, daß $\Delta(\varepsilon)$ der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ genügt.

13. Wir führen ferner zur weiteren Charakterisierung eines Kurvenelementes die sogenannte *Richtungsfunktion* ein. Ein Kurvenelement heiße *„gerichtet"*, wenn es im Punkte $P$, durch den es hindurchgeht, eine Tangente besitzt. Es möge nun $c$ ein gerichtetes Kurvenelement sein. Es sei $\varepsilon > 0$. Wir schließen dann die Tangente in $P$ zwischen zwei durch $P$ hindurchgehende Geraden $g_1$ und $g_2$ ein, die mit der Tangente in $P$ den Winkel $\varepsilon$ bilden. Dann gibt es ein $r = r(\varepsilon) > 0$, so daß der Kreis um $P$ mit $r(\varepsilon)$ nur Punkte von $c$ im Innern oder auf dem Rande enthält, die zugleich

[27]) Dieses $\varepsilon$ muß zunächst so klein gewählt werden, daß $\Delta(\varepsilon)$ gleichzeitig für $b$ und $b'$ erklärt werden kann. Dies reicht aber unter Umständen nicht aus, wie aus der Figur 10 hervorgeht, sondern es muß eventuell $\varepsilon$ noch kleiner angenommen werden, damit die Unwalltheitsfunktion bei beiden Erklärungen denselben Wert hat. In der Figur 10 ist nämlich das Kurvenelement $c$ einmal durch den Bogen $\overset{\frown}{AB}$ und dann durch dessen Teilbogen $\overset{\frown}{A'B'}$ repräsentiert. Der Kreis $k_\varepsilon$ stellt den Kreis mit dem Radius $\varepsilon$ um $P$ dar, der Kreis $k_\Delta$ ist der Kreis mit dem Radius $\Delta$ bei der Definition von $\Delta(\varepsilon)$ für den Bogen $\overset{\frown}{AB} = b$, der kleinere (punktierte) Kreis stellt den Kreis mit dem Radius $\Delta'(\varepsilon)$ bei der Definition von $\Delta(\varepsilon)$ für den Teilbogen $\overset{\frown}{A'B'} = b'$ von $\overset{\frown}{AB}$ dar.

dem von $g_1$ und $g_2$ gebildeten Winkelraume (einschließlich der Schenkel) der Öffnung $2\varepsilon$ angehören. (Um ein solches $r(\varepsilon)$ eindeutig festzulegen, können wir, wenn $c$ aus dem Winkelraum hinaustritt, für $r(\varepsilon)$ immer den größten der oben genannten Werte $r(\varepsilon)$ wählen. Sonst können wir $r(\varepsilon) > 0$ und sonst beliebig annehmen.) Wir bezeichnen eine solche Funktion $r(\varepsilon)$ als eine Richtungsfunktion von $c$. Verkürzt oder verlängert man den Bogen $b$, so bleibt von einem $\varepsilon$ an jede solche Funktion $r(\varepsilon)$ Richtungsfunktion von $c$.

14. Um nun das Verhalten einer geschlossenen Jordankurve in der Umgebung eines ihrer Punkte zu charakterisieren, benutzen wir die eben eingeführten Begriffsbildungen in der folgenden Weise: *Wir verstehen unter der Unbewalltheitsfunktion von $C$ im Punkte $P$ und, falls $C$ in $P$ eine Tangente besitzt, unter der Richtungsfunktion von $C$ im Punkte $P$ die Unbewalltheitsfunktion bzw. Richtungsfunktion eines durch $P$ hindurchgehenden Kurvenelementes von $C$.* Diese Funktionen bringen dann in der Tat nur eine Eigenschaft dieser Kurve in der Umgebung dieses Punktes zum Ausdruck. — Genügt insbesondere die Unbewalltheitsfunktion von $C$ in $P$ der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, so wollen wir sagen, $C$ sei in $P$ *linear unbewallt*. Existiert überdies der $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ und ist er $= 1$ (dieser Fall wird im folgenden eine wichtige Rolle spielen), so nennen wir $C$ in $P$ *regulär unbewallt*.

Es sei noch für das Folgende darauf hingewiesen, daß die Bedingungen $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ und $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 1$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ invariant gegenüber einer Transformation der Form $u - u_1 = (w - w_1)^\alpha$, $\alpha > 0$, reell, bleibt, wo $w_1$ der Punkt $P$ ist. Denn nach der Durchführung der Transformation wird dieser Quotient $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ gleich $\frac{\Delta^\alpha}{\varepsilon^\alpha}$.

15. Es sei nun $C$ eine geschlossene Jordankurve, $P_0$ ein Punkt von $C$, und *es möge die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ von $C$ in $P_0$ der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ genügen.* Wir werden zeigen, daß dann eine gewisse für uns wichtige Parameterdarstellung der Kurve möglich ist. Unter *dieser Annahme existieren nämlich ausgezeichnete Parameter $t$, die wir als metrische Parameter in bezug auf den Punkt $P_0$ bezeichnen wollen, mit der folgenden Eigenschaft: Entspricht etwa $P_0$ der Parameterwert $t_0$, so gibt es zwei positive Zahlen $c_1, C_1$, $c_1 < C_1$, so daß*

$$0 < c_1 \leqq \left| \frac{r(t)}{t - t_0} \right| < C_1 \tag{3,1}$$

*ist, wo, wenn $P(t)$ der dem Parameterwert $t$ entsprechende Kurvenpunkt ist, $r(t)$ die Länge des Radiusvektors $\overline{P_0 P(t)}$ bedeutet. Umgekehrt folgt*

*aus der Existenz eines metrischen Parameters, daß die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ genügt.*

Da sich ein metrischer Parameter z. B. mit einer beliebigen von 0 verschiedenen Konstanten multiplizieren läßt, ist nur der Quotient $\frac{C_1}{c_1}$ oder genauer, $L = \overline{\lim_{t \to t_0}} \left| \frac{r(t)}{t - t_0} \right|$, $l = \underline{\lim_{t \to t_0}} \left| \frac{r(t)}{t - t_0} \right|$ gesetzt, der Quotient $\frac{L}{l}$ wesentlich. Bei unserem Beweis für die oben behauptete Tatsache wird sich überdies ein einfacher Zusammenhang dieses Quotienten mit dem $\overline{\lim_{\varepsilon \searrow 0}} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \varkappa$ ergeben, nämlich: *Es ist für endliches $\varkappa$ stets $\varkappa \leqq \frac{L}{l}$, und es gibt geeignete metrische Parameter, für die dieser Quotient $\frac{L}{l} = \varkappa$ ist.*

Beweis. a) Wir nehmen an, daß die Kurve $C$ in irgendeiner Parameterdarstellung $P = P(t^*)$ gegeben ist, $P_0$ sei $= P(0)$. Zu jedem $\nu$ von einem $\nu = \nu_0$ an gehört ein größter Wert $t^* > 0$, den wir mit $t_\nu^*$ bezeichnen, so daß $P(0)\overline{P(t_\nu^*)} = \frac{1}{\nu} = r_\nu$ ist. Dann bilden die Punkte $t_\nu^*$ $(\nu = \nu_0, \nu_0 + 1, \ldots)$ eine Einteilung des Intervalls $t_{\nu_0}^*, \ldots, 0$ in unendlich viele Teilintervalle. Wir bilden jedes Intervall $t_{\nu+1}^* \leqq t^* \leqq t_\nu^*$ $(\nu = \nu_0, \nu_0 + 1, \ldots)$ eineindeutig stetig und monoton (etwa linear) auf das $t$-Intervall $\frac{1}{\nu+1} \leqq t \leqq \frac{1}{\nu}$ ab; dadurch geht für $t_{\nu+1}^* \leqq t^* \leqq t_\nu^*$ $r(t^*)$ in $r(t^*(t))$ über. Für $\frac{1}{\nu+1} \leqq t \leqq \frac{1}{\nu}$ ist dann $\frac{1}{\nu+1} \leqq r(t^*(t)) \leqq \frac{\varkappa(1+\omega_\nu)}{\nu}$, wo $\varkappa = \overline{\lim_{\varepsilon \searrow 0}} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$, $\omega_\nu > 0$, $\lim_{\nu \to \infty} \omega_\nu = 0$ ist, da wir ja für jedes $\nu$ den größten Wert $t_\nu^*$ genommen hatten. Schreiben wir für $r(t^*(t))$ $r_1(t)$, so gilt für $\frac{1}{\nu+1} \leqq t \leqq \frac{1}{\nu}$

$$\frac{\nu}{\nu+1} \leqq \left| \frac{r_1(t)}{t} \right| \leqq \frac{\varkappa(\nu+1)(1+\omega_\nu)}{\nu} \tag{3,2}$$

woraus für $t > 0$ wegen $\frac{\nu+1}{\nu} \to 1$ die Behauptung folgt. Für $t < 0$ ist der Beweis analog. — Überdies folgt aus der Ungleichung (3, 2), daß für den eben angegebenen metrischen Parameter der Quotient $\frac{L}{l} \leqq \varkappa$ $\left(L = \overline{\lim_{t \to 0}} \left| \frac{r_1(t)}{t} \right|, \; l = \underline{\lim_{t \to 0}} \left| \frac{r_1(t)}{t} \right|\right)$ ist.

b) Wir beweisen nun die Umkehrung, und zwar zeigen wir: Ist $t$ ein in bezug auf den Punkt $P_0$ metrischer Parameter von $C$, gilt also (3, 1) oder

$$0 < l = \underline{\lim_{t \to t_0}} \left| \frac{r(t)}{t - t_0} \right| \leqq L = \overline{\lim_{t \to t_0}} \left| \frac{r(t)}{t - t_0} \right| < \infty, \tag{3,3}$$

so gilt für die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ von $C$ in $P_0$ $\overline{\lim_{\varepsilon \searrow 0}} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \varkappa \leqq \frac{L}{l}$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $P_0 = P(0)$. Wäre nun die Behauptung falsch, so gäbe es für ein passendes $\sigma > 0$ eine Folge von Radien $r_\nu \downarrow 0$ und Punkten $P_\nu = P(t_\nu)$, $P'_\nu = P(t'_\nu)$ mit $\overline{P_0 P_\nu} = \overline{P_0 P'_\nu} = r_\nu$, die beide von derselben Seite [28]) gegen $P_0$ konvergieren, so daß der von $P_\nu$, $P'_\nu$ begrenzte $P_0$ nicht enthaltende Bogen bis auf seine Endpunkte $P_\nu$, $P'_\nu$ außerhalb des Kreises mit $r_\nu$ um $P_0$ läge und daß man auf ihm einen Punkt $Q_\nu$ finden könnte, für den

$$\frac{\overline{P_0 Q_\nu}}{\overline{P_0 P_\nu}} = \frac{\overline{P_0 Q_\nu}}{\overline{P_0 P'_\nu}} > \frac{L}{l} + \sigma$$

wäre. Wir dürfen annehmen, daß die $P_\nu$, $P'_\nu$ und $Q_\nu$ zugeordneten Parameterwerte bzw. $t_\nu$, $t'_\nu$, $\bar{t}_\nu$ positiv sind und der Ungleichung $t_\nu < \bar{t}_\nu < t'_\nu$ genügen; dann folgt aus (3, 3), daß von einem $\nu$ an, etwa für $\nu \geqq \nu_0$,

$$\frac{\overline{P_0 Q_\nu}}{t_\nu} = \frac{r(\bar{t}_\nu)}{\bar{t}_\nu} \leqq L + l\frac{\sigma}{2}$$

ist. Wegen $\frac{\overline{P_0 Q_\nu}}{\overline{P_0 P'_\nu}} = \frac{r(\bar{t}_\nu)}{r(t'_\nu)} > \frac{L}{l} + \sigma$ folgt weiter

$$\frac{r(t'_\nu)}{t'_\nu} = \frac{r(t'_\nu)}{r(\bar{t}_\nu)} \cdot \frac{r(\bar{t}_\nu)}{\bar{t}_\nu} \cdot \frac{\bar{t}_\nu}{t'_\nu} \leqq \frac{L + l\frac{\sigma}{2}}{\frac{L}{l} + \sigma} = \frac{L + l\frac{\sigma}{2}}{L + l\sigma} \cdot l < l,$$

im Widerspruch mit der Annahme, daß $\lim\limits_{t \to 0} \left| \frac{r(t)}{t} \right| = l$ ist.

Hieraus ergibt sich nun auch unmittelbar die zweite über den Zusammenhang von $\varkappa$ und $\frac{L}{l}$ ausgesprochene Behauptung. Denn aus dem unter b) Bewiesenen folgt, daß notwendig, wenn ein metrischer Parameter existiert: $\overline{\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0}} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \varkappa \leqq \frac{L}{l}$ ist. Andererseits gibt es aber, wie in a) gezeigt, einen metrischen Parameter $t$, für den $\frac{L}{l} \leqq \varkappa$ gilt. Da für diesen aber auch notwendig $\frac{L}{l} \geqq \varkappa$ gelten muß, besteht also für diesen metrischen Parameter die Relation $\frac{L}{l} = \varkappa$.

16. Insbesondere erhalten wir aus dem obigen Satze das folgende Resultat: Hinreichend und notwendig dafür, daß es einen Parameter $t$ für die Kurve $C$ gibt, für den $\lim\limits_{t \to 0} \frac{r(t)}{t - t_0} = \alpha > 0$ gilt, ist, daß $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 1$ mit $\varepsilon \downarrow 0$ besteht.

Denn ist $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$, so gibt es nach dem obigen stets einen metrischen

[28]) D. h. es gibt einen von $P$ verschiedenen Punkt $Q$ von $C$, so daß alle Punkte $P_\nu$ einem und demselben Bogen $\overset{\frown}{PQ}$ angehören.

Parameter $t$ mit $\frac{L}{l} = 1$, also $L = l$. Existiert umgekehrt ein metrischer Parameter, für den $L = l = \alpha > 0$ ist, so folgt, daß für die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ im betreffenden Punkte die Relation gilt $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \varkappa \leqq 1$. Da aber andererseits wegen $\Delta(\varepsilon) \geqq \varepsilon$ stets $1 \leqq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ ist, muß $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ existieren und gleich 1 sein, w. z. b. w.

17. Später werden uns noch die beiden folgenden Bemerkungen von Nutzen sein.

1. Ist $t$ ein metrischer Parameter der Kurve $C$ in bezug auf den Punkt $P$ $(w = w_1)$ und unterwirft man die Kurve $C$ der Transformation $u = (w - w_1)^\alpha$, $\alpha > 0$, so ist $\sigma = |t|^\alpha \operatorname{sgn} t$ ein metrischer Parameter der transformierten (nicht notwendig doppelpunktfreien Kurve $\Gamma$[29]) in dem $w_1$ entsprechendem Punkte $u = 0$. Denn es gilt ja, wenn

$$0 < c_1 \leqq \left| \frac{w(t) - w_1}{t} \right| \leqq C_1$$

ist, auch, wenn wir $u(\sigma) = u(|t|^\alpha \operatorname{sgn} t) = (w(t) - w_1)^\alpha$ setzen,

$$0 < c_1^\alpha \leqq \left| \frac{u(\sigma)}{\sigma} \right| \leqq C_1^\alpha .$$

2. Wir werden uns im folgenden vor allem mit derjenigen Parameterdarstellung einer geschlossenen Jordankurve $C$ befassen, welche durch die Abbildungsfunktion $w = f(z)$ des Einheitskreises $|z| < 1$ auf das Innere von $C$ für $z = e^{i\vartheta}$, $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$, geliefert wird. Bleibt nun für ein $\vartheta_1$, $f(e^{i\vartheta_1}) = w_1$, der Quotient

$$\frac{|f(e^{i\vartheta_1}) - w_1|}{|\vartheta - \vartheta_1|^\alpha} \tag{3,4}$$

zwischen zwei festen Schranken oder konvergiert er für $\vartheta \to \vartheta_1$ gegen einen endlichen Grenzwert, so ist definitionsgemäß $t = |\vartheta - \vartheta_1|^\alpha \operatorname{sgn}(\vartheta - \vartheta_1)$ ein metrischer Parameter von $C$ in bezug auf $w = w_1$. *Damit der Differenzenquotient* (3,4) *zwischen zwei positiven Schranken bleibt resp. gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert, ist also notwendig, daß die Kurve C einen metrischen Parameter t in bezug auf* $w = w_1$ *besitzt, für den im zweiten Falle* $\lim_{t \to 0} \frac{w(t) - w_1}{t}$ *existiert und* $> 0$ *ist, und somit also auch nach Nr.* 16, *daß für die Unbewalltheitsfunktion* $\Delta(\varepsilon)$ *von C in* $w = w_1$ $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ *bzw.* $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 1$ *gilt.*

[29]) Wir hatten oben zwar den metrischen Parameter nur für eine doppelpunktfreie Kurve $C$ definiert, doch kann diese Definition unverändert auf eine beliebige geschlossene Kurve übertragen werden, wenn ihre Punkte umkehrbar eindeutig und stetig auf einen Parameter $t$ bezogen werden können.

## § 4.

## Formulierung und Beweis der Hauptungleichungen.

18. Satz 1. *Es sei $C$ eine geschlossene Jordankurve in der $w$-Ebene, die im Punkte $P$ $(w = w_1)$ eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leqq 2$, besitzt. Ferner sei $C$ in $P$ linear unbewallt, d. h. die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ von $C$ in $P$ genüge der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$. $z = \varphi(w)$ bilde das Innere $G$ von $C$ so auf $|z| < 1$ ab, daß ein in $G$ gelegener Punkt $w = w_0$ in $z = 0$ übergeht. $W$ bezeichne den von zwei von $w_1$ ausgehenden symmetrisch zur Winkelhalbierenden des Eckenwinkels in $w_1$ verlaufenden Strahlen gebildeten Winkelraum der Öffnung $2\psi$, $0 \leqq \psi < \frac{\pi\tau}{2}$.*

*Dann gibt es zwei positive Konstanten $K_1$ und $q_1$, sowie zu jedem $w \neq w_1$ auf $C$ mit $|w - w_1| \leqq q_1$ ein $R > 0$, so daß für jeden Punkt $c$ im Innern von $C$ und $W$ mit $|w_1 - c| = R$*

$$(4,1) \qquad \frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} \geqq K_1 \frac{|\varphi(c) - \varphi(w_1)|}{|c - w_1|^{1/\tau}} \cos^2\left(\frac{\psi}{\tau}\right)$$

*gilt. Dabei ist $R \leqq \pi^\tau |w - w_1|^{5/6}$.*[30])

*Ist $\varkappa = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$, so kann $K_1 = (1 - \omega)\frac{1}{\varkappa^{1/\tau}}$, $0 < \omega < 1$, gesetzt werden, wo $\omega$ beliebig klein gemacht werden kann, wenn $q_1$ hinreichend klein angenommen wird.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varphi(w_1) = 1$. — Es sei zunächst $\tau = 1$. Wir dürfen uns beim Beweise der Ungleichung (4, 1) auf den Fall beschränken, daß der Punkt $w$ auf einem festen der von $P$ ausgehenden Äste der Kurve $C$ liegt, der etwa mit $C^*$ bezeichnet werde. Es sei $\eta > 0$, $\eta < \frac{\pi}{16}$, $\sqrt{\eta} < \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = r_0$. Wir können die Tangente an $C$ in $P$ zwischen zwei durch $P$ hindurchgehende Geraden $g_1$ und $g_2$ einschließen, die mit dieser den Winkel $\eta$ bilden (s. Fig. 11). Dann beschreiben wir um $P$ den Kreis $\mathfrak{K}$ mit so kleinem Radius $r \leqq \eta$, daß sämtliche Punkte von $C$, die innerhalb oder auf $\mathfrak{K}$ liegen, auch zugleich in das Innere der beiden von $g_1$ und $g_2$ gebildeten (Scheitel-) Winkelräume $W_1$ und $W_2$ der Öffnung $2\eta$ fallen, und daß ferner mit jedem Punkt $Q$ von $C$ innerhalb von $\mathfrak{K}$ einer der Bögen $\overset{\frown}{PQ}$ von $C$ (bis auf den Endpunkt $P$) sich im Innern von $W_1$ oder $W_2$ befindet. Darüber hinaus wählen wir $r$ noch so klein, daß für alle $\varepsilon \leqq r$ $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} < \frac{3}{2}\varkappa$ ist. Da der Winkelraum $W$ mit $W_1$ und $W_2$ $\left(\text{wegen } \eta < \frac{\pi}{2} - \psi\right)$ keinen Punkt außer $P$ gemeinsam hat, liegt dann der Sektor $S_r$, der von $\mathfrak{K}$ aus dem

[30]) Man vgl. auch die Anmerkung am Schlusse des Beweises von Satz 1 (Nr. 25).

Winkelraum $W$ herausgeschnitten wird, (bis auf $P$) ganz in $G$. — Wir werden $\eta$ und $r$ unten noch weiter einschränken; im übrigen sind aber $\eta$ und $r$ während des ganzen Beweises *feste*, wenn auch für unsere Zwecke hinreichend kleine Zahlen. — Nun ziehen wir von $P$ aus unter dem Winkel $\eta_1 = \sqrt{\eta} > \eta$ gegen die Normale in $P$ auf der dem eben genannten Zweig $C^*$ von $C$ zugewandten Seite der Normalen einen Strahl $g$, der mit einem an $P$ anstoßenden Stück in $G$ verläuft. Wie oben gesagt, ist $\eta_1 = \sqrt{\eta} < \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \nu_0$. Für jeden hinreichend nahe bei $P$ gelegenen Punkt $w$ auf $C^*$ können wir einen durch $P$ und $w$ hindurchgehenden Kreis $k'_w$ finden, dessen Mittelpunkt $a'$ auf $g$ liegt, dessen Radius dann gleich $\overline{a'w} = \varrho'$ ist, und der ganz innerhalb von $\mathfrak{K}$ liegt. Der Kreis $k'_w$ wird dann die Kurve $C$ in endlich oder unendlich vielen Punkten schneiden; sämtliche Schnittpunkte liegen jedenfalls innerhalb *eines* der Winkelräume $W_1$, $W_2$, etwa in $W_1$, und zwar auf derselben Seite der Normalen wie der Strahl $g$.

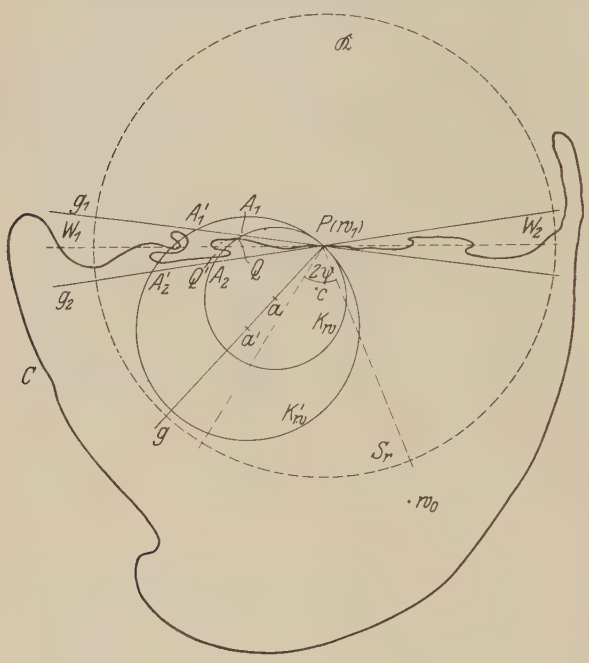



Fig. 11.

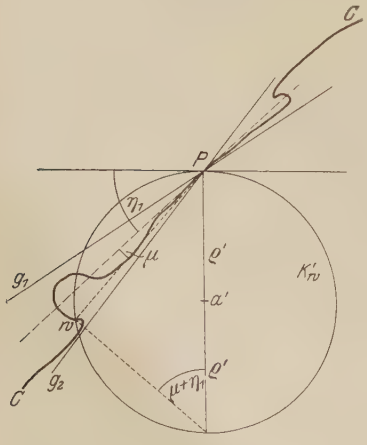



Fig. 12.

Man kann übrigens leicht den Zusammenhang zwischen dem Punkte $w$ und dem Radius $\varrho'$ von $k'_w$ formelmäßig ausdrücken. Bildet die von $w_1$ nach $w$ gezogene Sehne von $C$ mit der Tangente von $C$ in $P$ den Winkel $\mu$ ($\mu$ werde positiv gerechnet, wenn $w$ auf derselben Seite der Tangente liegt wie die Innennormale von $C$ in $P$), so ist (s. Fig. 12)

$$(4,2) \qquad \varrho' = \frac{|w - w_1|}{2\sin(\mu + \eta_1)} = \frac{|w - w_1|}{2\sin(\mu + \sqrt{\eta})}, \qquad -\eta \leqq \mu \leqq \eta.$$

Es sei schon jetzt erwähnt, daß für die im Satze genannte Zahl $R$ sich später der Wert

$$(4,3.) \qquad R = (1-\varepsilon)\,\eta^{\frac{1}{2}}\,\frac{|w-w_1|}{2\sin(\mu+\sqrt{\eta})}\cdot\frac{1}{\varkappa}, \quad -\eta \leqq \mu \leqq \eta, \quad 0<\varepsilon<1,$$

ergeben wird, wo $\varepsilon$ mit $\eta \downarrow 0$ gleichfalls gegen 0 konvergiert.

19. Es werde nun eine positive Zahl $\varrho < \varrho'$ durch die Relation

$$\varrho = \frac{1-\omega'}{\varkappa}\,\varrho'\,\frac{\sin(\eta_1-\eta)}{\sin(\eta_1+\eta)}$$

bestimmt, wo $0<\omega'<1$ und $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \leqq \varkappa(1+\omega')$ für alle $\varepsilon \leqq r$ und $\lim\limits_{r\downarrow 0}\omega' = 0$ ist. Dann ist auch offenbar

$$(4,4) \qquad \frac{1-\omega'}{\varkappa} = \frac{2\varrho\sin(\eta_1+\eta)}{2\varrho'\sin(\eta_1-\eta)} < \frac{1}{\varkappa(1+\omega')}.$$

Wir markieren den Punkt $a$ auf $g$ im Abstande $\varrho$ von $P$ und beschreiben mit dem Radius $\varrho$ um $a$ den Kreis $k_w$. Der Zähler des zweiten Gliedes in (4, 4) ist dann gleich der Länge der längsten von $P$ ausgehenden und in dem Winkelraum $W_1$ verlaufenden Sehne $d$ (in der Fig. 11 $PA_2$) von $k_w$, der Nenner gleich der kürzesten derartigen Sehne $d'$ von $k'_w$ (in der Fig. 11 $PA'_1$). Es sei $B$ ein Kurvenbogen von $C$, der von zwei von $P$ verschiedenen Schnittpunkten von $C$ und $k_w$ begrenzt ist und sonst außerhalb von $k_w$ verläuft, falls es einen solchen Bogen gibt. Der im Winkelraum $W_1$ gelegene Kreisbogen von $k_w$ liegt nun bis auf den einen seiner Endpunkte innerhalb des Kreises mit dem Radius $d$ um $P$. Daher kann wegen der Voraussetzung $\Delta(\varepsilon) \leqq \varkappa\cdot\varepsilon\,(1+\omega')$ und wegen (4, 4) $B$ nicht in das Äußere des Kreises mit dem Radius $\varkappa d(1+\omega') < d'$ um $P$ eindringen. Weil ferner der innerhalb des Winkelraumes $W_1$ gelegene Kreisbogen von $k'_w$ nicht in das Innere des Kreises mit dem Radius $d'$ um $P$ eindringt, kann $B$ den Kreis $k'_w$ nicht mehr treffen. *Wenn man also $C$ von $P$ aus in den Winkelraum $W_1$ hinein durchläuft, so werden sämtliche Schnittpunkte von $k_w$ mit $C$ vor dem Punkte $w$ angetroffen.* Ferner gilt auch für die Länge der kürzesten von $P$ ausgehenden Sehne $d_1$ von $k_w$ in $W_1$ $(= 2\varrho\sin(\eta_1-\eta))$ (in der Fig. $PA_1$) und die der längsten derartigen Sehne $d'_1$ von $k'_w$ $(= 2\varrho'\sin(\eta_1+\eta))$ (in der Fig. $PA'_2$) die Relation

$$(4,5) \qquad \frac{d_1}{d'_1} = \frac{2\varrho\sin(\eta_1-\eta)}{2\varrho'\sin(\eta_1+\eta)} = \frac{2\varrho\sin(\eta_1+\eta)\cdot\sin^2(\eta_1-\eta)}{2\varrho'\sin(\eta_1-\eta)\cdot\sin^2(\eta_1+\eta)} = \frac{(1-\omega')}{\varkappa}\cdot\frac{\sin^2(\eta_1-\eta)}{\sin^2(\eta_1+\eta)}.$$

Der Quotient $\frac{\sin(\eta_1-\eta)}{\sin(\eta_1+\eta)}$ konvergiert wegen $\eta_1 = \sqrt{\eta}$ mit $\eta \to 0$ gegen 1. — Von dieser Gleichung werden wir später noch Gebrauch zu machen haben. —

20. Wir bemerken noch, daß offenbar die Länge des kleineren der durch $g_2$ abgeschnittenen Bögen von $k_w$ gleich $2\varrho(\eta_1+\eta)$ ist. Dabei ist

der zuerst in das Innere der Kurve $C$ eindringende Schenkel von $W_1$ gerade die eine Halbgerade von $g_2$. Da jeder Schnittpunkt des Kreises $k_w$ mit $C$ innerhalb des Winkelraumes $W_1$ liegt, ist die Länge eines jeden (kleineren) Kreisbogens von $P$ bis zu einem dieser Schnittpunkte höchstens gleich $2\varrho(\eta_1 - \eta)$. Ferner liegt mit jedem Punkt $Q$ von $C$ innerhalb von $k_w$ oder auf $k_w$ auch einer der Bögen $\overset{\frown}{PQ}$ von $C$ (bis auf $P$) im Innern des Winkelraumes $W_1$. Dies folgt aus der Tatsache, daß $k_w$ im Innern von $\mathfrak{K}$ liegt, und aus der zweiten der oben genannten Eigenschaften von $\mathfrak{K}$.

21. Es sei nun $Q$ der Schnittpunkt von $k_w$ mit $C$, den man zuerst antrifft, wenn man $k_w$ von $P$ aus so durchläuft, daß man bei $P$ das Innere der Kurve verläßt, $Q'$ der erste Schnittpunkt, den man beim Durchlaufen der Kurve $C$ in dem Sinne antrifft, daß man bei $P$ das Innere von $k_w$ verläßt. Insbesondere könnte auch $Q \equiv Q'$ sein. Den ersten dabei erhaltenen Kreisbogen $\overset{\frown}{PQ}$ bezeichnen wir mit $\beta$, den zweiten (bis auf seine Endpunkte) außerhalb $k_w$ verlaufenden Kurvenbogen $\overset{\frown}{Q'P}$ mit $\alpha$. $\gamma$ sei der zu $\alpha$ komplementäre Kurvenbogen $\overset{\frown}{PQ'}$ von $C$. — Es sei nun $c$ ein Punkt in $S_r$ im Abstande $R = \varrho\sigma$ von $P$, wo zunächst $0 < \sigma < 2\sin\frac{\nu_0}{2} < 1$ sei. (Es ist $\varrho\sigma < \varrho < \varrho' < r$.) Der Punkt $c$ liegt dann, wie man leicht einsieht[31]), im Innern von $k_w$. Weiter unten werden wir noch $\sigma$ in geeigneter Weise von $\eta$ abhängig machen. Der kleinere Kreisbogen $\overset{\frown}{PQ'} = \beta$ bildet mit dem Bogen $\alpha = \overset{\frown}{PQ'}$ von $C$ eine geschlossene Jordankurve $C_1$. $C_1$ enthält den Punkt $c$ und somit auch das Innere von $k_w$ im Innern. Dies folgt sofort aus dem Hilfssatz 3, wenn man folgendes beachtet: Der Kurvenbogen $\gamma = \overset{\frown}{PQ'}$ verläuft (bis auf $P$) nach dem am Schlusse der vorigen Nummer Gesagten ganz im Innern des Winkelraumes $W_1$. Da ferner sowohl der

---

[31]) Denn ist $u$ der Abstand von $c$ vom Mittelpunkt $a$ des Kreises $k_w$ und ist $\sphericalangle\, a w_1 c = \psi_1$, so ist

$$u^2 = \varrho^2 + \varrho^2\sigma^2 - 2\varrho^2\sigma\cos\psi_1 = \varrho^2(1 + \sigma^2 - 2\sigma\cos\psi_1),$$

und wegen

$$\psi_1 \leqq \eta_1 + \psi \leqq \nu_0 + \psi = \nu_0 + \frac{\pi}{2} - 2\nu_0 = \frac{\pi}{2} - \nu_0, \qquad \cos\psi_1 \geqq \cos\left(\frac{\pi}{2} - \nu_0\right) = \sin\nu_0,$$

$$2\cos\psi_1 \geqq 2\sin\nu_0 > 2\sin\frac{\nu_0}{2}$$

ist

$$2\sigma\cos\psi_1 > 2\sigma\sin\frac{\nu_0}{2} > \sigma^2, \qquad 2\sigma\cos\psi_1 - \sigma^2 > 0,$$

also

$$0 < 1 + \sigma^2 - 2\sigma\cos\psi_1 < 1$$

und

$$u < \varrho,$$

d. h. $c$ liegt in der Tat im Innern von $k_w$.

Kreisbogen $\widehat{PQ'} = \beta$ als auch $\gamma$ vom Punkte $P$ auf $g_2$ ausgehen, *sonst aber $g_2$ überhaupt nicht mehr treffen*[32]) und den gemeinsamen Endpunkt $Q' (\neq P)$ haben, müssen sie beide auf derselben Seite von $g_2$ bleiben und zwar auf der gleichen Seite wie die *Außennormale* von $C$ in $P$. Der Punkt $c$ dagegen liegt im Innern des Winkelraumes $W$ (der Öffnung $2\psi$). Dieser Winkelraum hat mit der Geraden $g_2$ nur den Punkt $P$ gemeinsam (da nämlich $g_2$ um den Winkel $\eta < \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$ gegen die Tangente in $P$ geneigt ist), liegt also ganz auf einer Seite von $g_2$, und da er ferner die *Innennormale* von $C$ in $P$ (als Winkelhalbierende) enthält, befindet er sich auf der entgegengesetzten Seite von $g_2$ wie die Bögen $\gamma$ und $\beta$. Daher ist in der Tat der Hilfssatz 3 anwendbar. Die Kurve $C$ und der Kreis $k = k_w$ bilden dann offenbar eine Konfiguration, die den Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 genügt, wobei für die dort genannten Bögen $\alpha$, $\gamma$, $\beta$, $\bar{\beta}$ sowie für die dort mit $C$ und $C_1$ bezeichneten geschlossenen Jordankurven und den dort erwähnten Punkt $c$ gerade die hier mit genau denselben Symbolen bezeichneten Gebilde gewählt werden können. Daher gilt

$$m_{k,c}\,\bar{\beta} \leqq m_{C,c}\,\gamma\,. \tag{4,6}$$

22. $\Delta$ bezeichne den Kurvenbogen $\widehat{w w_1}$, der bei $P$ in das Innere von $k_w$ eindringt. Nach dem oben (Nr. 19) über die Schnittpunkte von $k_w$ mit $C$ und den Punkt $w$ Gesagten enthält $\Delta$ den Bogen $\gamma$ und daher ist auch ($m_{C,w_0}\Delta = \Delta'_C$ gesetzt)

$$m_{C,w_0}\,\gamma \leqq m_{C,w_0}\,\Delta \equiv \Delta'_C\,. \tag{4,7}$$

Nach Hilfssatz 8 gilt nun

$$m_{C,c}\,\gamma \leqq \frac{1+|\varphi(c)|}{1-|\varphi(c)|}\, m_{C,w_0}\,\gamma \tag{4,8}$$

---

[32]) Es bedarf vielleicht noch einer Erläuterung dafür, daß der Kreisbogen $\beta - \widehat{PQ'}$ die Gerade $g_2$ *nur* in $P$ trifft: Die Geraden $g_1$ und $g_2$ schneiden $k_w$ in je einem weiteren Punkte $A_1$ (auf $g_1$) bzw. $A_2$ (auf $g_2$). Durchläuft man die Strecke $PA_2$ von $P$ nach $A_2$, so tritt man zunächst in das Innere, durchläuft man die Strecke $PA_1$ von $P$ nach $A_1$, so tritt man zunächst in das Äußere von $C$. Da aber $C$ — nach dem am Schlusse von Nr. 20 Gesagten liegen alle Punkte von $C$ im Innern von $k_w$ oder auf $k_w$ auch zugleich im *Innern* von $W_1$ — weder $PA_2$ noch $PA_1$ treffen kann, liegt also auch noch $A_2$ ganz innerhalb und $A_1$ ganz außerhalb von $C$. Der Kreisbogen $\beta$ tritt nun bei $P$ in das Äußere von $C$ und verläuft zunächst (nach der Konstruktion von $k_w$) außerhalb von $W_1$ und $W_2$. Um nun die Kurve $C$ zum erstenmal in $Q$ zu treffen, muß $k_w$ in das Innere des Winkelraumes $W_1$ gelangen, muß daher eine der beiden Geraden $g_1$ oder $g_2$ schneiden. Da dieser Schnittpunkt selber noch außerhalb von $C$ liegen muß, kann er nur $A_1$ sein. Weil schließlich der Endpunkt $Q'$ von $\beta$ im *Innern* des Winkelraumes $W_1$ liegt, kann $\beta$ überhaupt nur eine der beiden Geraden $g_1$ und $g_2$ treffen, er trifft also nur $g_1$ und nicht mehr $g_2$.

und daher ist auch wegen (4, 6), (4, 8) und (4, 7)

$$(4,9)\qquad m_{k,c}\bar{\beta} \leqq m_{C,c}\gamma \leqq \frac{1+|\varphi(c)|}{1-|\varphi(c)|}\, m_{C,w_0}\gamma \leqq \frac{1+|\varphi(c)|}{1-|\varphi(c)|}\, \Delta'_C .$$

Wir wollen nun $m_{k,c}\bar{\beta}$ zu $\bar{\beta}$ in Beziehung setzen und wenden zu diesem Zwecke den Hilfssatz 6 an. Beachtet man, daß nach dem in Nr. 20 Gesagten für den in diesem Hilfssatz genannten Winkel $\alpha_0$ als obere Schranke von $\alpha = \dfrac{\bar{\beta}}{\varrho}\ 2(\eta_1+\eta)$ gesetzt werden kann, so folgt nach diesem Hilfssatz

$$(4,10)\qquad m_{k,c}\bar{\beta} \geqq A\frac{\bar{\beta}}{\varrho}, \quad A = \frac{1-\lambda^2}{(1-\lambda)^2 + 4\lambda\sin^2\left(\eta_1+\eta+\dfrac{\chi}{2}\right)} .$$

Dabei ist $\lambda = \dfrac{|c-a|}{\varrho}$ und $\chi\ (\geqq 0)$ der Winkel $caw_1$ im Dreieck $caw_1$. Somit folgt schließlich, da die Länge des Kreisbogens $\bar{\beta} > \overline{PQ} \equiv \delta_w$ ist, wegen (4, 10) und (4, 9)

$$A\frac{\delta_w}{\varrho} \leqq \frac{1+|\varphi(c)|}{1-|\varphi(c)|}\, \Delta'_C, \qquad \Delta'_C \geqq \delta_w \frac{1-|\varphi(c)|}{1+|\varphi(c)|}\, \frac{1}{\varrho} A .$$

Nun beachte man, daß zwischen $\delta_w$ und der Länge der Sehne $\overline{w\,w_1} \equiv \Delta_w$ nach (4, 5) die Relation

$$\frac{\delta_w}{\Delta_w} \geqq \frac{1-\omega'}{\varkappa}\, \frac{\sin^2(\eta_1-\eta)}{\sin^2(\eta_1+\eta)}$$

besteht. Es gilt daher

$$\Delta'_C \geqq \Delta_w \frac{1-\omega'}{\varkappa}\, \frac{\sin^2(\eta_1-\eta)}{\sin^2(\eta_1+\eta)}\, \frac{A\sigma}{\sigma\varrho}\, \frac{1-|\varphi(c)|}{1+|\varphi(c)|}$$

und somit wegen $\sigma\varrho = |w_1 - c|$, $1+|\varphi(c)| < 2$

$$(4,11)\qquad \Delta'_C \geqq \Delta_w \frac{1-\omega'}{\varkappa}\, \frac{\sin^2(\eta_1-\eta)}{\sin^2(\eta_1+\eta)}\, \frac{A\sigma}{2}\, \frac{1-|\varphi(c)|}{|w_1-c|} .$$

23. Wir können hier den Faktor $A\sigma$ noch weiter abschätzen, indem wir jetzt über $\sigma$ geeignet verfügen und dann den Zusatz zum Hilfssatz 6 anwenden. Die im Hilfssatz 6 und Zusatz mit $\alpha_0$ bezeichnete Größe kann hier, wie oben gesagt (Nr. 22), gleich $2(\sqrt{\eta}+\eta)$ gesetzt werden. Wir wählen nun die in diesem Zusatz benutzten Größen $m = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, $1+\vartheta = (1+\sqrt{\eta})^{-\frac{2}{3}}$; dann wird also $\sigma = \eta^{\frac{1}{3}}$. Ferner bemerken wir, daß die Voraussetzung der an diesen Zusatz angeschlossenen Bemerkung mit $\Psi = \psi$, $\omega = \eta_1 = \sqrt{\eta}$ erfüllt sind. (Eventuell muß $\eta$ für die Anwendbarkeit dieses Zusatzes noch weiter verkleinert werden.) Nach diesem Zusatz und der anschließenden Bemerkung gibt es daher zu jedem *hinreichend kleinen* $\eta$ ein nur von $\eta$ abhängiges $\varepsilon_1(\eta)$ mit $0 < \varepsilon_1 < 1$, das mit $\eta \downarrow 0$ selber gegen 0 geht, so daß

$$(4,12)\qquad A\sigma \geqq 2(1-\varepsilon_1)\cdot\cos\psi, \qquad 0 < \varepsilon_1 < 1,$$

ist. Wir denken uns $\eta$ so gewählt, daß (4, 12) gilt.

Durch diese Festlegung von $\sigma$ ist das im Satze genannte $R = \sigma\varrho$ bestimmt, und es ist, wie bereits oben angegeben wurde,

$$(4,3') \quad R = \frac{1-\omega'}{\varkappa} \frac{\sin(\eta_1-\eta)}{\sin(\eta_1+\eta)} \frac{|w-w_1|}{2\sin(\mu+\sqrt{\eta})} \eta^{\frac{1}{3}} = (1-\varepsilon) \frac{|w-w_1|}{2\sin(\mu+\sqrt{\eta})} \frac{1}{\varkappa} \eta^{\frac{1}{3}},$$

$$-\eta \leqq \mu \leqq \eta, \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

wo $\varepsilon$ nur von $\eta$ und $r$ abhängt und mit $\eta \downarrow 0$ (wegen $r \leqq \eta$) gleichfalls gegen 0 geht. Wegen $\sin(\mu+\sqrt{\eta}) \geqq \sin\left(\sqrt{\eta}(1-\sqrt{\eta})\right) \geqq \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\eta} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\eta}$, $|w-w_1| \leqq r \leqq \eta$ und $\varkappa \geqq 1$ ist $R \leqq \pi \cdot |w-w_1|^{5/6}$. —

Schließlich wollen wir noch in (4, 11) $1-|\varphi(c)|$ durch $|1-\varphi(c)|$ zu ersetzen suchen und machen hierzu von der Tatsache Gebrauch, daß die Abbildung $z = \varphi(w)$ in $w = w_1$ winkeltreu ist. Denn danach [33]) wird der oben genannte Sektor $S_r$, den der Winkelraum $W$ (der Öffnung $2\psi$) aus dem Kreise $\mathfrak{K}$ mit dem Radius $r$ um $w_1$ herausschneidet, durch $z = \varphi(w)$ auf einen Bereich der $z$-Ebene abgebildet, der in dem Sektor

$$|z-1| \leqq \varepsilon'(r), \qquad \pi - (\psi + \varepsilon''(r)) \leqq \arg(z-1) \leqq \pi + \psi + \varepsilon''(r)$$

liegt, wo $\varepsilon'(r)$, $\varepsilon''(r) > 0$ sind — bei festem $\psi$ — *nur* von $r$ abhängen und mit $r \downarrow 0$ selber gegen 0 gehen. Schränkt man daher $r$ auf hinreichend kleine Werte ein, so gibt es zu jedem solchen $r$ ein nur von $r$ abhängiges $\delta(r)$ mit $0 < \delta(r) < 1$, so daß für alle Punkte $c$ in $S_r$ im Abstande $R = \varrho\sigma < r$ von $w_1$

$$(4,13) \quad \frac{1-\varphi(c)}{|1-\varphi(c)|} \geqq (1-\delta(r))\cos\psi, \qquad 0 < \delta(r) < 1, \qquad \lim_{r \downarrow 0} \delta(r) = 0,$$

gilt.

Somit gibt es also ein nur von $\eta$ und $r$ abhängiges $q_1 > 0$, so daß für alle $w$ auf $C$ mit $|w-w_1| \leqq q_1$ und die ihnen zugeordneten Punkte $c$ in $S_r$ im Abstande $R$ von $w_1$ nach (4, 11), (4, 12), (4, 13)

$$\frac{\Delta' C}{\Delta_w} \geqq \frac{(1-\omega')(1-\delta(r))(1-\varepsilon_1(\eta))}{\varkappa} \frac{\sin^2(\eta_1-\eta)}{\sin^2(\eta_1+\eta)} \frac{|\varphi(w_1)-\varphi(c)|}{|w_1-c|} \cos^2\psi$$

ist. Hiermit ist die Relation (4, 1) mit $K_1 = \frac{(1-\omega')(1-\delta)(1-\varepsilon_1)}{\varkappa} \frac{\sin^2(\eta_1-\eta)}{\sin^2(\eta_1+\eta)}$ — für den Fall $\tau = 1$ — bewiesen. Die Konstante $K_1$ hängt noch von $\eta$ und $r$ ab. Da nun aber wegen $r \leqq \eta$ mit $\eta \downarrow 0$ auch sicher $r \to 0$ konvergiert, so strebt $K_1$ mit $\eta \downarrow 0$ gegen $\frac{1}{\varkappa}$. Hieraus ergibt sich auch die Richtigkeit der zweiten Behauptung des Satzes 1 über die Konstante $K_1$. Damit ist der Satz 1 für den Fall $\tau = 1$ bewiesen. —

---

[33]) Vgl. C. Carathéodory, Schwarz-Festschrift, S. 40–41 und E. Lindelöf, Compte rendu du 4ième congrès des mathématiciens scandinaves, Stockholm 1916, S. 87.

24. Es sei allgemeiner $\tau$ beliebig, $0 < \tau \leqq 2$. Man kann diesen Fall folgendermaßen auf den Fall $\tau = 1$ zurückführen.

Durch die Transformation $u = (w - w_1)^{1/\tau}$ geht $C$ in eine geschlossene Kurve $\Gamma$ in der $u$-Ebene über, die in dem $w = w_1$ entsprechenden Punkte $u = 0$ eine Tangente besitzt. $\Gamma$ braucht aber nicht notwendig (in der schlichten Ebene) doppelpunktfrei zu sein. Wählt man aber auf $C$ einen $P$ als inneren Punkt enthaltenden passenden Bogen $C'$ und ergänzt man diesen geeignet durch einen bis auf die Endpunkte innerhalb von $C$ verlaufenden Jordanbogen zu einer geschlossenen Jordankurve $C_1$, so ist das Bild $\Gamma_1$ von $C_1$ bei dieser Transformation eine in der $u$-Ebene doppelpunktfreie geschlossene Jordankurve, die in $u = 0$ eine Tangente hat. — Der Winkelraum $W$ (der Öffnung $2\psi$) geht dabei in einen von zwei von $u = 0$ ausgehenden symmetrisch zur Innennormalen von $\Gamma_1$ in $u = 0$ verlaufenden Strahlen gebildeten Winkelraum $W'$ der Öffnung $2\frac{\psi}{\tau}$ über. Bezeichnet man die Abbildungsfunktion des Innern von $\Gamma_1$ auf $|z| < 1$ mit $z = \psi_1(u)$, die des Inneren $G_1$ von $C_1$ auf $|z| < 1$ mit $z = \varphi_1(w)$, so ist

$$\left| \frac{\psi_1(u) - \psi_1(0)}{u} \right| = \left| \frac{\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}} \right| .$$

Berücksichtigt man nun ferner die am Schlusse von Nr. 14 gemachte Bemerkung über das Verhalten der Unbewalltheitsfunktion gegenüber der obigen Transformation, so sieht man, daß es auch für $\varphi_1(w)$ zu jedem $\omega$ mit $0 < \omega < 1$ ein $q_1' > 0$ und zu jedem $w \neq w_1$ auf $C$ mit $|w - w_1| \leqq q_1'$ ein $R' > 0$ gibt, so daß für alle $c$ in $W$ und $G$ mit $|c - w_1| = R'$

$$(4,14) \qquad \left| \frac{\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}} \right| \geqq \frac{1 - \omega}{\varkappa^{1/\tau}} \left| \frac{\varphi_1(c) - \varphi_1(w_1)}{(c - w_1)^{1/\tau}} \right| \cos^2\left(\frac{\psi}{\tau}\right)$$

gilt. Ist nun $\varphi(w)$ die Abbildungsfunktion des Innern von $C$ auf $|z| < 1$, so konvergieren nach dem Hilfssatz 4 die Quotienten

$$\frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1)} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi(c) - \varphi_1(w_1)}{\varphi_1(c) - \varphi_1(w_1)}$$

mit $w \to w_1$ bzw. $c \to w_1$ gegen ein und dieselbe von 0 verschiedene Zahl. Daher darf man in (4, 14) $(\varphi_1(w) - \varphi_1(w_1))$ durch $(\varphi(w) - \varphi(w_1))$ und gleichzeitig $(\varphi_1(c) - \varphi_1(w_1))$ durch $(\varphi(c) - \varphi(w_1))$ ersetzen, wenn man $q_1'$ eventuell noch hinreichend verkleinert. — Damit ist der Satz 1 in allen Teilen bewiesen. —

25. Anmerkung. Für eine spätere Anwendung (Satz 6) ist es nützlich, über die im Satz 1 genannte Zahl $R$ noch eine etwas genauere Angabe als dort zu machen. Aus der Relation (4, 3) folgt, daß der Quotient $\left|\frac{w - w_1}{R}\right|$ zwischen zwei von $\eta$ und $r$ abhängigen positiven Schranken liegt,

die aber gegen 0 konvergieren, wenn man $\eta \downarrow 0$ konvergieren läßt. Da nach der Transformation $u = (w - w_1)^\alpha$ der Quotient $\left|\frac{w-w_1}{R}\right|$ in $\left|\frac{w-w_1}{R}\right|^\alpha$ übergeht, so bleibt die analoge Behauptung über den entsprechenden Quotienten auch für den Fall einer beliebigen Ecke der Öffnung $\pi\tau$ richtig. Wir heben diese Tatsache besonders hervor: *Es sei $\omega$ mit $0 < \omega < 1$ fest vorgegeben, und es sei $q_1$ die nach Satz 1 zu $K_1 = \frac{1-\omega}{\varkappa^{1/\tau}}$ zugeordnete Konstante, so daß für alle $w \neq w_1$ auf $C$ mit $|w - w_1| \leqq q_1$ und die zugeordneten Punkte $c$ in $W$ und $G$ mit $|c - w_1| = R$ die Ungleichung (4, 1) gilt. Dann wird nach dem bei unserem Beweise angegebenen Verfahren $R$ zu $w$ derart zugeordnet, daß der Quotient $\frac{|w-w_1|}{R}$ zwischen zwei positiven Schranken $\mu_1, \mu_2$ bleibt:*

$$0 < \mu_1 \leqq \frac{|w - w_1|}{R} \leqq \mu_2.$$

*Die so erhaltenen Konstanten $\mu_1$ und $\mu_2$ konvergieren aber gegen 0, wenn man $\omega \to 0$, d. h. die Konstante $K_1 \to \frac{1}{\varkappa^{1\tau}}$ und somit auch $q_1 \to 0$ gehen läßt.*

26. Wir leiten nunmehr eine der Ungleichung (4, 1) des Satzes 1 analoge Abschätzung für den Differenzenquotienten nach oben ab.

Satz 2. *Unter denselben Voraussetzungen wie im Satze 1 gibt es zwei positive Konstanten $K_2$ und $q_2$, sowie zu jedem $w \neq w_1$ auf $C$ mit $|w - w_1| \leqq q_2$ ein $R > 0$, so daß für alle Punkte $c'$ in $W$ und $G$ im Abstande $R$ von $w_1$*

$$(4,15) \qquad \frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} \leqq K_2 \frac{|\varphi(c') - \varphi(w_1)|}{|c' - w_1|^{1/\tau}} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\psi}{\tau}\right)}$$

*gilt.*

*Ist $\varkappa = \overline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$, so kann man $K_2 = (1 + \omega)\varkappa^{1/\tau}$ setzen, wo $\omega$ beliebig klein gemacht werden kann, wenn nur $q_2$ hinreichend klein angenommen wird. Es ist $R \leqq \left(\frac{3}{2}\pi^2\right)^\tau \varkappa |w - w_1|^{5/6}$.*

Beweis. Es sei wieder $\varphi(w_1) = 1$ und zunächst $\tau = 1$. Es sei $C^*$ einer der beiden in $P$ zusammenstoßenden Kurvenzweige von $C$. Wie beim Beweise des Satzes 1 können wir die Tangente in $P$ zwischen zwei durch $P$ hindurchgehende Geraden $g_1$ und $g_2$ einschließen, die mit dieser einen Winkel der Öffnung $\eta$ bilden, $0 < \eta < \frac{\pi}{16}$, $\sqrt{\eta} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \nu_0$. Dann beschreiben wir um $P$ den Kreis $\mathfrak{K}$ mit so kleinem Radius $r \leqq \eta$, daß alle innerhalb und auf $\mathfrak{K}$ gelegenen Punkte von $C$ in einen der beiden von $g_1$ und $g_2$ gebildeten (Scheitel-) Winkelräume $W_1$ oder $W_2$ der Öffnung $2\eta$ hinein-

fallen, und daß ferner mit jedem Punkte $Q$ von $C$ im Innern von $\mathfrak{K}$ oder auf $\mathfrak{K}$ auch einer der Bögen $\overset{\frown}{PQ}$ von $C$ (bis auf $P$) sich im Innern eines der Winkelräume befindet. Darüber hinaus sei $r$ so klein, daß $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} < \frac{3}{2}\varkappa$ für $\varepsilon \leqq r$ ist. Dann liegt, wie leicht zu sehen ist, auch der durch $\mathfrak{K}$ aus dem Winkelraum $W$ herausgeschnittene Sektor $S_r$ ganz innerhalb von $G$.

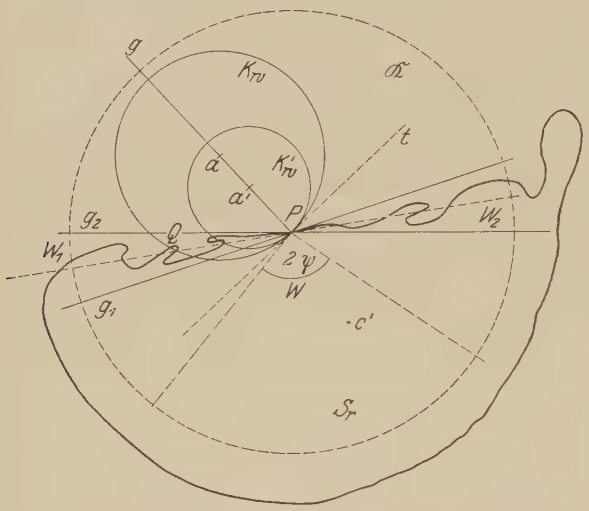



Fig. 13.

Dann ziehen wir von $P$ aus unter dem Winkel $\eta_1 = \sqrt{\eta} > \eta$ gegen die äußere Normale in $P$ auf derselben Seite der Normalen wie der oben genannte Zweig $C^*$ von $C$ einen Strahl $g$, der mit einem an $P$ anstoßenden Stück außerhalb von $C$ verläuft. Für alle hinreichend nahe bei $P$ gelegenen Punkte $w$ von $C^*$ können wir einen durch $P$ und $w$ hindurchgehenden Kreis $k'_w$ finden, dessen Mittelpunkt $a'$ auf $g$ liegt, dessen Radius $\varrho' = \overline{a'w}$ ist, und der ganz innerhalb von $\mathfrak{K}$ liegt. Sämtliche Schnittpunkte von $k'_w$ mit $C$ liegen dann auf derselben Seite der Normalen in $P$ wie der Strahl $g$ und alle innerhalb eines der beiden Winkelräume $W_1$, $W_2$, etwa von $W_1$. $W_1$ enthält also ein an $P$ anstoßendes Stück von $C^*$. — Zwischen dem Punkte $w$ und dem Radius von $k'_w$ besteht die Relation

$$\varrho' = \frac{|w - w_1|}{2\sin(\sqrt{\eta} + \mu)}, \qquad -\eta \leqq \mu \leqq \eta,$$

wo $\mu$ der Winkel ist, den die von $w$ nach $w_1$ gezogene Sehne von $C$ mit der Tangente an $C$ in $w_1$ bildet ($\mu$ werde dabei positiv gerechnet, wenn $w$ auf derselben Seite der Tangente liegt wie die Außennormale von $C$ in $w_1$). Für die im Satze genannte Zahl $R$ wird sich später ganz ähnlich wie beim Satze 1 der Wert

$$(4,16) \qquad R = \frac{1}{1-\varepsilon}\,\eta^{1/3}\frac{|w - w_1|}{2\sin(\sqrt{\eta} + \mu)}\varkappa, \qquad 0 < \varepsilon < 1,$$

ergeben, wo $\varepsilon$ mit $\eta \downarrow 0$ gleichfalls gegen 0 geht.

27. Es werde nun $\varrho > \varrho'$ durch die Relation

$$(4,17) \qquad \varrho = \varkappa\,\varrho'\,\frac{1}{1-\omega'}\,\frac{\sin(\eta_1 + \eta)}{\sin(\eta_1 - \eta)}$$

bestimmt, wo $0 < \omega' \leqq \frac{1}{2}$ und $\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} \leqq \varkappa(1+\omega')$ für alle $\varepsilon \leqq r$ und $\lim_{r \downarrow 0} \omega' = 0$ ist. Dann gilt auch offenbar

$$\varkappa(1+\omega') < \frac{2\varrho \sin(\eta_1 - \eta)}{2\varrho' \sin(\eta_1 + \eta)} = \varkappa \frac{1}{1-\omega'}. \tag{4,18}$$

Wir markieren den Punkt $a$ auf $g$ im Abstande $\varrho$ von $P$ und beschreiben um $a$ den Kreis $k_w$ durch $P$ mit dem Radius $\varrho$. Dieser Kreis brauchte nun zunächst nicht mehr ganz im Innern von $\mathfrak{R}$ zu liegen; da aber die Relation (4,17) nur das Verhältnis von $\frac{\varrho}{\varrho'}$ festlegt, können wir $w$ in einer solchen Nähe von $P$ annehmen und somit $\varrho'$ derart verkleinern, daß $\varrho$ beliebig klein ist und daher der Kreis $k_w$ innerhalb von $\mathfrak{R}$ zu liegen kommt. Wir denken uns $w$ so nahe an $w_1$ gewählt. Der Zähler in (4,18) ist gleich der Länge $d$ der kürzesten von $P$ ausgehenden und im Winkelraum $W_1$ verlaufenden Sehne von $k_w$, der Nenner gleich der Länge $d'$ der längsten derartigen Sehne von $k'_w$. Es sei $B$ ein Kurvenbogen von $C$, der von zwei von $P$ verschiedenen Schnittpunkten von $k'_w$ mit $C$ begrenzt ist und sonst außerhalb von $k'_w$ verläuft, falls es einen solchen Bogen gibt. Da der im Winkelraum $W_1$ gelegene Kreisbogen von $k'_w$ innerhalb des Kreises mit dem Radius $d'$ um $P$ liegt, kann wegen der Voraussetzung $\Delta(\varepsilon) \leqq \varkappa(1+\omega')\cdot\varepsilon$ und wegen (4,18) $B$ nicht in das Äußere des Kreises mit dem Radius $d'\varkappa(1+\omega') < d$ eindringen. Weil ferner der innerhalb des Winkelraumes $W_1$ liegende Kreisbogen von $k_w$ *außerhalb* des Kreises mit dem Radius $d$ um $P$ liegt, kann $B$ den Kreis $k_w$ nicht mehr treffen. *Wenn man also $C$ von $P$ aus in den Winkelraum $W_1$ hinein durchläuft, so werden sämtliche Schnittpunkte von $k_w$ mit $C$ hinter dem Punkte $w$ angetroffen.* — Ferner gilt auch für die Länge der längsten von $P$ ausgehenden Sehne $d_1$ von $k_w$ in $W_1$ $(= 2\varrho \sin(\eta + \eta_1))$ und die der kürzesten derartigen Sehne $d'_1$ von $k'_w$ $(= 2\varrho' \sin(\eta_1 - \eta))$ die Relation

$$\frac{d_1}{d'_1} = \frac{2\varrho \sin(\eta_1+\eta)}{2\varrho' \sin(\eta_1-\eta)} = \frac{\varkappa}{1-\omega'} \frac{\sin^2(\eta_1+\eta)}{\sin^2(\eta_1-\eta)}. \tag{4,19}$$

28. Für das Folgende bemerken wir noch, daß die Länge des kleineren der von $g_2$ abgeschnittenen Kreisbögen von $k_w$ gleich $2\varrho(\eta_1+\eta)$ ist. Dabei ist der in das Äußere von $C$ eindringende Schenkel von $W_1$ gerade eine Halbgerade von $g_2$. Da jeder Schnittpunkt des Kreises $k_w$ mit $C$ innerhalb des Winkelraumes $W_1$ liegt, ist die Länge eines jeden kleineren Kreisbogens von $k_w$ von $P$ bis zu einem solchen Schnittpunkt mit $C$ höchstens gleich $2\varrho(\eta_1+\eta)$. Ferner liegt mit jedem Punkte $Q$ von $C$ innerhalb von $k_w$ oder auf $k_w$ auch einer der Bögen $\overset{\frown}{PQ}$ von $C$ (bis auf $P$) im Innern des Winkelraumes $W_1$, da ja $k_w$ im Innern von $\mathfrak{R}$ liegt (vgl. Nr. 26).

Damit haben wir unsere Annahme über die Unbewalltheitsfunktion, soweit sie für den Beweis in Betracht kommt, vollständig ausgenützt. —

29. Es sei nun $Q$ der erste Schnittpunkt von $k_w$ mit $C$, den man beim Durchlaufen von $C$ von $P$ aus in das Äußere von $k_w$ hinein antrifft. Wir bezeichnen den hierbei durchlaufenen Kurvenbogen $\overset{\frown}{PQ}$ mit $\alpha$. Der zu ihm komplementäre Bogen auf $C$ sei $\beta$. $\gamma$ sei der Kreisbogen $\overset{\frown}{PQ}$ von $k_w$, der bei $P$ in das Innere von $C$ eindringt. Der Teilbogen $\overset{\frown}{ww_1}$ von $\beta$ werde mit $\bar{\beta}$ bezeichnet. Wir wählen nun die in der Formulierung des Satzes angegebene Größe $R = \sigma\varrho$, wo $\sigma = \eta^{1/3}$ gesetzt sei, und nehmen in $S_\gamma$ einen Punkt $c'$ im Abstande $R$ von $P$ an (es ist $R = \sigma\varrho < \varrho < r$). Nach (4, 17) hat also $R$ in der Tat den in (4, 16) angegebenen Wert. Offenbar ist

$$R = \frac{|w - w_1|}{2\sin(\sqrt{\eta} + \mu)} \frac{\varkappa\eta^{\frac{1}{3}}}{1-\omega'} \frac{\sin(\sqrt{\eta}+\eta)}{\sin(\sqrt{\eta}-\eta)} \leqq \frac{|w-w_1|}{2\frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{\eta}}{2}} \frac{\varkappa\eta^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{2}} \frac{\frac{3}{2}\sqrt{\eta}}{\frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\sqrt{\eta}}$$

und wegen $\eta \geqq r \geqq |w - w_1|$

$$R \leqq \tfrac{3}{2}\pi^2 \varkappa |w - w_1|^{\frac{5}{6}}.$$

30. Der Kreisbogen $\gamma = \overset{\frown}{PQ}$ bildet mit dem Bogen $\alpha$ von $C$ offenbar eine geschlossene Jordankurve $\Gamma$. $\Gamma$ enthält den Punkt $c'$ im Innern. Dies folgt wieder aus dem Hilfssatz 3 in Nr. 5, wenn man folgendes beachtet: Der Kurvenbogen $\overset{\frown}{PQ} = \beta$ liegt nach dem oben Gesagten ganz innerhalb des Winkelraumes $W_1$. Da die Tangente $t$ von $k_w$ in $P$ sicher außerhalb von $W_1$ und $W_2$ verläuft, trifft der Bogen $\beta = \overset{\frown}{PQ}$ diese Tangente $t$ nur in $P$. Da aber auch der Kreisbogen $\gamma = \overset{\frown}{PQ}$ mit $t$ nur den Punkt $P$ gemeinsam hat, und also die beiden Bögen $\beta$ und $\gamma$ von $P$ ausgehen und den gemeinsamen Endpunkt $Q$ ($\neq P$) haben, so liegen sie beide auf derselben Seite von $t$, und zwar auf derselben Seite wie der Strahl $g$ und die *Außennormale* von $C$ in $P$. Der Sektor $S_\gamma$, der wegen ($\eta_1 < \nu_0$) $t$ nicht enthält, liegt ganz auf derselben Seite von $t$ wie die *Innennormale* von $C$ in $P$, also auf der *entgegengesetzten*. Auf dieser Seite befindet sich somit auch $c'$, so daß in der Tat der Hilfssatz 3 anwendbar ist. Die Kurve $C$ und der Kreis $k = k_w$ stellen dann offenbar eine Konfiguration dar, die den Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 genügt, wenn für die dort genannten Bögen $\alpha, \beta, \bar{\beta}, \gamma$ und die geschlossene Jordankurve $\Gamma$, sowie den genannten Punkt $c'$ gerade die hier mit denselben Buchstaben bezeichneten Gebilde gewählt werden. Daher gilt ($m_{C,c'}\bar{\beta} = \Delta_C''$ gesetzt)

$$\Delta_C'' \equiv m_{C,c'}\bar{\beta} \leqq m_{k_w,c'}\gamma.$$

31. Nach Hilfssatz 7 ist mit $\alpha_k' = m_{k_w, c'}\gamma$ und $\Psi = \psi_1 + \eta_1 \leqq \psi + \eta_1 < \frac{\pi}{2}$, wo $\psi_1$ der Winkel zwischen $\overline{c' w_1}$ und der Innennormalen von $C$ in $w_1$ ist,

$$(4,20) \qquad \Delta_C'' \leqq m_{k_w, c'}\gamma \leqq \frac{(2+\sigma)^2}{2\sigma\cos(\psi_1+\eta_1)}\frac{\gamma}{\varrho} = A_1\frac{\gamma}{\varrho}.$$

Dabei ist die Länge von $\gamma$ gleichfalls mit $\gamma$ bezeichnet.

Da $\psi + \eta_1 < \frac{\pi}{2}$ und $\sigma = \eta^{1/3}$ gesetzt ist, kann man den Ausdruck $A_1$ gleichmäßig für $0 \leqq \psi_1 \leqq \psi$ so abschätzen

$$A_1 = \frac{1}{\sigma}\frac{(2+\sigma)^2}{2\cos(\psi_1+\eta_1)} \leqq \frac{1}{\sigma}\frac{2}{\cos\psi_1}(1+h(\eta)),$$

wo $h(\eta)$ nur von $\eta$ abhängt und mit $\eta \to 0$ selber gegen 0 geht. Somit erhalten wir aus (4,20)

$$(4,21) \qquad \Delta_C'' \leqq \frac{2}{\sigma\cos\psi_1}(1+h(\eta))\frac{\gamma}{\varrho}.$$

32. Hier wollen wir nun $\Delta_C'' = m_{C,c'}\bar{\beta}$ durch $\Delta_C' = m_{C,w_1}\bar{\beta}$ ersetzen und schätzen zu diesem Zwecke den Quotienten $\frac{\Delta_{C_1}'}{\Delta_C''}$ nach oben nach dem Hilfssatze 9 ab. Für die Anwendung dieses Hilfssatzes und auch für die weiter unten folgenden Abschätzungen müssen wir die oben eingeführten und auf hinreichend kleinen Werte beschränkten Zahlen $\eta$ und $r$ noch weiter einschränken. Wir bezeichnen den weiter unten zu benutzenden Ausdruck $4A_1\sqrt{\eta}$ mit $\delta$ und nehmen $\eta$ so klein an, daß

$$(4,22) \quad \delta = 4A_1\sqrt{\eta} \leqq \frac{(2+\eta^{1/3})^2}{2\eta^{1/3}\cos(\psi+\sqrt{\eta})}4\sqrt{\eta} = \frac{4(2+\eta^{1/3})^2\eta^{1/6}}{2\cos(\psi+\sqrt{\eta})} < \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)$$

ist. Wegen der Winkeltreue der durch $z = \varphi(w)$ vermittelten Abbildung in $w = w_1$ folgt[34]), daß das Bild des oben genannten Sektors $S_r$ in der $z$-Ebene innerhalb des Bereiches

$$(4,23) \quad |z-1| \leqq l(r), \quad \pi - (\psi + l'(r)) \leqq \arc(z-1) \leqq \pi + (\psi + l'(r))$$

liegt, wo $l(r)$ und $l'(r)$ positiv sind, nur von $r$ abhängen und mit $r \to 0$ selber gegen 0 konvergieren. Wir wählen nun $r$ so klein, daß $l'(r) < \nu_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)$ und $l(r) < \sin\frac{\nu_0}{2}$ ist. (Dann liegt, wie leicht zu sehen ist, der Sektor (4,23) (bis auf den Punkt $z=1$) ganz im Innern des Einheitskreises.)

33. Unter diesen Annahmen sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes 9 für $\alpha' = \Delta_C'$, $\alpha'' = \Delta_C''$, $c = c'$,

$$\tau_1 = \psi + l'(r) < \psi + \nu_0 < \frac{\pi}{2}$$

[34]) Vgl. die in der Fußnote [33]) zitierten Abhandlungen.

sicher erfüllt. Man beachte noch, daß, wie in Nr. 28 gesagt, der Bogen $\gamma \leqq 2\varrho(\eta + \sqrt{\eta})$ ist, so daß für den Bogen $\Delta_C'' = m_{C,c'}\,\tilde{\beta}$ sicher wegen (4, 22) die Ungleichung gilt

$$\Delta_C'' \leqq A_1 \frac{\gamma}{\varrho} \leqq A_1\, 2(\sqrt{\eta} + \eta) \leqq 4\sqrt{\eta}\, A_1 = \delta < \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \tau_1\right).$$

Schließlich gilt für $\chi = |\arc \varphi(c')|$ wegen $l(r) \leqq \sin\frac{\nu_0}{2}$

$$\sin\chi \leqq l(r) \leqq \sin\frac{\nu_0}{2}, \qquad \chi \leqq \frac{\nu_0}{2} \quad \text{und} \quad \chi \leqq \frac{\pi}{2}\, l(r).$$

Daher gilt für jedes nach der obigen Konstruktionsvorschrift in $\mathfrak{K}$ wählbare $w$ nach dem Hilfssatz 9

$$\Delta_C' \leqq \frac{1 - |b|}{2\,|b|\cos^2\left(\psi + l'(r) + \frac{\delta + \chi}{2}\right)}\, \Delta_C'', \qquad b = \varphi(c'), \tag{4,24}$$

wo

$$l'(r) + \frac{\delta + \chi}{2} \leqq \nu_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\nu_0}{2} + \frac{\nu_0}{2}\right) = \frac{3}{2}\,\nu_0 = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) < \frac{\pi}{2} - \psi$$

ist. Da $\chi \leqq \frac{\pi}{2}\, l(r)$ ist und $\delta \to 0$ mit $\eta \to 0$ geht und $|b| - 1| \leqq l(r)$ ist, können wir (4, 24) weiter abschätzen

$$\Delta_C' \leqq \frac{1 - |b|}{2\cos^2\psi}\, \Delta_C''(1 + h_1(\eta))(1 + \delta_1(r)), \tag{4,25}$$

wo $h_1(\eta)$, $\delta_1(r)$ nur von $\eta$ bzw. $r$ abhängen und mit $\eta \to 0$ bzw. $r \to 0$ gleichfalls gegen 0 gehen.

34. Nun beachte man, daß der Bogen $\overset{\frown}{PQ} = \gamma$ die Länge $2\varrho(\mu' + \sqrt{\eta})$ hat, wo $\mu'$ der mit Vorzeichen genommene Winkel ist, den die Sehne $\overline{PQ}$ mit der Tangente in $P$ bildet. Daher ist (wegen $\mu' \leqq \eta$), unter $d_w$ die Länge der Sehne $\overline{PQ}$ verstanden,

$$\frac{\gamma}{d_w} = \frac{2\varrho(\mu' + \sqrt{\eta})}{2\varrho\sin(\mu' + \sqrt{\eta})} \leqq 1 + h_2(\eta), \tag{4,26}$$

wo $h_2(\eta)$ nur von $\eta$ abhängt und mit $\eta \downarrow 0$ gleichfalls gegen 0 geht. Ferner gilt nach (4, 19) zwischen der Länge $D_w$ der Sehne $\overline{w\,w_1}$ und der Sehne $\overline{PQ}$ die Relation

$$\frac{D_w}{d_w} \geqq \frac{(1 - \omega')}{\varkappa}\, \frac{\sin^2(\eta_1 - \eta)}{\sin^2(\eta_1 + \eta)}. \tag{4,27}$$

Schließlich beachte man, daß wegen der obigen Annahme ((4, 23)) über $r$

$$\frac{1 - |\varphi(c')|}{|1 - \varphi(c')|} \leqq (1 + \delta_2(r))\cos\psi_1 \tag{4,28}$$

ist, wo $\delta_2(r)$ nur von $r$ abhängt und mit $r \to 0$ gegen 0 geht.

Somit gibt es ein nur von $\eta$ und $r$ abhängiges $q_2 > 0$, so daß für alle $w$ auf $C$ mit $|w - w_1| \leqq q_2$ und die zugeordneten Punkte $c'$ in $G$ und $W$ im Abstande $R$ von $w_1$ wegen (4, 25), (4, 21), (4, 26), (4, 27), (4, 28)

$$\frac{\Delta_c'}{D_w} \leqq \left| \frac{\varphi(c') - \varphi(w_1)}{c' - w_1} \right| \frac{(1+h(\eta))(1+h_1(\eta))(1+h_2(\eta))(1+\delta_1(r))(1+\delta_2(r))}{\cos^2\psi}$$
$$\prec \frac{\sin^2(\eta_1+\eta)}{\sin^2(\eta_1-\eta)} \frac{\varkappa}{1-\omega'}$$

gilt. Hiermit ist die Relation (4, 15) — für den Fall $\tau = 1$ — mit

$$K_2 = \frac{\varkappa(1+h(\eta))(1+h_1(\eta))(1+h_2(\eta))(1+\delta_1(r))(1+\delta_2(r))}{(1-\omega')} \frac{\sin^2(\eta_1+\eta)}{\sin^2(\eta_1-\eta)}$$

bewiesen. $K_2$ hängt noch von $\eta$ und $r$ ab. Da wegen $r \leqq \eta$ mit $\eta \to 0$ auch $r \to 0$ strebt, so konvergiert $K_2 \to \varkappa$ mit $\eta \downarrow 0$. Hieraus folgt die zweite Behauptung des Satzes 2 über die Konstante $K_2$ — für den Fall $\tau = 1$.

Der Fall $\tau \neq 1$ kann durch wörtlich dieselben Überlegungen wie beim Satze 1 (Nr. 24) auf den Fall $\tau = 1$ zurückgeführt werden.

Auch hier gilt eine ganz analoge Bemerkung über den Quotienten $\left|\frac{w - w_1}{R}\right|$ wie beim Satze 1 (Nr. 25).

35. Wir formulieren noch das folgende, sich unmittelbar aus den Sätzen 1 und 2 ergebende

Korrolar. *Es sei $C$ eine geschlossene Jordankurve, die im Punkte $w = w_1$ eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leqq 2$, besitzt und die in $w_1$ linear unbewallt ist (d. h. ihre Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ in $w_1$ genügt der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$). $w = f(z)$ bilde $|z| < 1$ so auf das Innere $G$ von $C$ ab, daß $z = 0$ in $w = w_0$ ($w_0$ in $G$), $z = 1$ in $w = w_1$ übergeht. Es sei $L$ eine in $z = 1$ mündende Jordankurve, die bis auf den Endpunkt $z = 1$ ganz in $|z| < 1$, und zwar innerhalb eines von zwei symmetrisch zum Radius in $z = 1$ verlaufenden Kreissehnen gebildeten Winkelraumes der Öffnung $2\psi$, $0 \leqq \psi < \frac{\pi}{2}$, liegt. Dann gibt es zwei positive Konstanten $M_1$ und $M_2$ und ein zugehöriges $q' > 0$, sowie zu jedem $z \neq 1$ mit $|z| = 1$, $|z - 1| \leqq q'$ ein geeignetes $b(z)$ und ein $b'(z)$, auf $L$, die mit $z$ gegen 1 gleichfalls gegen 1 konvergieren, so daß*

$$\left|\frac{f(z) - f(1)}{(z-1)^\tau}\right| \leqq M_1 \left|\frac{f(b) - f(1)}{(b-1)^\tau}\right|$$

*und*

$$\left|\frac{f(z) - f(1)}{(z-1)^\tau}\right| \geqq M_2 \left|\frac{f(b') - f(1)}{(b'-1)^\tau}\right|$$

*gilt.*

*Dabei kann man auch*

$$M_1 = (1+\omega)\varkappa \cos^{-2\tau}\left(\frac{\psi}{\tau}\right) \quad \text{und} \quad M_2 = (1-\omega')\frac{\cos^{2\tau}\left(\frac{\psi}{\tau}\right)}{\varkappa}$$

*wählen, wo* $0 < \omega$, $\omega' < 1$ *ist,* $\varkappa = \overline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ *ist und* $\omega$, $\omega'$ *beliebig klein gemacht werden können, wenn man* $q'$ *hinreichend klein annimmt.*

Zum Beweise hat man nur zu beachten, daß das Bild von $L$ in der $w$-Ebene ein in $w = w_1$ mündender Jordanbogen $L'$ ist, der wegen der Quasikonformität der Abbildung schließlich innerhalb eines von zwei von $w_1$ ausgehenden symmetrisch zur Innennormalen in $w_1$ verlaufenden Strahlen gebildeten Winkelraumes der Öffnung $\psi\tau + \delta$, bleibt, wo $\psi\tau + \delta < \frac{\pi}{2}\tau$ ist. Dann ergibt sich der Beweis durch Anwendung der Sätze 1 und 2 auf die von $f(z)$ inverse Funktion $z = \varphi(w)$, indem wir die Punkte $c$ und $c'$ jeweils auf $L'$ annehmen und $b = \varphi(c)$, $b' = \varphi(c')$ wählen.

## § 5.

## Folgerungen aus den Sätzen 1 und 2.

36. Wir beweisen zunächst eine Folgerung aus den Sätzen 1 und 2, die sich auf die Existenz der *allseitig* genommenen Ableitung bezieht.

Satz 3. *Es sei $C$ eine geschlossene Jordankurve, die im Punkte $P$: $w = w_1$ eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leqq 2$, besitzen möge; $z = \varphi(w)$ bilde das Innere von $C$ auf $|z| < 1$ ab. Es sei $L$ ein in $w = w_1$ mündender, sonst innerhalb von $C$ verlaufender Jordanbogen, und zwar möge $L$ innerhalb eines Winkelraumes liegen, der von zwei von $w_1$ ausgehenden, zuerst im Innern von $C$ verlaufenden und symmetrisch zur Winkelhalbierenden des Eckenwinkels bei $w_1$ liegenden Strahlen gebildet wird. Ferner möge bei der Annäherung längs $L$*

$$\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}} = \gamma \quad [35])$$

*existieren und von 0 und $\infty$ verschieden sein.*

*Hinreichend und notwendig dafür, daß auch auf $C$ und daher (wie wir zeigen werden) allseitig*

$$\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}} \tag{5,1}$$

*existiert und gleich $\gamma$ ist, ist, daß $C$ in $P$ regulär unbewallt ist.*

37. Wir schicken dem Beweise den folgenden Hilfssatz voraus:

Hilfssatz 10. *Es sei $\Gamma$ eine geschlossene Jordankurve, $f(z)$ eine im Innern $G$ von $\Gamma$ reguläre und auf $G + \Gamma$ stetige Funktion. Es sei $z_1$ ein*

[35]) Wir denken uns die Potenz $(w - w_1)^{1/\tau}$ etwa für einen Wert $w$ auf der Winkelhalbierenden des Eckenwinkels bei $w_1$ im Innern von $C$ irgendwie normiert. Dann bleibt diese Potenz im Innern von $C$ und auf $C$ eindeutig und stetig.

*Punkt auf $\Gamma$. Gilt für beliebige $z$ auf $\Gamma$*

$$\frac{|f(z)-f(z_1)|}{|z-z_1|^{\alpha}} \leqq \Omega, \qquad \alpha > 0,$$

*so gilt dies gleichmäßig auch für alle $z$ im Innern von $\Gamma$.*

Beweis. Wir bilden $G$ mittels $z = g(\zeta)$ auf $|\zeta| < 1$ so ab, daß etwa $\zeta = 1$ in $z = z_1$ übergeht. Dann zeigen wir, daß, $f^*(\zeta) = f(g(\zeta))$ gesetzt, $h(\zeta) = \frac{f^*(\zeta)-f^*(1)}{(g(\zeta)-g(1))^{\alpha}}$ [36]) durch das Poissonsche Integral — mit den Randwerten $h(e^{i\vartheta})$ — darstellbar ist, und leiten aus dieser Darstellung dann in üblicher Weise die behauptete Ungleichung ab.

38. Um nun einzusehen, daß man $h(\zeta)$ durch das Poissonsche Integral darstellen kann, braucht man nur die folgende Tatsache zu beachten:

Ist $\psi(z)$ in $|z| < 1$ regulär und besitzt $\psi(z)$ integrable radiale Randwerte $\psi(e^{i\vartheta})$ außer auf einer $\vartheta$-Menge vom Maße 0, ist ferner

$$(5,2) \qquad \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |\psi(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqq C, \qquad 0 \leqq r < 1 \text{ [37])},$$

so ist $\psi(z)$ durch das Poissonsche Integral, $z = re^{i\varphi}$, $r < 1$,

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(e^{i\vartheta}) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}\, d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(e^{i\vartheta})\, K(r, \vartheta-\varphi)\, d\vartheta$$

gegeben.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich sofort aus einem Satze von Herrn Ostrowski [38]), der besagt, daß eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion $\psi(z)$

---

[36]) Wir denken uns die Potenz in $h(\zeta)$ für einen Wert $|\zeta| < 1$ in bestimmter Weise normiert. Dann bleibt $h(\zeta)$ wegen $g(\zeta) \neq g(1)$ in $|\zeta| < 1$ eindeutig und regulär und hat für $|\zeta| \to 1$, $\arc \zeta \neq \arc 1$ eindeutige, beschränkte und integrable Randwerte.

[37]) Dabei ist für $a \geqq 0$ $\overset{+}{\lg} a = \lg a$, wenn $a \geqq 1$, und $= 0$, wenn $a \leqq 1$ ist.

[38]) A. Ostrowski, Acta litterarum ac scientiarum Reg. Univ. Hung. Francisco Josph. T. I, Fasc. II, p. 87, Fußnote. Dort ist der Satz folgendermaßen formuliert: *Ist $F(z)$ in $|z| < 1$ regulär, hat $F(z)$ auf einer $\vartheta$-Menge positiven Maßes ($z = re^{i\vartheta}$) die Randwerte 0 und ist* $\int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |F(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqq C_1$, $0 < r < 1$, *so ist* $F(z) \equiv 0$. Um einzusehen, daß die obige Fassung mit dieser äquivalent ist, hat man nur zu beachten, daß, wenn zwei in $|z| < 1$ reguläre Funktionen $F_1(z)$ und $F_2(z)$ fast überall die gleichen radialen Randwerte haben und den Bedingungen genügen

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |F_1(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta = C_1, \qquad \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |F_2(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqq C_1,$$

$F = F_1 - F_2$ fast überall die Randwerte 0 besitzt und daß ferner

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |F_1 - F_2|\, d\vartheta \leqq \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |F_1|\, d\vartheta + \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |F_2|\, d\vartheta + \lg 2 \leqq 2C_1 + \lg 2$$

gilt.

durch die Angabe ihrer Randwerte auf einer Menge positiven Maßes eindeutig bestimmt ist, wenn (5, 2) gilt. Da nämlich nach Fatou

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(e^{i\vartheta}) K(r, \vartheta - \varphi)\, d\vartheta$$

für fast alle $\vartheta$ die Randwerte $\psi(e^{i\vartheta})$ besitzt und da ferner

$$\int_0^{2\pi} |\Psi(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta$$

gleichmäßig in $r$ beschränkt[39]) und somit auch

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |\Psi(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqq C_1$$

für alle $0 \leqq r < 1$ bleibt, sind $\psi(z)$ und $\Psi(z)$ miteinander identisch.

Für $h(\zeta)$ ist nun diese Voraussetzung erfüllt. Denn wegen der Beschränktheit von $|f(z) - f(z_1)|$ und $|g(\zeta) - g(1)|$ für $|\zeta| \leqq 1$ bleibt auch ($\zeta = re^{i\vartheta}$):

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |f(g(\zeta)) - f(g(1))|\, d\vartheta, \qquad \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |g(\zeta) - g(1)|\, d\vartheta$$

für $0 \leqq r < 1$ beschränkt, und dies ist bereits hinreichend dafür[40]), daß

---

[39]) Dies gilt ja sogar für eine allgemeinere Klasse von Funktionen $\Psi(z)$, nämlich für alle $\Psi(z)$, die durch ein Stieltjes-Poissonsches Integral darstellbar sind (siehe A. Ostrowski, die in der Fußnote [38]) zitierte Arbeit. Für die ausführliche Darstellung des Beweises vgl. die in Fußnote [9]) zitierte Abhandlung von Herrn Ostrowski, S. 255 ff. Vgl. auch die Darstellung von G. C. Evans, Logarithmic potential, S. 46.)

[40]) Denn ist $\Phi(z)$ eine in $|z| < 1$ reguläre und beschränkte Funktion, so gilt für $\lg|\Phi(z)|$ bekanntlich die Jensensche Ungleichung ($\Phi(0) \neq 0$, sonst betrachte man $\frac{\Phi(z)}{z^n}$ für passendes ganzes $n > 0$)

$$\lg|\Phi(0)| \leqq \int_0^{2\pi} \lg|\Phi(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta \qquad (r < 1)$$

oder

$$\lg|\Phi(0)| \leqq \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |\Phi(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta + \int_0^{2\pi} \overset{-}{\lg} |\Phi(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta,$$

wobei für $a > 0$

$$\overset{+}{\lg} a = \lg a \text{ für } a \geqq 1 \text{ und } = 0 \text{ für } a \leqq 1,$$

$$\overset{-}{\lg} a = \lg a \text{ für } a \leqq 1 \text{ und } = 0 \text{ für } a \geqq 1$$

ist. (Man beachte, daß mit $\lg|\Phi|$ auch $\overset{+}{\lg}|\Phi|$ und $\overset{-}{\lg}|\Phi|$ integrable Funktionen von $\vartheta$ sind.) Da nun $\overset{-}{\lg}|\Phi(re^{i\vartheta})| \leqq 0$, $-\lg|\Phi(re^{i\vartheta})| \geqq 0$ ist, ist

$$\int_0^{2\pi} \left|\overset{-}{\lg}|\Phi(re^{i\vartheta})|\right| d\vartheta = -\int_0^{2\pi} \overset{-}{\lg}|\Phi(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta \leqq \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg}|\Phi(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta - \lg|\Phi(0)| \leqq K,$$

(Fortsetzung der Fußnote [40]) auf nächster Seite.)

auch für $0 \leqq r < 1$

$$\int_0^{2\pi} \left| \lg \frac{f(z) - f(z_1)}{|z - z_1|^{\alpha}} \right| d\vartheta, \qquad z = g(re^{i\vartheta}),$$

beschränkt bleibt.

Es gilt daher

$$h(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f^*(e^{i\vartheta}) - f^*(1)}{(g(e^{i\vartheta}) - g(1))^{\alpha}} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\vartheta - \varphi)} d\vartheta, \qquad \zeta = re^{i\varphi},$$

woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt.

39. Beweis von Satz 3. Offenbar genügt es, den Satz für den Fall $\tau = 1$ zu beweisen.

a) Wir zeigen zuerst, daß die Bedingung $\frac{J(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 1$ mit $\varepsilon \to 0$ hinreichend für das Bestehen von $(5, 1)$ ist.

Zunächst folgt aus dem Satze 2, daß die für $w$ in $C$ reguläre und für $w \neq w_1$ auf $C$ stetige Funktion $\Phi(w) = \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{w - w_1}$ gleichmäßig für alle $w$ auf $C$ und daher auch nach dem vorausgeschickten Hilfssatz für alle $w$ innerhalb von $C$ beschränkt ist. Daraus ergibt sich auf Grund unserer Voraussetzung nach einem Satze von Lindelöf[41]), daß $\lim_{w \to w_1} \Phi(w) = \gamma = \varphi'(w_1)$ auch gleichmäßig bei Annäherung „im Winkelraum" gilt, also auch insbesondere längs der Normalen in $w_1$. Daher gilt nach Satz 1 und Satz 2 für hinreichend kleine $|w - w_1|$, $w \neq w_1$,

$$(1 - \omega) \left| \frac{\varphi(c) - \varphi(w_1)}{(c - w_1)} \right| \leqq \left| \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{w - w_1} \right| \leqq (1 + \omega) \left| \frac{\varphi(c') - \varphi(w_1)}{c' - w_1} \right|,$$

wo $c, c'$ die dem Punkte $w$ nach Satz 1 und Satz 2 zugeordneten Punkte im Abstande $R$ von $w_1$ auf der Innennormalen in $P$ sind. Somit gilt für $w \to w_1$

$$|\varphi'(w_1)|(1 - \omega) \leqq \overline{\lim_{w \to w_1}} \left| \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{w - w_1} \right| \leqq |\varphi'(w_1)|(1 + \omega).$$

---

und daher auch $(0 < r < 1)$

$$\int_0^{2\pi} \left| \lg |\Phi(re^{i\vartheta})| \right| d\vartheta \leqq \int_0^{2\pi} \overset{+}{\lg} |\Phi(re^{i\vartheta})| \, d\vartheta - \int_0^{2\pi} \overset{-}{\lg} |\Phi(re^{i\vartheta})| \, d\vartheta \leqq \text{konst.}$$

Vgl. für die obige Bedingung für den Mittelwert von $\overset{+}{\lg}$ sowie diese Überlegung die in der Fußnote [9]) zitierte Abhandlung von Herrn Ostrowski S. 261. Die Bedeutung dieser Bedingung für $\overset{+}{\lg}$ besteht darin, daß sie für einen Quotienten zweier analytischer Funktionen erfüllt ist, wenn sie für jede einzeln gilt.

[41]) E. Lindelöf, Sur un principe général de l'analyse, et ses applications à la théorie de la représentation conforme, Acta Soc. scient. Fennicae **46** (1915), Nr. 3, p. 10–11.

Also ist auch mit $\omega \downarrow 0$

$$|\varphi'(w_1)| \leqq \overline{\lim_{w \to w_1}} \left| \frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{w-w_1} \right| \leqq |\varphi'(w_1)|,$$

und somit folgt, daß $\lim_{w \to w_1} \left| \frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{w-w_1} \right|$ existiert und $= |\varphi'(w_1)|$ ist. Um nunmehr die Behauptung (5, 1) herzuleiten, beachte man, daß wegen der Existenz der Tangente in $w = w_1$ [42])

$$\lim_{w \to w_1} \arg \frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{w-w_1} = \arg \varphi'(w_1)$$

ist. Damit ist die Relation $\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{(w-w_1)^{1/\tau}} = \gamma$ *für $w$ auf dem Rande* bewiesen. Die allseitige Konvergenz des Ausdrucks (5, 1) folgt dann wegen der Beschränktheit aus einem Hilfssatz von Lindelöf [43]).

b) Zum Beweise des zweiten Teiles des Satzes beachte man die am Schluß von Nr. 17 bewiesene Tatsache. Bezeichnet man die zu $\varphi(w)$ inverse Funktion mit $w = f(z)$ und ist $\varphi(w_1) = 1$, so besagt die Aussage, daß

$$\lim_{\vartheta \to 0} \left| \frac{f(e^{i\vartheta})-f(1)}{\vartheta} \right|$$

existieren und von 0 und $\infty$ verschieden sein soll (vgl. Nr. 17, Bemerkung 2): $\vartheta$ ist ein metrischer Parameter für $C$ in $w_1$, für den $\frac{r(\vartheta)}{\vartheta} \to \alpha > 0$ für $\vartheta \to 0$ gilt, wobei $r(\vartheta)$ die Länge des oben angeführten, von $P_0$ $(w = w_1,\ \vartheta = 0)$ nach dem Punkte $P = P(\vartheta)$ gezogenen Radiusvektors ist. Hierfür ist aber nach dem in der Nr. 17 Gesagten *notwendig*, daß $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$ ist.

40. Aus dem Satze 1 und 2 sowie aus dem in Nr. 35 formulierten Korrolar und dem Satze 3 ergibt sich nun das folgende

Korrolar. *Es möge $w = f(z)$ den Kreis $|z| < 1$ auf das Innere einer Jordankurve $C$ abbilden, die in $f(1) = w_1$ eine Tangente besitzt und deren Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ der Relation $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ genügt. Bleibt bei Annäherung längs eines in $z = 1$ mündenden, aus dem Innern des Einheitskreises kommenden Jordanbogens $L$ mit stetiger Tangente, welcher die Peripherie des Einheitskreises nicht berührt, $|f'(z)| \leqq M$, so hat $f(z)$ in $z = 1$ nach oben allseitig beschränkten Differenzenquotienten.*

---

[42]) Vgl. E. Lindelöf, die in der Fußnote [33]) zitierte Abhandlung, S. 85—87.

[43]) Siehe z. B. L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie 2, S. 21ff. Dieser Satz ist ein Spezialfall des oben zitierten.

*Existiert bei Annäherung längs* $L$ $\lim_{z \to 1} f'(z) = \gamma$ [44]) *und ist* $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$, *so existiert auch allseitig* $\lim_{z \to 1} \frac{f(z) - f(1)}{z - 1}$ *und ist* $= \gamma$.

Beweis. Wegen $|f'(z)| \leqq M$ für $z$ auf $L$ ist

$$|f(z) - f(1)| = \left| \overset{(L)}{\int_z^1} f'(z)\, dz \right| \leqq Ml,$$

wo längs $L$ von $z$ bis 1 zu integrieren ist und $l$ die Länge des Kurvenbogens $L$ von $z$ bis 1 bedeutet. Daher ist

$$\left| \frac{f(z) - f(1)}{z - 1} \right| \leqq M \frac{l}{|z - 1|},$$

und wegen der Stetigkeit der Tangente von $L$ ist $\lim_{z \to 1} \frac{l}{|z - 1|} = 1$, woraus die Beschränktheit dieses Differenzenquotienten bei allseitiger Annäherung aus dem Korrolar zum Satze 1 und 2 und dem Hilfssatz 10 folgt.

Aus $\lim f'(z) = \gamma$ und der eben benutzten Integraldarstellung von $f(z) = f(1) + \int_1^z f'(z)\, dz$, die ja bis in den Punkt $z = 1$ hinein gilt, folgt, daß auch

$$\lim_{z \to 1} \frac{f(z) - f(1)}{z - 1} = \gamma \tag{5,3}$$

für $z$ auf $L$ gilt. Denn $z$ bleibt dabei im Stetigkeitsintervall von $f'(z)$. Nach Satz 3 folgt hieraus die Behauptung, falls $\gamma \neq 0$ ist. Ist $\gamma = 0$, so folgt wegen (5,3) die Behauptung direkt aus dem Korrolar zum Satz 1 und 2, Nr. 35 (1. Behauptung).

## § 6.

## Heranziehung der Vergleichskurven.

41. Definition. Wir sagen, die geschlossene Jordankurve $\mathfrak{C}$ sei eine *innere* (resp. *äußere*) *Vergleichskurve* der geschlossenen Jordankurve $C$ im Punkte $P$ (oder $C$ besitze in $P$ die innere (resp. äußere) Vergleichskurve $\mathfrak{C}$), wenn $\mathfrak{C}$ den Punkt $P$ mit $C$ gemeinsam hat und nirgends außerhalb von $C$ verläuft (resp. nirgends innerhalb von $C$ liegt und $C$ in ihrem Innern enthält).

Dann gilt der folgende

Satz 4. *Es sei* $C$ *eine geschlossene Jordankurve, die im Punkte* $P$ $(w = w_1)$ *eine Ecke der Öffnung* $\pi\tau$, $0 < \tau \leqq 2$, *besitzt und die im*

[44]) Hier darf auch $\gamma = 0$ sein.

*Punkte $P$ linear unbewallt ist (für deren Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ also in $P$ die Relation $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ gilt). Ferner möge $C$ in $P$ eine innere oder äußere Vergleichskurve $\mathfrak{C}$ besitzen, die in $P$ eine Ecke der Öffnung $\pi\tau'$ haben möge. Dabei werde angenommen, daß die Winkelhalbierende $s$ des Eckenwinkels der Ecke in $P$ von $C$ zugleich auch den Eckenwinkel von $\mathfrak{C}$ in $P$ halbiert. $z = \varphi(w)$ bilde das Innere von $C$, $z = \Phi(w)$ das von $\mathfrak{C}$ so auf $z < 1$ ab, daß ein im Innern von $C$ und $\mathfrak{C}$ liegender Punkt $w = w_0$ in $z = 0$ übergeht. Dann gibt es:*

a) *falls $\mathfrak{C}$ eine innere Vergleichskurve ist, zwei positive Konstanten $K_1'$ und $q_1$ sowie zu jedem $w \neq w_1$ auf $C$ mit $|w - w_1| \leqq q_1$ ein $c$ auf der Winkelhalbierenden $s$, so daß*

$$\frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} \geqq K_1' \frac{|\Phi(c) - \Phi(w_1)|}{|c - w_1|^{1/\tau}}$$

*gilt, und*

b) *falls $\mathfrak{C}$ eine äußere Vergleichskurve ist, zwei positive Konstanten $K_2'$ und $q_2$ sowie zu jedem $w \neq w_1$ auf $C$ mit $|w - w_1| \leqq q_2$ ein $c'$ auf $s$, so daß*

$$\frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} \leqq K_2' \frac{|\Phi(c') - \Phi(w_1)|}{|c' - w_1|^{1/\tau}}$$

ist [45]).

*Dabei dürfen für $K_1'$ und $K_2'$ die Werte $\frac{1-\omega}{\varkappa^{1/\tau}}$ bzw. $(1+\omega)\varkappa^{1/\tau}$ gesetzt werden, wo $\varkappa = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}$ ist und $\omega$, $0 < \omega < 1$, beliebig klein gemacht werden kann, wenn nur $q_1$ bzw. $q_2$ hinreichend klein angenommen wird.*

Der Beweis ergibt sich aus dem Satze 1 und dem Satze 2, wenn man beachtet, daß nach dem sogenannten Lindelöfschen Prinzip [46]) im Falle a) für $c$ im Innern von $\mathfrak{C}$ $|\Phi(c)| \geqq |\varphi(c)|$ und also $1 - |\Phi(c)| \leqq 1 - |\varphi(c)|$, im Falle b) für $c'$ im Innern von $C$ $|\Phi(c')| \leqq |\varphi(c')|$ und daher $1 - |\Phi(c')| \geqq 1 - |\varphi(c')|$ ist, und wenn man in beiden Fällen die Quasikonformität [47]) der Abbildung in $w_1$ berücksichtigt. Denn danach ist sowohl

$$\lim_{w \to w_1} \frac{1 - |\varphi(w)|}{|\varphi(w_1) - \varphi(w)|} = 1 \quad \text{als auch} \quad \lim_{w \to w_1} \frac{1 - |\Phi(w)|}{|\Phi(w_1) - \Phi(w)|} = 1,$$

[45]) Man könnte an Stelle der Winkelhalbierenden $s$ auch allgemeiner einen beliebigen in $P$ mündenden Jordanbogen $L$ wählen, der ganz innerhalb eines von zwei von $P$ ausgehenden Strahlen gebildeten Winkelraumes bleibt, die ihrerseits mit an $P$ anstoßenden Stücken im Innern von $C$ und von $\mathfrak{C}$ verlaufen. Wir brauchen aber diesen Satz nicht in dieser Allgemeinheit und beweisen ihn daher nur in der obigen Fassung.

[46]) E. Lindelöf, Mémoire sur certaines inégalités de la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel, Acta societatis scientiarum Fennicae **35** (1908), Nr. 7, pp. 3 ff. Siehe auch L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie **2**, S. 117.

[47]) Vgl. die in der Fußnote [33]) zitierten Abhandlungen.

wenn $w$ auf $s$ angenommen ist. Man erhält somit beispielsweise im Falle a)

$$\frac{|\varphi(w_1)-\varphi(c)|}{|w_1-c|^{1/\tau}} \geqq \frac{1-|\varphi(c)|}{|w_1-c|^{1/\tau}} \geqq \frac{1-|\Phi(c)|}{|w_1-c|^{1/\tau}} \geqq \frac{|\Phi(w_1)-\Phi(c)|}{|w_1-c|^{1/\tau}}(1-\omega')$$

und mithin nach Satz 1 (mit $\gamma'=0$) bei vorgegebenem $\omega$ und passendem $q_1>0$ für alle $w \neq w_1$ auf $C$ mit $|w-w_1| \leqq q_1$ und die ihnen zugeordneten $c$

$$\frac{|\varphi(w)-\varphi(w_1)|}{|w-w_1|^{1/\tau}} \geqq \frac{1-\omega}{\varkappa^{1/\tau}} \frac{|\Phi(w_1)-\Phi(c)|}{|w_1-c|^{1/\tau}}.$$

Bemerkung. Berücksichtigt man die am Schluß des Beweises von Satz 1 und Satz 2 gemachten Bemerkungen über den Quotienten $\left|\frac{w-w_1}{c-w_1}\right|$ bzw. $\frac{w-w_1}{c'-w_1}$, so sieht man, daß auch hier Analoges gilt: Ist $\omega$, $0<\omega<1$, beliebig vorgegeben, und sind $q_1$ bzw. $q_2$ die zu $K_1'=\frac{1-\omega}{\varkappa^{1/\tau}}$ bzw. $K_2'=(1-\omega)\varkappa^{1/\tau}$ nach dem Satze 4 zugeordneten Zahlen, so gibt es zwei positive Konstanten $\mu_1$ und $\mu_2$, so daß

$$0<\mu_1 \leqq \left|\frac{w-w_1}{c-w_1}\right| \leqq \mu_2, \qquad 0<\mu_1 \leqq \left|\frac{w-w_1}{c'-w_1}\right| \leqq \mu_2$$

für alle $w$ auf $C$ mit $|w-w_1| \leqq q_1$ bzw. $|w-w_1| \leqq q_2$ gilt. Diese (beim Beweise der Sätze 1 und 2 angegebenen) Konstanten konvergieren aber gegen 0, wenn man $\omega \to 0$ konvergieren läßt.

42. Zusatz zum Satz 4. *Dieser Satz bleibt noch richtig, wenn der Punkt, den man bei der Abbildung des Innern von $\mathfrak{C}$ in den Nullpunkt übergehen läßt, nicht derselbe ist wie der, der bei der Abbildung des Innern von $C$ in $z=0$ übergeht.*

Es sei beispielsweise $\mathfrak{C}$ eine innere Vergleichskurve. Bildet man dann vermittels $z=\varphi^*(w)$ das Innere von $C$ so auf $|z|<1$ ab, daß $w=\mathfrak{w}_0$ ($\mathfrak{w}_0$ nicht notwendig im Innern von $\mathfrak{C}$) in $z=0$ übergeht, und vermittels $z=\varphi(w)$, daß $w=w_0$ (in $C$ und $\mathfrak{C}$) in $z=0$ übergeführt wird, so hat man

$$\varphi^*(w)=\frac{\varphi(w)-\varphi(\mathfrak{w}_0)}{1-\varphi(w)\overline{\varphi(\mathfrak{w}_0)}}e^{i\gamma} \qquad (\gamma \text{ reell}).$$

Ist daher der Satz 4 auf $\varphi(w)$ mit der Konstanten $K_1'$ anwendbar, so gilt er auch für $\varphi^*(w)$, wenn man $K_1'$ durch $K_1'(1-\varepsilon)$ ersetzt, wo $0<\varepsilon<1$ ist und $\varepsilon$ beliebig klein durch genügende Verkleinerung von $q_1$ gemacht werden kann. Denn es ist ja zunächst

$$\frac{|\varphi^*(w)-\varphi^*(w_1)|}{|w-w_1|^{1/\tau}} = \frac{|\varphi^*(w)-\varphi^*(w_1)|}{|\varphi(w)-\varphi(w_1)|} \frac{|\varphi(w)-\varphi(w_1)|}{|w-w_1|^{1/\tau}}$$

und analog

$$\frac{|\varphi^*(c)-\varphi^*(w_1)|}{|c-w_1|^{1/\tau}} = \left|\frac{\varphi^*(c)-\varphi^*(w_1)}{\varphi(c)-\varphi(w_1)}\right| \frac{|\varphi(c)-\varphi(w_1)|}{|c-w_1|^{1/\tau}},$$

so daß

$$(6,1)\quad \frac{|\varphi^*(w)-\varphi^*(w_1)}{|w-w_1|^{1/\tau}} \geqq \left|\frac{\varphi^*(w)-\varphi^*(w_1)}{\varphi(w)-\varphi(w_1)}\right| \cdot K_1' \frac{|\varphi(c)-\varphi(w_1)|}{|c-w_1|^{1/\tau}}$$
$$= \left|\frac{\varphi^*(w)-\varphi^*(w_1)}{\varphi(w)-\varphi(w_1)}\right| \cdot \left|\frac{\varphi(c)-\varphi(w_1)}{\varphi^*(c)-\varphi^*(w_1)}\right| \cdot K_1' \frac{|\varphi^*(c)-\varphi^*(w_1)|}{|c-w_1|^{1/\tau}}$$

ist. Ferner gilt, $\varphi^*(w)=\zeta^*$, $\varphi(w)=\zeta$ gesetzt,

$$\lim_{w\to w_1} \frac{\varphi^*(w)-\varphi^*(w_1)}{\varphi(w)-\varphi(w_1)} = \lim_{c\to w_1} \frac{\varphi^*(c)-\varphi^*(w_1)}{\varphi(c)-\varphi(w_1)} = \left(\frac{d\zeta^*}{d\zeta}\right)_{\zeta=\varphi(w_1)}$$
$$= \frac{1-|\lambda|^2}{(1-\bar{\lambda}\varphi(w_1))^2} e^{i\gamma} \neq 0,\ \lambda=\varphi(w_0),$$

bei beliebiger Annäherung von $w$ und $c$ an $w_1$ auf $C$ oder aus dem Innern von $C$. Daher konvergiert das Produkt in (6,1)

$$\left|\frac{\varphi^*(w)-\varphi^*(w_1)}{\varphi(w)-\varphi(w_1)}\right| \left|\frac{\varphi(c)-\varphi(w_1)}{\varphi^*(c)-\varphi^*(w_1)}\right| \to 1,$$

wenn $w\to w_1$ und $c\to w_1$ streben. Hieraus und aus (6,1) entnimmt man die Richtigkeit der Behauptung im Falle a). Analoges gilt im Falle b).

43. Wir definieren noch die folgenden beiden Begriffsbildungen:

Definition. Wir sagen, die geschlossene Jordankurve $C$ besitze in $P$ $(w=w_1)$ eine *„konforme Ecke" der Öffnung* $\pi\tau$, $0<\tau\leqq 2$,[48]), wenn $C$ in $P$ eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$ besitzt und wenn für die Abbildungsfunktion $z=\varphi(w)$ des Innern von $C$ auf den Einheitskreis bei allseitiger Annäherung von $w$ an $w_1$ die Relation gilt

$$0<K_1\leqq \frac{|\varphi(w)-\varphi(w_1)|}{|w-w_1|^{1/\tau}} \leqq K_2,$$

wo $K_1, K_2$ Konstanten sind, die natürlich von der Normierung von $\varphi(w)$ abhängen. Wir sagen weiter, $C$ besitze in $P$ eine *„generalisierte konforme Ecke" der Öffnung* $\pi\tau$, wenn $C$ in $P$ eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$ besitzt und es eine innere und äußere Vergleichskurve $\mathfrak{C}_i$ und $\mathfrak{C}_a$ gibt, die beide in $P$ eine konforme Ecke derselben Öffnung besitzen[48]).

Satz 5. *Notwendig und hinreichend dafür, daß die Jordankurve $C$, die im Punkte $P$ eine generalisierte konforme Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0<\tau\leqq 2$, besitzt, eine konforme Ecke derselben Öffnung in $P$ hat, ist, daß die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ von $C$ in $P$ der Bedingung $\Delta(\varepsilon)=O(\varepsilon)$ genügt.*

[48]) Vgl. die Fußnote [9]).

Daß diese Bedingung hinreichend ist, folgt aus dem Satze 4. Sie ist aber auch notwendig, und zwar auch dann, wenn das Bestehen einer generalisierten konformen Ecke nicht vorausgesetzt wird. Denn bildet $w = f(z)$ den Kreis $|z| < 1$ auf das Innere von $C$ ab und ist $w_1 = f(e^{i\vartheta_1})$, so bestehen die Ungleichungen

$$0 < c_1 \leqq \frac{|f(e^{i\vartheta}) - f(e^{i\vartheta_1})|}{|\vartheta - \vartheta_1|^{\tau}} \leqq c_2 .$$

Dies bedeutet aber (vgl. die Bemerkung 2 in Nr. 17), daß $t = |\vartheta - \vartheta_1|^{\tau} \operatorname{sgn}(\vartheta - \vartheta_1)$ ein metrischer Parameter von $C$ in bezug auf $w = w_1$ ist, und daher gilt notwendig $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$.

44. Als eine Anwendung des Satzes 4 beweisen wir noch den folgenden

Satz 6. *Es sei $C$ eine geschlossene Jordankurve, die im Punkte $P$ eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau < 2$, besitzt. Ferner sei $C$ in $P$ linear unbewallt, d. h. die Unbewalltheitsfunktion von $C$ in $P$ genüge der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$. $z = \varphi(w)$ bilde das Innere von $C$ auf $|z| < 1$ ab. Dann konvergiert für jedes feste $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \tau)$ gleichmäßig für gegen $w_1$ aus dem Innern von $C$ oder auf $C$ konvergierendes $w$*

$$\frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{\frac{1}{\tau - \varepsilon}}} \to \infty , \qquad \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{\frac{1}{\tau + \varepsilon}}} \to 0 .$$ [49])

Beweis. Da $C$ in $P$ Halbtangenten besitzt, kann man ein sich nicht überschneidendes Polygon mit endlich vielen Seiten konstruieren, das den Punkt $P$ mit $C$ gemeinsam hat, in $P$ eine Ecke der Öffnung $\pi\tau'$ besitzt, wo sich $\tau'$ um beliebig wenig von $\tau$ unterscheidet, und sonst entweder ganz innerhalb oder ganz außerhalb von $C$ verläuft und in dem zuletzt genannten Falle $C$ im Innern enthält. (Im ersten Falle muß $\tau' < \tau$, im zweiten $\tau' > \tau$ vorausgesetzt werden.)

Sei nun erstens $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \tau)$ und $\mathfrak{C}_\varepsilon$ ein solches „inneres Vergleichspolygon", das in $P$ eine Ecke der Öffnung $\tau'\pi = \pi(\tau - \varepsilon)$ besitzt; wir dürfen annehmen, daß die Winkelhalbierende $s$ des Eckenwinkels von $C$ in $P$ zugleich den Eckenwinkel von $\mathfrak{C}_\varepsilon$ in $P$ halbiert. $z = \Phi(w)$ bilde das Innere von $\mathfrak{C}_\varepsilon$ auf $|z| < 1$ ab. Daher gibt es nach dem Satz 4 in § 6 (unter Berücksichtigung der im Anschluß an ihn gemachten Bemerkung und des Zusatzes zu diesem Satze) eine Konstante $K_1$ und zu jedem $w \neq w_1$ auf $C$ mit hinreichend kleinem $|w - w_1|$ ein $c$ auf $s$ mit $0 < \mu_1 \leqq \left|\frac{w - w_1}{c - w_1}\right| \leqq \mu_2$, derart, daß

$$(6,2) \qquad \frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{1/\tau}} \geqq K_1 \frac{|\Phi(w_1) - \Phi(c)|}{|w_1 - c|^{1/\tau}}$$

[49]) Unter der Annahme, daß $C$ in der Umgebung von $P$ stetige Tangente besitzt, ist die Behauptung dieses Satzes bereits in der in der Fußnote [8]) zitierten C. R.-Note von Herrn Lawrentieff hergeleitet worden.

gilt. Nun gilt bekanntlich für die Abbildungsfunktion $z = \Phi(w)$ eines Polygons in einer Ecke der Öffnung $\tau'\pi = \pi(\tau - \varepsilon)$ für alle $c$ auf $s$

$$\frac{|\Phi(w_1) - \Phi(c)|}{|w_1 - c|^{\frac{1}{\tau-\varepsilon}}} \geqq \varkappa_1 > 0,$$

wo $\varkappa_1$ eine Konstante ist. Hieraus ergibt sich wegen (6,2)

$$(6,3)\quad \frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{\frac{1}{\tau}}} \geqq K_1 \cdot \frac{|\Phi(c) - \Phi(w_1)|}{|c - w_1|^{\frac{1}{\tau-\varepsilon}}} \cdot \frac{1}{|c - w_1|^{-\frac{\varepsilon}{\tau(\tau-\varepsilon)}}} \geqq K_1 \varkappa_1 |c - w_1|^{\frac{\varepsilon}{\tau(\tau-\varepsilon)}},$$

und indem man (6,3) und die Relation $0 < \mu_1 \leqq \left|\frac{w - w_1}{c - w_1}\right| \leqq \mu_2$ beachtet, erhält man

$$\frac{|\varphi(w) - \varphi(w_1)|}{|w - w_1|^{\frac{1}{\tau-\varepsilon}}} \geqq K_2.$$

Da dieses für jedes feste $\varepsilon > 0$ mit einer von $\varepsilon$ abhängigen Konstanten $K_2 = K_2(\varepsilon)$ gilt, ergibt sich daraus leicht die erste Behauptung für alle *$w$ auf $C$*. Für $w$ im Innern von $C$ folgt sie dann aus dem Hilfssatz 10.

46. Wir konstruieren nun zweitens für ein beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon + \tau \leqq 2)$ ein „äußeres Vergleichspolygon" $\mathfrak{C}_\varepsilon$, das in $P$ eine Ecke der Öffnung $\tau'\pi = \pi(\tau + \varepsilon)$ hat, und zwar so, daß sein Winkel bei $P$ durch die Winkelhalbierende $s$ des Eckenwinkels von $C$ bei $P$ halbiert wird. $\Phi(w)$ bilde das Innere von $\mathfrak{C}_\varepsilon$ auf $|z| < 1$ ab. Indem man nun beachtet, daß für jedes $c'$ auf $s$

$$\frac{|\Phi(c') - \Phi(w_1)|}{|w_1 - c'|^{\frac{1}{\tau+\varepsilon}}} \leqq \varkappa_1',$$

wo $\varkappa_1'$ eine nur von $\varepsilon$ und nicht von $c'$ abhängige Konstante ist, und die zweite Hälfte des Satzes 4 analog wie eben die erste Hälfte dieses Satzes anwendet, erkennt man durch ganz analoge Schlüsse die Richtigkeit der zweiten Behauptung.

## II. Kapitel.

### § 7.

### Formulierung des Hauptsatzes über konforme Ecken und Vorbemerkungen.

47. Wir stellen uns nunmehr die Aufgabe, Bedingungen für das Vorhandensein einer konformen Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leqq 2$, bei einer geschlossenen Jordankurve $C$, resp. für die *allseitige* Existenz des $\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1:\tau}}$ für die Abbildungsfunktionen ihres Innern $z = \varphi(w)$ auf das Innere des Einheitskreises anzugeben. *Wir nehmen dabei von vorn-*

*herein an, daß die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ der Kurven $C$, die wir betrachten wollen, in dem zu untersuchenden Punkte $P_0$ der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ genügt.* Wir wählen dann zu ihrer Parameterdarstellung $w = w(t) = x(t) + iy(t)$ einen metrischen Parameter $t$. Dem Punkte $P_0$ entspreche dabei $t = 0$. Durchläuft $t$ das Intervall $-T \leqq t < T$, so möge $P(t)$ die Kurve $C$ durchlaufen. Unser Resultat läßt sich dann am einfachsten formulieren, wenn wir die folgenden Größen einführen: den senkrechten Abstand $\xi(t)$ eines Punktes $P = P(t) \neq P_0$ in einer hinreichend kleinen Umgebung von $P_0$ der Kurve $C$ von derjenigen Halbtangente, gegen die der Radiusvektor $\overline{P_0 P}$ für $t \downarrow 0$ bzw. $t \uparrow 0$ konvergiert, die Länge der Projektion $\eta(t)$ des Radiusvektors $\overline{P_0 P}$ auf diese Halbtangente und schließlich die nur für hinreichend kleine $|t|$ definierte stetige und monoton gegen 0 abnehmende Funktion von $t$:

$$\xi^*(t) = \begin{cases} \operatorname{Max}_{0 < \tau \leqq t} \xi(\tau) & \text{für } t > 0, \\ \operatorname{Max}_{0 > \tau \geqq t} \xi(\tau) & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

$\xi^*(t)$ ist also der größte Abstand des Kurvenbogens $0 \ldots t$ von der entsprechenden Halbtangente. — Dann lautet unser Satz:

Satz 7. *Ist $C$ eine geschlossene Jordankurve, die in einem Punkte $P_0$ der Bedingung $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ genügt, und ist das mit der oben eingeführten Funktion $\xi^*(t)$ gebildete Integral $\int_{-\varepsilon}^{\delta} \frac{\xi^*(t)}{t^2}\, dt$ konvergent $(\varepsilon, \delta > 0)$, so hat $C$ in $P_0$ $(w = w_1)$ eine konforme Ecke der Öffnung $\pi\tau$ $(0 < \tau \leqq 2)$.*

*Ist darüber hinaus $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$, so existiert sogar für die Abbildungsfunktion $z = \varphi(w)$ des Innern von $C$ auf $|z| < 1$ der $\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$ bei allseitiger Annäherung und ist von 0 und $\infty$ verschieden.*

48. Wir schicken dem Beweise dieses Satzes (den wir im § 9 erbringen) einige Vorbemerkungen und Hilfssätze voraus.

Vorbemerkung 1. *Die Tatsache der Konvergenz von $\int_{-\varepsilon}^{\delta} \frac{\xi^*(t)\, dt}{t^2}$ ist unabhängig von der Wahl des metrischen Parameters $t$.* Denn ist $t'$ ein anderer metrischer Parameter, bei dem gleichfalls $P_0$ der Wert $t' = 0$ entspricht und der dasselbe Vorzeichen wie $t$ hat, so sind $t$ und $t'$ offenbar monotone und stetige Funktionen voneinander: $t' = g_1(t)$, $t = g_2(t')$, und es gilt wegen $r(t) = \bar{r}(t') = r(g_2(t'))$, $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$,

$$0 < \varkappa_1 \leqq \left| \frac{t'}{t} \right| = \left| \frac{\dfrac{t'}{r}}{\dfrac{t}{r}} \right| \leqq \varkappa_2. \tag{7,1}$$

Ferner ist die mit dem Parameter $t'$ definierte $\xi^*$-Funktion: $\bar{\xi}^*(t') = \xi^*(g_1(t)) = \xi^*(t)$. Hieraus wollen wir folgern, daß auch das Integral

$$\int_0^{\bar{\delta}} \frac{\bar{\xi}^*(t')}{t'^2}\, dt' \text{ gleichzeitig mit } \int_0^{\delta} \frac{\xi^*(t)}{t^2}\, dt$$

konvergiert. Wir setzen dabei $\bar{\delta}$, $\delta > 0$ voraus; für $\bar{\delta}$, $\delta < 0$ ist alles analog.

Nun bemerken wir, daß für eine beliebige Funktion $X(t)$ mit $X(t) \downarrow 0$ für $t \downarrow 0$ die Integrale

$$\int_0^{\delta} \frac{X(t)}{t^2}\, dt \quad \text{und} \quad \int_0^{\delta} \frac{dX(t)}{t}$$ [50])

gleichzeitig konvergieren und divergieren. Wir tragen übrigens den Beweis hierfür als den ersten der unten folgenden Hilfssätze nach. Hiernach genügt es also, nur die Konvergenz des Integrals

$$\int_{\bar{\varepsilon}}^{\bar{\delta}} \frac{d\bar{\xi}^*(t)}{t}$$

für $\bar{\varepsilon} \downarrow 0$ nachzuweisen. Dies folgt aber sofort aus der Bemerkung, daß für jede Definitionssumme dieses Stieltjes-Integrals wegen (7, 1)

$$\frac{1}{\varkappa_2} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\bar{t}_\nu} [\xi^*(t_{\nu+1}) - \xi^*(t_\nu)] \leqq \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{t'_\nu} [\bar{\xi}^*(t'_{\nu+1}) - \bar{\xi}^*(t'_\nu)]$$

$$\leqq \frac{1}{\varkappa_1} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{t_\nu} [\xi^*(t_{\nu+1}) - \xi^*(t_\nu)]$$

ist (wo $\bar{\varepsilon} = t'_0 < t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_{n+1} = \bar{\delta}$ eine beliebige Zerlegung des Intervalls $\langle \bar{\varepsilon}, \bar{\delta} \rangle$ ist, $\bar{t}'_\nu$ irgendwelche Zwischenwerte aus $\langle t'_\nu, t'_{\nu+1} \rangle$ sind und $t_\nu = g_2(t'_\nu)$, $\bar{t}_\nu = g_2(\bar{t}'_\nu)$ ist) und daher

$$\frac{1}{\varkappa_2} \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{d\xi^*(t)}{t} \leqq \int_{\bar{\varepsilon}}^{\bar{\delta}} \frac{d\bar{\xi}^*(t)}{t} \leqq \frac{1}{\varkappa_1} \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{d\xi^*(t)}{t}$$

ist. —

49. Hilfssatz 11. *Für eine beliebige Funktion $X(t)$ mit $X(t) \downarrow 0$ für $t \downarrow 0$ konvergieren und divergieren die Integrale*

$$\int_0^{\delta} \frac{X(t)}{t^2}\, dt \quad \textit{und} \quad \int_0^{\delta} \frac{dX(t)}{t} \qquad (\delta > 0)$$

*gleichzeitig* [51]).

[50]) Dieses Integral ist als ein Stieltjes-Integral aufzufassen.

[51]) Für den Fall monoton ins Unendliche wachsender Funktionen wurde dieser Satz von Herrn Ostrowski hergeleitet (s. die in der Fußnote [9]) zitierte Abhandlung S. 202). Unser Beweis ist seinem nachgebildet.

Beweis. Es ist $(0 < \varepsilon < \delta)$

$$(7,2) \qquad \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{X(t)}{t^2}\,dt = -\frac{X(t)}{t}\Big|_{\varepsilon}^{\delta} + \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{dX(t)}{t}.$$

Ist $\int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{X(t)}{t^2}\,dt$ konvergent, so folgt für festes $\gamma > 1$

$$\int_{t}^{\gamma t} \frac{X(t)}{t^2}\,dt \geqq \frac{X(t)}{(t\gamma)^2}\cdot(\gamma t - t) = \frac{X(t)}{t}\cdot\frac{\gamma - 1}{\gamma^2}$$

und daher

$$\frac{X(t)}{t} \leqq \frac{\gamma^2}{\gamma - 1}\cdot\int_{t}^{\gamma t} \frac{X(t)}{t^2}\,dt \to 0 \quad \text{für} \quad t \downarrow 0;$$

daraus folgt dann wegen (7,2) auch die Konvergenz des Integrals $\int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{dX(t)}{t}$ für $\varepsilon \downarrow 0$.

Ist umgekehrt dieses letzte Integral konvergent, so folgt wegen

$$\frac{X(t)}{t} = \frac{1}{t}\int_{0}^{t} dX(t) \leqq \int_{0}^{t} \frac{dX(t)}{t} \to 0 \quad \text{für} \quad t \downarrow 0$$

aus (7,2), daß auch das Integral $\int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{X(t)}{t^2}\,dt$ für $\varepsilon \downarrow 0$ konvergiert. —

50. Vorbemerkung 2. *Die auf die Funktion $\xi^*(t)$ bezügliche Voraussetzung des Satzes 7 ist offenbar mit der Bedingung äquivalent, daß es eine monotone mit $t \downarrow 0$, $t \uparrow 0$ gegen 0 abnehmende Funktion $X(t)$ gibt, so daß $\xi(t) \leqq X(t)$ ist und das Integral $\int_{-\varepsilon}^{\delta} \frac{X(t)}{t^2}\,dt$ konvergiert. $\xi^*(t)$ ist nur die „kleinste" derartige Funktion.*

51. Vorbemerkung 3. *Die Voraussetzung des Satzes 7 ist, wie nun gezeigt werden soll, invariant gegenüber einer Transformation der Kurve von der Form $u = (w - w_1)^{\alpha}$, $\alpha > 0$, reell.* Da andererseits auch die Tatsache, daß in $w = w_1$ eine konforme Ecke vorhanden ist resp. der $\lim_{w \to w_1} \frac{\varphi(w) - \varphi(w_1)}{(w - w_1)^{1/\tau}}$ existiert[52]), gleichfalls bei einer solchen Transformation erhalten bleibt, so folgt hieraus insbesondere, daß man beim Beweise des Satzes 7 sich z. B. auf den Fall einer Ecke der Öffnung $\pi$ beschränken darf.

Aus der Bemerkung 1 in Nr. 17 folgt bereits, daß $t' = t^{\alpha}\operatorname{sgn} t$ ein metrischer Parameter der transformierten Kurve $\dot{C}$ in bezug auf $u = 0$ ist.

---

[52]) Vgl. Nr. 24.

Wir haben also nur noch zu zeigen, daß, unter $\bar{\xi}^*(t')$ die zu $\xi^*(t)$ analoge Funktion bei $\bar{C}$ verstanden, $\int_{-\varepsilon'}^{\delta'} \frac{\bar{\xi}^*(t')}{t'^2}\,dt'$ konvergiert. Zu diesem Zwecke beweisen wir die folgende nach Vorbemerkung 2 mit dieser äquivalente Tatsache: Ist $X(t)$ irgendeine (für hinreichend kleine $t$ definierte) monotone Majorante von $\xi(t)$, wo $\xi(t)$ die in Nr. 47 eingeführte Funktion ist, mit konvergentem Integral $\int_{-\varepsilon}^{\delta} \frac{X(t)}{t^2}\,dt$, so gibt es eine monotone Majorante $\bar{X}(t')$ von $\bar{\xi}(t')$, wo $\bar{\xi}(t')$ die zu $\xi(t)$ analoge Funktion bei $\bar{C}$ in $u=0$ ist, so daß das Integral $\int_{-\varepsilon'}^{\delta'} \frac{\bar{X}(t')}{t'^2}\,dt'$ konvergiert.

Beim Beweise dieser Behauptung dürfen wir uns aus Symmetriegründen etwa auf $t>0$, das heißt auf die Betrachtung eines der in $P$ zusammenstoßenden Kurvenzweige beschränken.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $w_1=0$, und der Winkel, den die rechtsseitige Halbtangente an $C$ in $w=0$ mit der positiven reellen Achse bildet, sei gleich 0. Ist dann $w=x+iy=Re^{i\lambda}$, so ist $u=w^\alpha=R^\alpha e^{i\alpha\lambda}$. Daher gilt

$$\xi(t)=R\sin\lambda$$

und analog für die $\xi(t)$ entsprechende Funktion $\bar{\xi}(t')$, zunächst als Funktion $\bar{\xi}_1(t)$ von $t$,

$$\bar{\xi}_1(t)=R^\alpha\sin|\alpha\lambda|.$$

Nun ist wegen $\xi(t)\leqq X(t)$ auch $\sin|\lambda|\leqq\frac{X(t)}{R}$, so daß

$$\bar{\xi}_1(t)\leqq R^{\alpha-1}X(t)\cdot(1+\varepsilon)\alpha$$

ist, wo $\varepsilon>0$ ist und mit $t\searrow 0$ gegen 0 konvergiert. Da wegen der für den metrischen Parameter gültigen Relation $\left|\frac{R}{t}\right|$ zwischen zwei positiven Schranken bleibt, ist sowohl für $\alpha>1$ als auch für $\alpha<1$

$$\bar{\xi}(t')=\bar{\xi}_1(t)\leqq K t^{\alpha-1}X(t)=K\,X_2(t),\qquad X_2(t)=t^{\alpha-1}X(t),$$

wo $K$ eine passende positive Konstante ist.

Die Funktion $X_2(t)=t^{\alpha-1}X(t)$ ist für $\alpha<1$ im allgemeinen nicht notwendig monoton; sie ist aber, wenn man $X_2(0)=0$ setzt, im Nullpunkt stetig (weil wegen der Konvergenz von $\int_0^{\delta}\frac{X(t)}{t^2}\,dt$ $\lim_{t\to 0}\frac{X(t)}{t}=0$ ist, siehe Nr. 49) und durchweg von beschränkter Variation. Denn zunächst ist in jedem abgeschlossenen, den Nullpunkt nicht enthaltenden Teilintervall

von $\langle 0, \delta\rangle$ sowohl $t^{\alpha-1}$ als auch $X(t)$ und somit auch $t^{\alpha-1}X(t)$ von beschränkter Variation. Daher kann man $X(t)$ in der Form darstellen

$$X_2(t) - X_2(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{t} d\,(t^{\alpha-1}X(t)) = \int_{\varepsilon}^{t} t^{\alpha-1}\,dX(t) + (\alpha-1)\int_{\varepsilon}^{t} X(t)\,t^{\alpha-2}\,dt,$$

wo die beiden ersten hier vorkommenden Integrale Stieltjes-Integrale sind. Da ferner die beiden Integrale in der rechts stehenden Summe für $\varepsilon \downarrow 0$ einzeln konvergieren, folgt, daß

$$X_2(t) = \int_{0}^{t} t^{\alpha-1}\,dX(t) + (\alpha-1)\int_{0}^{t} X(t)\,t^{\alpha-2}\,dt = Z_1(t) + (\alpha-1)\,Z_2(t),$$

$$Z_1(t) = \int_{0}^{t} t^{\alpha-1}\,dX(t), \qquad Z_2(t) = \int_{0}^{t} X(t)\,t^{\alpha-2}\,dt$$

ist, also entweder selbst monoton ($\alpha > 1$) oder die Differenz zweier monotoner Funktionen ($Z_1(t)$ und $-(\alpha-1)\,Z_2(t)$), somit also von beschränkter Variation ist. Bezeichnen wir die Totalvariation von $X_2(t)$ in $0 \ldots t$ mit $V(t)$, und setzen wir

$$V(t) = V(t'^{1/\alpha}) = \overline{V}(t'), \qquad Z_1(t) = \bar{Z}_1(t'), \qquad Z_2(t) = Z_2(t'),$$

so konvergiert, wie wir zeigen wollen,

$$\int_{0}^{\delta'} \frac{\overline{V}(t')}{t'^{2}}\,dt'.$$

Wegen $\overline{V}(t') \leqq Z_1(t') + |\alpha-1|\,\bar{Z}_2(t')$ und der daraus folgenden Ungleichung

$$\int_{\varepsilon'}^{\delta'} \frac{\overline{V}(t')}{t'^{2}}\,dt' \leqq \int_{\varepsilon'}^{\delta'} \frac{\bar{Z}_1(t')}{t'^{2}}\,dt' + |\alpha-1| \int_{\varepsilon'}^{\delta'} \frac{Z_2(t')}{t'^{2}}\,dt' \tag{7,3}$$

genügt es, die Konvergenz der beiden in (7,3) rechts stehenden Integrale, oder also auch (nach Hilfssatz 11) die der beiden Integrale

$$\int_{\varepsilon'}^{\delta'} \frac{d\bar{Z}_1(t')}{t'} = \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{dZ_1(t)}{t^{\alpha}} \quad \text{und} \quad \int_{\varepsilon'}^{\delta'} \frac{d\bar{Z}_2(t')}{t'} = \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{d\bar{Z}_2(t)}{t^{\alpha}}$$

zu beweisen. Dies folgt aber wegen[53])

---

[53]) Hierbei benutzen wir den folgenden Satz: *Sind $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ in $\langle\alpha, \beta\rangle$ stetig, und ist $\Psi(t)$ dort monoton, so gilt, wenn*

$$\Psi(t) = \int_{\alpha}^{t} \varphi_1(t)\,d\psi(t)$$

*gesetzt wird,*

$$\int_{\alpha}^{t} \varphi_2(t)\,d\Psi(t) = \int_{\alpha}^{t} \varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t)\,d\psi(t).$$

$$\int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{dZ_1}{t^{\alpha}} = \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{t^{\alpha-1}\,dX(t)}{t^{\alpha}} = \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{dX(t)}{t}$$

und

$$\int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{dZ_2}{t^{\alpha}} = \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{X(t)\,t^{\alpha-2}}{t^{\alpha}}\,dt = \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{X(t)}{t^2}\,dt$$

aus der Voraussetzung unter Benutzung des Hilfssatzes 11.

Wir können daher für die oben genannte Funktion $\bar{X}(t')$ die Totalvariation $V(t')$ als Funktion von $t'$ setzen. — Hiermit ist dann die obige Behauptung bewiesen. —

## § 8.

## Hilfssätze.

52. Wir beweisen nunmehr die folgenden Hilfssätze, von denen wir beim Beweise des Satzes 7 Gebrauch machen werden, und wenden uns erst dann dem Beweise dieses Satzes zu.

Hilfssatz 12. *Es sei* $X(t)$ *eine in* $-\delta \leqq t \leqq +\delta$ $\left(0 < \delta < \frac{\pi}{2}\right)$ *definierte nicht negative Funktion, die für* $t \downarrow 0$ *und* $t \uparrow 0$ *monoton gegen* 0 *abnimmt und für die das Integral* $\int_0^{\varepsilon} \frac{X(t)}{t^2}\,dt$ *für* $\varepsilon \gtrless 0$, $|\varepsilon| \leqq \delta$ [54]) *konvergiert. Dann gibt es zu* $X(t)$ *eine gleichfalls in* $-\delta \leqq t \leqq +\delta$ *definierte nicht negative durchweg mit stetiger Ableitung* $Q(t)$ *versehene Funktion* $V(t) = \int_0^t Q(t)\,dt$, *die gleichfalls für* $t \downarrow 0$, $t \uparrow 0$ *monoton gegen* 0 *abnimmt mit den folgenden weiteren Eigenschaften:*

1. *Es ist*

$$\frac{X(t)}{V(t)} \to 0 \quad \text{für } |t| \downarrow 0. \tag{8,1}$$

2. $Q(t)$ *läßt sich für* $-\pi \leqq t \leqq \pi$ *so geeignet stetig fortsetzen und alsdann für alle* $t$ *periodisch mit der Periode* $2\pi$ *definieren, daß für alle reellen* $t$ $Q(t) \leqq \operatorname{Max}_{\sigma \leqq \delta} Q(\sigma)$, $Q(0) = 0$, $Q(t) > 0$ *in* $(0, \pi)$, $Q(t) < 0$ *in* $(-\pi, 0)$ *ist und daß ferner für jedes reelle* $t$ *das Integral*

[54]) Nach dem Hilfssatz 11 ist die Konvergenz dieses Integrals äquivalent mit der des Stieltjes-Integrals $\int_0^{\varepsilon} \frac{dX(t)}{t}$.

(8,2) $$\int_0^{\pi} \left| \frac{Q(t+\sigma)-Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma$$

*existiert und gleichmäßig für alle reellen $t$ beschränkt ist*[55]).

Zusatz. *Unser Konstruktionsverfahren der Funktionen $Q(t)$ und $V(t)$ aus $X(t)$ wird überdies die folgende Eigenschaft besitzen:*

*Ist allgemein* $\left| \int_0^{a} \frac{dX(t)}{t} \right| \leqq \eta$ *für* $|a| \leqq \delta(\eta)$, *ist ferner $d$ eine positive Zahl, die von mindestens einem Wert der Funktion $\delta(\eta)$ übertroffen wird, so gilt für die im Beweise des Hilfssatzes 12 für* $|t| \leqq d$ [56]) *konstruierte und auf die dort angegebene Weise für* $d \leqq t \leqq \pi$ *fortgesetzte Funktion $Q(t)$:*

1. *Zu jedem $\omega > 0$ gibt es ein nur von $\omega, d$ und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängiges $\delta_1 = \delta_1(\omega; d, \delta(\eta)) \leqq d$, so daß* $|Q(t)| \leqq \omega$ *für* $|t| \leqq \delta_1$ *ist.*

2. *Es gibt eine nur von $d$ und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängige Konstante $k = k(d, \delta(\eta))$, so daß für alle reellen $t$*

$$|Q(t)| \leqq \operatorname*{Max}_{|t| \leqq d} |Q(t)| \leqq k$$

*ist.*

3. *Zu jedem $S > 0$ gibt es ein gleichfalls nur von $S, d$ und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängiges $\delta_2 = \delta_2(S; d, \delta(\eta))$, so daß*

$$\frac{X(t)}{V(t)} \leqq \frac{1}{S} \quad \text{für} \quad 0 < |t| \leqq \delta_2$$

*ist.*

4. *Es gibt eine nur von $d$ und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängige Konstante $K = K(d, \delta(\eta))$, so daß für alle reellen $t$*

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{Q(t+\sigma)-Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leqq K(d, \delta(\eta))$$

*ist.*

---

[55]) Dieser Satz hängt eng mit dem bekannten Reihensatze zusammen, daß es zu jeder Reihe mit positiven Gliedern eine „schwächer" konvergierende Reihe gibt, und wir werden auch von diesem Satze beim Beweise unseres Satzes Gebrauch machen. Jedoch würde die jenem Satze in unserem Falle entsprechende Aussage etwa dahin lauten, daß es eine Funktion $V(t) = \int_0^t Q(\sigma)\, d\sigma$ mit der Eigenschaft (8,1) gibt, für die das Integral $\int_0^t \frac{dV(t)}{t} - \int_0^t \frac{Q(t)}{t}\, dt$ auch noch konvergiert. Unser Satz behauptet darüber hinaus noch die gleichmäßige Beschränktheit des Integrals (8,2), eine Behauptung, die wesentlich weiter geht als jene.

[56]) Es ist also $d$ die im Hilfssatz 12 mit $\delta$ bezeichnete Größe.

53. Vorbemerkungen. 1. Offenbar darf $Q(t)$ mit einer beliebigen Konstanten multipliziert werden. Wir wollen im folgenden (bei der Anwendung dieses Hilfssatzes) uns $Q(t)$ stets so normiert denken, daß $|Q(t)| \leqq \frac{\pi}{8}$ ist. Genügt $X(t)$ den Voraussetzungen des Zusatzes und ist $k$ die im Zusatz unter 2. genannte Konstante, so soll im folgenden unter $Q(t)$ stets diejenige Funktion verstanden sein, die aus der im Hilfssatz konstruierten Funktion durch Multiplikation mit $\frac{\pi}{8k}$ hervorgeht, so daß also $|Q(t)| \leqq \frac{\pi}{8}$ ist.

2. Offenbar darf die Funktion $Q(t)$ als eine *ungerade* Funktion vorausgesetzt werden: $Q(t) = -Q(-t)$. Denn man braucht ja nur an Stelle von $Q(t)$ die Funktion $\bar{Q}(t) = Q(t) - Q(-t)$ zu wählen. Auch $|\bar{Q}(t)|$ darf immer $\leqq \frac{\pi}{8}$ vorausgesetzt werden. —

Beweis des Hilfssatzes 12. Wir führen den Beweis in zwei Schritten: Der erste Schritt besteht darin, daß wir unter Zuhilfenahme des konvergenten Integrals $\int_0^{\doteq a} \frac{dX(t)}{t}$, $a > 0$, eine für $t \leqq \delta$ stetige Funktion $q(t)$ konstruieren, die für $t > 0$ positiv, für $t < 0$ negativ ist, im Nullpunkt verschwindet und für die

$$(8,3) \qquad |X(t)| = \left| \int_0^t dX(t) \right| \leqq \left| \int_0^t |q(\sigma)|\, d\sigma \right| \quad \text{für jedes} \quad |t| \leqq \delta$$

gilt.

Der zweite Schritt besteht darin, aus $q(t)$ die in dem Satze genannte Funktion $Q(t)$ zu bilden.

54. Es sei zunächst $0 < t \leqq \delta$. Wir markieren in dem Intervall $0 \ldots \delta$ die Punkte $t_\nu = \frac{\delta}{2^\nu}$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$ und schreiben

$$\int_0^\delta \frac{dX(t)}{t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{t_{\nu+1}}^{t_\nu} \frac{dX(t)}{t} \geqq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2^\nu}{\delta} \int_{t_{\nu+1}}^{t_\nu} dX(t) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu ,$$

wo $a_\nu$ den Mittelwert $\frac{1}{t_\nu - t_{\nu+1}} \int_{t_{\nu+1}}^{t_\nu} dX(t)$ bezeichnet. Die durch

$$q_1(t) = \begin{cases} a_0 & \text{für} \quad t_1 \leqq t \leqq t_0 \\ a_\nu & \text{„} \quad t_{\nu+1} \leqq t < t_\nu \\ 0 & \text{„} \quad t = 0 \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

definierte „Treppenfunktion“ $q_1(t)$ ist im Nullpunkte stetig, und es existiert

das Integral

$$\int_0^t \frac{q_1(t)}{t}\,dt \leqq \int_0^{\delta} \frac{q_1(t)}{t}\,dt = \lg 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

für jedes $t$ mit $0 < t \leqq \delta$.

Die Funktion $q_1(t)$ ändern wir noch etwas ab, indem wir sie stellenweise noch vergrößern. Wir setzen

$$q_2(t) = 1 + a_0 \qquad = q_0 \text{ für } \quad t_1 \leqq t \leqq t_0 = \delta,$$

$$q_2(t) = \frac{1}{2^\nu} + a_\nu + 2a_{\nu-1} = q_\nu \quad \text{„} \quad t_{\nu+1} \leqq t < t_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

$$q_2(0) = 0.$$

Auch das Integral $\int_0^t \frac{q_2(t)}{t}\,dt$ existiert, da für $t \leqq t_n$, $n \geqq 1$

$$\int_0^t \frac{q_2(t)}{t}\,dt \leqq \int_0^{t_n} \frac{q_2(t)}{t}\,dt = \lg 2 \sum_{\nu=n}^{\infty} q_\nu$$

und wegen der Definition der $a_\nu$ und wegen $\frac{1}{2} t_\nu = t_\nu - t_{\nu+1}$:

$$(8,4) \qquad \sum_{\nu=n}^{\infty} q_\nu \leqq 3 \sum_{\nu=n-1}^{\infty} a_\nu + \frac{1}{2^{n-1}} \leqq 3 \sum_{\nu=n-1}^{\infty} \frac{t_\nu}{t_\nu - t_{\nu+1}} \int_{t_{\nu+1}}^{t_\nu} \frac{dX(t)}{t_\nu} + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\leqq 3 \sum_{\nu=n-1}^{\infty} 2 \int_{t_{\nu+1}}^{t_\nu} \frac{dX(t)}{t} + \frac{1}{2^{n-1}} = 6 \int_0^{t_{n-1}} \frac{dX(t)}{t} + \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (n \geqq 1)$$

ist. Für $n = 0$ gilt wegen

$$q_0 = 1 + a_0 \leqq 1 + \frac{t_0}{t_0 - t_1} \int_{t_1}^{t_0} \frac{dX(t)}{t} \leqq 1 + 2 \int_0^{\delta} \frac{dX(t)}{t}$$

$$(8,4^*) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu \leqq 6 \int_0^{\delta} \frac{dX(t)}{t} + 1.$$

55. Analog können wir für $t < 0$ eine ähnliche Funktion $q_2(t)$ konstruieren, die bis auf Sprungstellen in $t = -t_\nu = -\frac{\delta}{2^\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ konstant ist, die durchweg negativ ist und für die das Integral $\int_0^t \frac{q_2(\sigma)}{\sigma}\,d\sigma$ für jedes $t$ mit $-\delta \leqq t < 0$ existiert. Es genügt zu diesem Zwecke offenbar, die obigen Überlegungen auf die Funktion $X(-t)$ für $t > 0$ an-

zuwenden und dann in der resultierenden Funktion das Vorzeichen umzukehren. Es sei dann etwa

$$q_2(t) = \bar{q}_0 \quad \text{für} \quad -t_0 \leqq t \leqq -t_1,$$
$$q_2(t) = \bar{q}_\nu \quad \text{„} \quad -t_\nu < t \leqq -t_{\nu+1},$$
$$q_2(0) = 0,$$

so daß also die Reihe $\sum \bar{q}_\nu$ absolut konvergiert (weil alle $\bar{q}_\nu$ negativ sind).

56. Wir bemerken weiter, daß für jedes $t$ mit $|t| \leqq \delta$

$$\left| \int_0^t dX(t) \right| \leqq \int_0^t q_2(\sigma)\, d\sigma \tag{8,5}$$

ist. Es genügt aus Symmetriegründen, dies für $t > 0$ zu beweisen. Es sei $t_{n+1} \leqq t < t_n$. Dann ist

$$\int_0^t dX(t) \leqq \int_0^{t_n} dX(t) = \sum_{\nu=n}^{\infty} \int_{t_{\nu+1}}^{t_\nu} dX(t) = \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu \frac{\delta}{2^{\nu+1}}.$$

Andererseits ist

$$\int_0^t q_2(t)\, dt \geqq \int_0^{t_{n+1}} q_2(t)\, dt = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} q_2(t)\, dt = \sum_{\nu=n-1}^{\infty} q_\nu \frac{\delta}{2^{\nu+1}} \geqq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (a_\nu + 2a_{\nu-1}) \frac{\delta}{2^{\nu+1}}$$
$$= \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu \frac{\delta}{2^{\nu+1}} + \sum_{\nu=n-1}^{\infty} a_{\nu-1} \frac{\delta}{2^\nu} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu \frac{\delta}{2^{\nu+1}} + \sum_{\mu=n}^{\infty} a_\mu \frac{\delta}{2^{\mu+1}}$$

Da $\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu \frac{\delta}{2^{\nu+1}} \geqq 0$ ist, so folgt hieraus die Behauptung.

57. Wir machen nun aus der Funktion $q_2(t)$ eine stetige Funktion, indem wir sie in der Umgebung der Sprungstellen $\pm t_\nu$ etwas abändern, und zwar auf die folgende Weise: Ist (zunächst $t > 0$ vorausgesetzt) $q_\nu > q_{\nu+1}$, so verbinden wir den Punkt $P_\nu(t_{\nu+1}, q_\nu)$ mit dem Punkte $M_\nu\left(\frac{t_{\nu+1}+t_{\nu+2}}{2}, 0\right)$ durch eine Strecke, welche die Gerade im Abstande $q_{\nu+1}$ parallel zur $t$-Achse in $S_{\nu+1}$ schneiden möge. Dann ersetzen wir das horizontale Stück der Kurve $y = q_2(t)$ von $S_{\nu+1}$ bis $(t_{\nu+1}, q_{\nu+1})$ durch $S_{\nu+1}\overline{P}_\nu$ (s. Fig. 14). Ist dagegen $q_\nu < q_{\nu+1}$ (in der Fig. 14 z. B. $q_{\nu-1}, q_\nu$), so verbinden wir den Punkt $P_\nu(t_{\nu+1}, q_{\nu+1})$ mit dem Punkte $\left(\frac{t_{\nu+1}+t_\nu}{2}, 0\right)$ durch eine Strecke, die dann die Gerade im Abstande $q_\nu$ parallel zur $t$-Ache in $S'_\nu$ schneiden möge. Wir ersetzen nun das Stück der Kurve $y = q_2(t)$ von

$S'_\nu$ bis $(t_{\nu+1}, q_\nu)$ durch $\overline{S'_\nu P_\nu}$. Ist $q_\nu = q_{\nu+1}$, so nehmen wir keine Änderung am Streckenzug an der Stelle $t_\nu$ vor. Der so entstehende Polygonzug definiert für $t > 0$ eine stetige „stückweise" differenzierbare Funktion, die in den Ecken des Streckenzuges rechtsseitige und linksseitige Ableitungen besitzt, und deren Ableitung in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $(0, \delta\rangle$, *das 0 nicht enthält*, nur endlich vieler Werte fähig ist. Hieraus folgt, daß diese Funktion in jedem derartigen abgeschlossenen Teilintervall beschränkte Differenzenquotienten hat. — Für negative $t$ ist die Konstruktion ganz analog. Diese neue, für positive und negative Werte von $t$ definierte *stetige* Funktion sei mit $q(t)$ bezeichnet. Auch für $q(t)$ existiert $\int_0^t \left| \frac{q(t)}{t} \right| dt$, da die Änderung, die dieses Integral gegenüber $\int_0^t \left| \frac{q_2(t)}{t} \right| dt$ erfährt, absolut den Wert

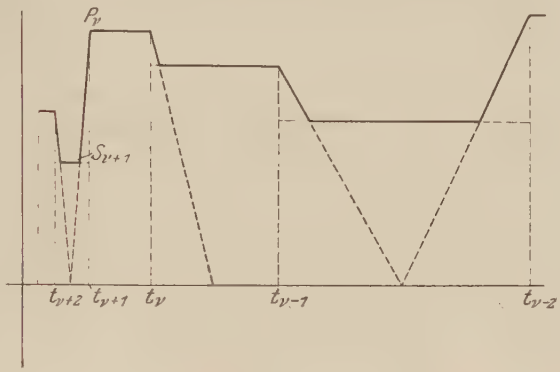



Fig. 14.

$$2 \lg 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |q_{\nu+1} - q_\nu| \quad \text{bzw.} \quad 2 \lg 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |\bar{q}_{\nu+1} - \bar{q}_\nu|$$

nicht übersteigt. Ferner gilt offenbar wegen $|q(t)| \geqq |q_2(t)|$ nach (8, 5)

$$\left| \int_0^t |q(\sigma)|\, d\sigma \right| \geqq \left| \int_0^t dX(t) \right| . \tag{8,3}$$

58. Zu der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu$ konstruieren wir nun eine „schwächer" konvergierende Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} Q'_\nu$, $Q'_\nu > 0$, so daß also

$$\frac{\sum_{\nu=n}^{\infty} Q'_\nu}{\sum_{\nu=n}^{\infty} q_\nu} \to \infty$$

für $n \to \infty$ gilt, indem wir etwa (auf die von Hadamard angegebene Weise) $\sum_{\nu=n}^{\infty} q_\nu = r_n$ setzen und $Q'_\nu$ durch $Q'_\nu = \sqrt{r_\nu} - \sqrt{r_{\nu+1}}$ definieren. Analog verfahren wir mit $\sum(-q_\nu)$; die entsprechende Reihe sei $\sum(-\bar{Q}'_\nu)$, $\bar{Q}'_\nu < 0$. Wir definieren dann eine neue Funktion

$$Q_1(t) = Q_0' = Q_0 \qquad \text{für} \quad t_1 \leqq t \leqq t_0,$$
$$Q_1(t) = Q_\nu' + Q_{\nu+1}' + Q_{\nu-1}' = Q_\nu \quad \text{„} \quad t_{\nu+1} \leqq t < t_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots),$$
$$Q_1(0) = 0,$$
$$Q_1(t) = \overline{Q}_0' = \overline{Q}_0 \qquad \text{„} \quad -t_1 \geqq t \geqq -t_0,$$
$$Q_1(t) = \overline{Q}_\nu' + \overline{Q}_{\nu+1}' + \overline{Q}_{\nu-1}' = \overline{Q}_\nu \quad \text{„} \quad -t_{\nu+1} \geqq t > -t_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

und machen dann $Q_1(t)$ auf genau dieselbe Weise stetig wie $q_2(t)$. Die so entstandene stetige („stückweise" differenzierbare) Funktion ist nun die in der Formulierung des Satzes mit $Q(t)$ bezeichnete Funktion. Alle Derivierten von $Q(t)$ sind in jedem Intervall $0 < \delta_1 \leqq |t| \leqq \delta$ nur endlich vieler Werte fähig. Ferner ist für $|t| < |t_{n+1}|$

$$(8,6) \quad |Q(t)| \leqq \sum_{\nu=n}^{\infty} (Q_\nu + |\overline{Q}_\nu|), \text{ und dies ist } \leqq 3 \sum_{\nu=n-1}^{\infty} (Q_\nu' + \overline{Q}_\nu') \text{ für } n \geqq 1.$$

Hieraus erhält man insbesondere die obere Schranke $\sum_{\nu=0}^{\infty} (Q_\nu + |\overline{Q}_\nu|)$ für $|Q(t)|$ für $|t| \leqq \frac{\delta}{2}$. Beachtet man aber, daß für $\frac{\delta}{2} \leqq |t| \leqq \delta$ sicher $|Q(t)| \leqq Q_0 + |\overline{Q}_0| + Q_1 + |\overline{Q}_1|$ ist, so erkennt man, daß

$$(8,7) \qquad |Q(t)| \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} (Q_\nu + |\overline{Q}_\nu|) \quad \text{für alle} \quad |t| \leqq \delta$$

gilt. — Es wird bei den späteren Betrachtungen nützlich sein, sich vor Augen zu halten, daß die zur Funktion $-q(-t)$, die ja gleichfalls vom Typus $q(t)$ ist, nach unserem Verfahren konstruierte Funktion gerade $-Q(-t)$ ist. Schließlich bemerken wir noch, daß wegen der Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu$ bzw. $\sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu'$ das Integral

$$\int_0^t \frac{Q(\sigma)}{\sigma} d\sigma$$

für $|t| \leqq \delta$ konvergiert. Für später sei bemerkt:

$$\int_0^{\delta/2} \frac{Q(\sigma)}{\sigma} d\sigma \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} (Q_{\nu-1} + Q_\nu + Q_{\nu+1}) \int_{t_{\nu+1}}^{t_\nu} \frac{dt}{t} \leqq 3 \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu$$

und daher, da Analoges für $\int_0^{\delta/2} \left| \frac{Q(-\sigma)}{-\sigma} \right| d\sigma$ gilt,

$$(8,7^*) \quad \int_0^{\delta/2} \left| \frac{Q(\sigma)}{\sigma} - \frac{Q(-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leqq \int_0^{\delta/2} \left( \left| \frac{Q(\sigma)}{\sigma} \right| + \left| \frac{Q(-\sigma)}{\sigma} \right| \right) d\sigma \leqq 3 \sum_{\nu=0}^{\infty} (Q_\nu + |\overline{Q}_\nu|).$$

Wegen (8,3) folgt nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz der Differentialrechnung etwa für $t > 0$ (für $t_{n+1} \leqq t < t_n$)

$$(8,8) \qquad \frac{X(t)}{V(t)} = \frac{\int_0^t dX(t)}{\int_0^t Q(\sigma)\,d\sigma} \leqq \frac{\int_0^t q(\sigma)\,d\sigma}{\int_0^t Q(\sigma)\,d\sigma} = \frac{q(\vartheta t)}{Q(\vartheta t)} \qquad (0 < \vartheta < 1),$$

und dies ist weiter (da für $t_{\lambda+1} \leqq t < t_\lambda$ $q(t) \leqq \operatorname{Max}(q_{\lambda-1}, q_\lambda, q_{\lambda+1})$, $Q(t) \geqq Q'_{\lambda+1}, Q'_\lambda, Q'_{\lambda-1}$ ist)

$$\leqq \frac{q_\mu}{Q'_\mu} = \frac{r_\mu - r_{\mu+1}}{\sqrt{r_\mu} - \sqrt{r_{\mu+1}}} = \sqrt{r_\mu} + \sqrt{r_{\mu+1}} \qquad (\mu \geqq n-1).$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar die Eigenschaft 1.

59. Wir weisen nunmehr die Eigenschaft 2 für die Funktion $Q(t)$ nach. Wir setzen $Q(t)$ für $-\pi \leqq t < -\delta$ und $\delta < t \leqq \pi$ fort, indem wir etwa $Q(-\pi) = Q(\pi) = 0$ setzen und

$$Q(t) = \begin{cases} -(t-\delta)\dfrac{Q(\delta)}{\pi-\delta} + Q(\delta) & \text{für} \quad \delta \leqq t \leqq \pi \\ -(t+\delta)\dfrac{Q(-\delta)}{-\pi+\delta} + Q(-\delta) & \text{für} \quad -\delta \geqq t \geqq -\pi \end{cases}$$

definieren. Das graphische Bild von $Q(t)$ in diesem Intervall ist dann einfach die die Punkte $(\delta, Q(\delta))$ und $(\pi, Q(\pi) = 0)$ bzw. $(-\delta, Q(-\delta))$ und $(-\pi, Q(-\pi))$ verbindende Gerade. Ferner setzen wir $Q(t+2\pi) = Q(t)$. Dann ist $Q(t)$ offenbar für alle $t$ stetig und periodisch mit der Periode $2\pi$, und die Relation (8,7) bleibt offenbar für alle $t$ noch richtig. Für das Folgende sei noch bemerkt, daß für alle $t$ $|Q(t)| \leqq \operatorname{Max}_{|t| \leqq \delta} |Q(t)|$ und für $\frac{\delta}{2} \leqq |t| \leqq \pi$ der Differenzenquotient

$$\left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| \leqq \frac{\operatorname{Max}_{-\pi \leqq t \leqq \pi} |Q(t)|}{\frac{\delta}{8}}$$

ist. — Nun existiert das Integral

$$\int_0^\pi \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma$$

für jedes feste $t$. Dies folgt sofort aus der Existenz der Integrale

$$\int_0^\pi \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t)}{\sigma} \right| d\sigma \quad \text{und} \quad \int_0^\pi \left| \frac{Q(t-\sigma) - Q(t)}{\sigma} \right| d\sigma$$

für jedes *feste* $t$ mit $-\pi \leqq t \leqq \pi$. Die Existenz dieser beiden Integrale aber kann man so einsehen: Ist $t = 0$, so haben wir sie am Schluß von

Nr. 58 bewiesen. Ist $t$ ein von 0 verschiedener Punkt, so beachte man, daß der Integrand für *feste* von 0 verschiedene $t$ eine für alle $\sigma$ bis auf eventuell $\sigma = 0$ stetige und gleichmäßig beschränkte Funktion ist. (Man beachte das über die Derivierten in Nr. 58 Gesagte und die Definition von $Q(t)$ in $-\pi \leqq t \leqq -\delta,\ \delta \leqq t \leqq \pi$.)

60. Wir behaupten nun, daß *das Integral* $(8,2)$ *gleichmäßig für alle reellen* $t$ *beschränkt bleibt.* Es genügt, die Behauptung für $-\pi \leqq t \leqq \pi$ zu beweisen. Wir weisen dies zunächst für $-\frac{\delta}{2} \leqq t \leqq \frac{\delta}{2}$ nach. Da das Integral

$$\int_{\delta/2}^{\pi} \left| \frac{Q(t+\sigma)-Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leqq \frac{2}{\delta} \cdot \left(\pi - \frac{\delta}{2}\right) \cdot 2M$$

gleichmäßig für alle $t$ bleibt, wo $|Q(t)| \leqq M$ vorausgesetzt ist, so genügt es

$$\int_{0}^{\delta/2} \left| \frac{Q(t+\sigma)-Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma, \qquad -\frac{\delta}{2} \leqq t \leqq \frac{\delta}{2}$$

abzuschätzen. Nach dem oben über $Q(t)$ und $-Q(-t)$ Bemerkten (Nr. 58) genügt es, diese Behauptung nur für positive $t$, $0 < t \leqq \frac{\delta}{2}$, zu beweisen. Es sei also $0 < t \leqq \frac{\delta}{2}$. Dann ist

$$(8,9) \quad \int_{0}^{\delta/2} \left| \frac{Q(t+\sigma)-Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma = \int_{0}^{t} \left| \frac{Q(t+\sigma)-Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma + \int_{t}^{\delta/2} \left| \frac{Q(t+\sigma)-Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma$$

Wir schätzen zuerst den ersten Summanden der rechten Seite dieser Gleichung ab:

$$(8,10) \quad \int_{0}^{t} \left| \frac{Q(t+\sigma)-Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leqq \int_{0}^{t} \left| \frac{Q(t+\sigma)-Q(t)}{\sigma} \right| d\sigma + \int_{0}^{t} \left| \frac{Q(t-\sigma)-Q(t)}{\sigma} \right| d\sigma$$

Es gibt ein $n$, so daß $t_{n+1} \leqq t < t_n$ ist. Dann ergibt sich für den Integranden des ersten der beiden Integrale auf der rechten Seite von $(8,10)$, wenn $|Q(t)| \leqq M$ ist, für alle $\sigma$ mit $0 < \sigma \leqq t$

$$\left| \frac{Q(t+\sigma)-Q(t)}{\sigma} \right| \leqq \frac{M}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{2^{n+1}}} = 2^{n+2} \frac{M}{\delta}.$$

Denn die Steigung der vom Punkte $(t, Q(t))$ nach dem Punkte $((t+\sigma), Q(t+\sigma))$ gezogenen Sehne der Kurve $y = Q(t)$ kann, wie man sich leicht überlegt, den Wert $\frac{M}{\frac{1}{2}(t_n - t_{n+1})} = \frac{M}{\frac{1}{2}\frac{\delta}{2^{n+1}}} = \frac{M}{\left(\frac{\delta}{2^{n+2}}\right)}$ nicht über-

schreiten[57]). Daher ist

$$\int_0^t \left| \frac{Q(t+\sigma)-Q(t)}{\sigma} \right| d\sigma \leqq \frac{\delta}{2^n} \cdot \frac{2^{n+2}}{\delta} \cdot M = 4M.$$

Ferner erkennt man, daß auch

$$\int_0^t \left| \frac{Q(t-\sigma)-Q(t)}{\sigma} \right| d\sigma \leqq \frac{M \cdot |t|}{\frac{1}{2}(t_{n+1}-t_{n+2})} = \frac{M}{\frac{1}{2}\,\frac{\delta}{2^{n+2}}} \cdot \frac{\delta}{2^n} = 8M$$

ist, so daß

$$\int_0^t \left| \frac{Q(t+\sigma)-Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leqq 12M \tag{8,11}$$

ist.

61. Jetzt schätzen wir den *zweiten* Summanden auf der rechten Seite von (8, 9) ab. Zu diesem Zwecke schreiben wir, falls $t_{n+1} \leqq t < t_n$ ist, für $n \geqq 3$

$$\int_t^{\frac{\delta}{2}} \left| \frac{Q(t+\sigma)-Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma = \int_t^{t+\frac{\delta}{2^{n-1}}} \left| \frac{Q(t+\sigma)-Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \tag{8,12}$$

$$+ \sum_{\nu=2}^{n-2} \int_{t+\frac{\delta}{2^{n-\nu+1}}}^{t+\frac{\delta}{2^{n-\nu}}} \left| \frac{Q(t+\sigma)-Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma + \int_{t+\frac{\delta}{2^2}}^{\frac{\delta}{2}} \left| \frac{Q(t+\sigma)-Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma.$$

Ist $n \leqq 2$, so zerlegen wir das Integral links überhaupt nicht.

Es sei zuächst $n \geqq 3$. Für den ersten der in dieser Gleichung rechts stehenden Summanden erhalten wir sofort $\left(\text{wegen } \sigma \geqq t \geqq \frac{\delta}{2^{n+1}}\right)$ die Abschätzung

$$\int_t^{t+\frac{\delta}{2^{n-1}}} \left| \frac{Q(t+\sigma)-Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leqq \frac{\delta}{2^{n-1}} \cdot \frac{2M}{\left(\frac{\delta}{2^{n+1}}\right)} = 2^3 M = 8M.$$

---

[57]) Dies kann man sich geometrisch an Hand der Figur leicht überlegen. Man kann dies aber auch aus einem allgemeinen Satze von Scheefer folgern, der besagt, daß sämtliche Differenzenquotienten einer in einem abgeschlossenen Intervall stetigen Funktion zwischen der unteren und oberen Grenze sämtlicher Derivierten dieser Funktion in diesem Intervall liegen. Man hat nur diesen Satz auf $Q(t)$ in $\langle t_{n+1}, \delta \rangle$ anzuwenden.

Für den letzten dieser Summanden ergibt sich ähnlich:

$$\int_{t+\frac{\delta}{4}}^{\frac{\delta}{2}} \left| \frac{Q(t+\sigma)-Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leqq \frac{\delta}{4} \cdot \frac{2M}{\frac{\delta}{4}} = 2M.$$

Die übrigbleibenden Summanden schätzen wir folgendermaßen ab: Setzen wir $\sigma_\nu = t + \frac{\delta}{2^{n-\nu}}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n-2)$ und tragen wir auf der $t$-Achse des Diagramms von $Q(t)$ die Punkte $-y_\nu = t - \sigma_\nu = -\frac{\delta}{2^{n-\nu}}$ und $\bar{y}_\nu = t + \sigma_\nu = 2t + \frac{\delta}{2^{n-\nu}}$ ab, so fallen die Punkte $-y_\nu$ mit den Punkten $-t_{n-1}, -t_{n-2}, \ldots, -t_2$ zusammen; von den Punkten $\bar{y}_\nu$ dagegen, die rechts von $t$ liegen, fällt keiner mit einem der $t_\mu = \frac{\delta}{2^\mu}$ zusammen, sondern es liegt in jedem offenen Intervall $(t_\mu, t_{\mu-1})$ für $2 \leqq \mu \leqq n-1$ genau ein Punkt $y$, und zwar liegt der Punkt $\bar{y}_\nu$ in dem Intervall $(t_{n-\nu}, t_{n-\nu-1})$. Denn es ist ja

$$\frac{\delta}{2^n} = 2t_{n+1} \leqq 2t < 2t_n = \frac{2\delta}{2^n} = \frac{\delta}{2^{n-1}}$$

und daher

$$\frac{\delta}{2^{n-\nu}} < \bar{y}_\nu = 2t + \frac{\delta}{2^{n-\nu}} < \frac{\delta}{2^{n-\nu-1}}.$$

Liegt $\sigma$ in $\langle \sigma_\nu, \sigma_{\nu+1} \rangle$, so liegt $t+\sigma$ in $\langle \bar{y}_\nu, \bar{y}_{\nu+1} \rangle$ und $(t-\sigma)$ in $\langle -y_{\nu+1}, -y_\nu \rangle$. Da ferner in jedem der abzuschätzenden Integrale der Nenner des Integranden nicht kleiner als die Integrationsstrecke ist, ist daher

$$\int_{\sigma_\nu}^{\sigma_{\nu+1}} \left| \frac{Q(t+\sigma)-Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leqq \frac{\underset{\bar{y}_\nu \leqq y \leqq \bar{y}_{\nu+1}}{\operatorname{Max}} |Q(y)| + \underset{-y_{\nu+1} \leqq y \leqq -y_\nu}{\operatorname{Max}} |Q(y)|}{(\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu)} \cdot (\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu).$$

62. Um die genannten Integrale abzuschätzen, haben wir nun einfach die Summe der rechts stehenden Ausdrücke

$$\sum_{\nu=1}^{n-3} \left( \underset{\bar{y}_\nu \leqq y \leqq \bar{y}_{\nu+1}}{\operatorname{Max}} |Q(y)| + \underset{-y_{\nu+1} \leqq y \leqq -y_\nu}{\operatorname{Max}} |Q(y)| \right)$$

abzuschätzen. Da auf der negativen $t$-Achse die Endpunkte eines Intervalles $-y_{\nu+1}, -y_\nu$ mit den Punkten $-t_{\nu+1}, -t_\nu$ zusammenfallen, kommen in dem festen Integrationsintervall $\langle \sigma_\nu, \sigma_{\nu+1} \rangle$ nur drei aufeinanderfolgende $|\bar{Q}_\mu|$-Werte der oben konstruierten Reihe $\sum_{\mu=0}^{\infty} \bar{Q}_\mu$ (die ja den wesentlichen Bestandteil der Funktion $Q(t)$ ausmachen) als ein solches Maximum in $\langle -y_{\nu+1}, -y_\nu \rangle$ in Frage. Es ist daher dieses Maximum $\leqq |\bar{Q}_{\nu-1} + \bar{Q}_\nu| + |\bar{Q}_{\nu+1}|$.

Mithin ist

$$\sum_{\nu=1}^{n-3} \operatorname*{Max}_{-y_{\nu+1} \leqq y \leqq -y_\nu} |Q(y)| \leqq \sum_{\nu=1}^{n-3} (|\bar{Q}_{\nu-1}| + |\bar{Q}_\nu| + |\bar{Q}_{\nu+1}|) \leqq 3 \sum_{\nu=0}^{n} |\bar{Q}_\nu|.$$

Jedes Intervall $\langle \bar{y}_\nu, \bar{y}_{\nu+1} \rangle$ enthält den Teilpunkt $t_{n-\nu-1}$ im Innern und ist in der Vereinigungsmenge der in $t_{n-\nu-1}$ anstoßenden Intervalle enthalten. Daher ist das gesamte

$$\operatorname*{Max}_{\bar{y}_\nu \leqq y \leqq \bar{y}_{\nu+1}} |Q(y)| \leqq (Q_{n-\nu} + Q_{n-\nu-1} + Q_{n-\nu-2} + Q_{n-\nu-3}),$$

somit ist die Summe

$$\sum_{\nu=1}^{n-3} \operatorname*{Max}_{\bar{y}_\nu \leqq y \leqq \bar{y}_{\nu-1}} |Q(y)| \leqq \sum_{\nu=0}^{n-3} (Q_{n-\nu} + Q_{n-\nu-1} + Q_{n-\nu-2} + Q_{n-\nu-3}) \leqq 4 \sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu.$$

Wir haben also für das abzuschätzende Integral (8, 12), falls $n \geqq 3$ ist,

$$(8,13) \qquad \int_t^{\delta/2} \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leqq 10\,M + 3 \sum_{\nu=0}^{n} |\bar{Q}_\nu| + 4 \sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu$$

$$< 10\,M + 3 \sum_{\nu=0}^{\infty} |\bar{Q}_\nu| + 4 \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu.$$

Für $n \leqq 2$, d. h. $\frac{\delta}{8} \leqq t \leqq \frac{\delta}{2}$, gilt offenbar

$$\int_t^{\delta/2} \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leqq \left(\frac{\delta}{2} - t\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{\delta}{8}\right)} \cdot 2\,M \leqq 6\,M,$$

so daß also die Abschätzung (8, 13) in jedem Falle richtig ist.

Da nun die in (8, 13) rechts stehende Reihe unabhängig von der Stelle $t$ ist, folgt hieraus in Verbindung mit (8, 11) die Behauptung für $t$ in $0 < t \leqq \frac{\delta}{2}$. Damit erkennt man dann (vgl. (8, 7*) und Nr. 60) die Richtigkeit der Behauptung für $-\frac{\delta}{2} \leqq t \leqq \frac{\delta}{2}$. Da schließlich bei unserer Definition von $Q(t)$ für alle $t$ mit $\frac{\delta}{2} \leqq |t| \leqq \pi$ der Quotient

$$\left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| \leqq \frac{\operatorname*{Max}_t |Q(t)|}{\frac{\delta}{8}}$$

(siehe Nr. 59) bleibt, ist in der Tat das Integral (8, 2) gleichmäßig für $-\pi \leqq t \leqq \pi$ beschränkt. Insbesondere ergibt sich, da man $M \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} (Q_\nu + |\bar{Q}_\nu|)$ (vgl. (8, 7)) annehmen kann, nach der Abschätzung (8, 11), (8, 13) und (8, 7*)

$$(8,14) \qquad \int_0^{\delta/2} \left| \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \leqq 26 \sum_{\nu=0}^{\infty} (Q_\nu + |\bar{Q}_\nu|), \qquad |t| \leqq \frac{\delta}{2}.$$

63. Beweis des Zusatzes. Nach (8,4) gilt für $n \geqq 1$

$$r_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} q_\nu \leqq 6 \int_0^{\frac{d}{2^{n-1}}} \frac{dX(t)}{t} + \frac{1}{2^{n-1}}, \qquad \bar{r}_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} |\bar{q}_\nu| \leqq \left| 6 \int_0^{-\frac{d}{2^{n-1}}} \frac{dX(t)}{t} \right| + \frac{1}{2^{n-1}},$$

und nach (8,4*)

$$(8,15) \quad r_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu \leqq 6 \int_0^{d} \frac{dX(t)}{t} + 1, \qquad \bar{r}_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} |\bar{q}_\nu| \leqq \left| 6 \int_0^{-d} \frac{dX(t)}{t} \right| + 1.$$

Daher ist wegen $(n \geqq 2)$

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} Q_\nu \leqq 3 \sum_{\nu=n-1}^{\infty} Q'_\nu = 3\sqrt{r_{n-1}} \leqq \sqrt{54 \int_0^{\frac{d}{2^{n-2}}} \frac{dX(t)}{t} + \frac{9}{2^{n-2}}},$$

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} |\bar{Q}_\nu| \leqq 3 \sum_{\nu=n-1}^{\infty} |\bar{Q}'_\nu| = 3\sqrt{\bar{r}_{n-1}} \leqq \sqrt{54 \left| \int_0^{-\frac{d}{2^{n-2}}} \frac{dX(t)}{t} \right| + \frac{9}{2^{n-2}}}$$

für $|t| \leqq \frac{d}{2^{n+1}}$ für $n \geqq 2$ nach (8,6)

$$|Q(t)| \leqq \sqrt{54 \int_0^{\frac{d}{2^{n-2}}} \frac{dX(t)}{t} + \frac{1}{2^{n-6}}} + \sqrt{54 \left| \int_0^{-\frac{d}{2^{n-2}}} \frac{dX(t)}{t} \right| + \frac{1}{2^{n-6}}}.$$

Nun ist aber auch für alle $|t| \leqq d$ (s. (8,7))

$$|Q(t)| \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} (Q_\nu + |\bar{Q}_\nu|) \leqq 3 \sum_{\nu=0}^{\infty} (Q'_\nu + |\bar{Q}'_\nu|),$$

und daher ist wegen (8,15)

$$(8,16) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} (Q_\nu + |\bar{Q}_\nu|) \leqq \sqrt{54 \int_0^{d} \frac{dX}{t} + 2^6} + \sqrt{54 \left| \int_0^{-d} \frac{dX}{t} \right| + 2^6},$$

$$(8,17) \quad |Q(t)| \leqq \sqrt{54 \int_0^{d} \frac{dX}{t} + 2^6} + \sqrt{54 \left| \int_0^{-d} \frac{dX}{t} \right| + 2^6},$$

$$|t| \leqq d.$$

1. Ist $\omega > 0$ vorgegeben, so bestimme man zunächst ein $n_0$ so, daß

$$\frac{1}{2^{n-6}} \leqq \frac{\omega^2}{8} \quad \text{und} \quad \frac{d}{2^{n-2}} \leqq \delta\left(\frac{\omega^2}{8 \cdot 54}\right) \quad \text{für} \quad n \geqq n_0 \geqq 2$$

ist. Dann ist für $|t| \leqq \delta_1 = \frac{d}{2^{n_0+1}}$, wo $n_0$ nur von $\omega$, $d$ und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängt,

$$|Q(t)| \leqq \omega.$$

2. Da $d$ so gewählt ist, daß es ein $\eta = \eta_0 > 0$ gibt, so daß $\delta(\eta_0) > d$ ist, ist nach (8,17)

$$|Q(t)| \leqq 2\sqrt{54\,\eta_0 + 2^6} = k = k(d, \delta(\eta))$$

und daher für *alle reellen* $t$

$$|Q(t)| = \operatorname*{Max}_{|t| \leqq d} |Q(t)| \leqq k. \tag{8,18}$$

3. Aus der Abschätzung (8,8) ergibt sich für $0 < t < t_n$

$$\frac{X(t)}{V(t)} \leqq \sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n-1}}.$$

und Analoges gilt auch für negatives $t$. Ist $S > 0$ vorgegeben, so bestimme man ein $n_1$, so daß

$$\frac{1}{2^{n-2}} \leqq \frac{1}{2}\frac{1}{(2S)^2}, \qquad \frac{d}{2^{n-2}} \leqq \delta\left(\frac{1}{6\cdot 2\cdot (2S)^2}\right) \quad \text{für alle} \quad n \geqq n_1$$

ist. Dann ist für alle $t$ mit $0 < |t| \leqq \frac{d}{2^{n_1}} = \delta_2(S; d, \delta(\eta))$

$$\frac{X(t)}{V(t)} \leqq \frac{1}{S}.$$

4. Ist (wie in 2.) $\delta(\eta_0) > d$, $\eta_0 > 0$, so ist wegen (8,16)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(Q_\nu + |\bar{Q}_\nu|) \leqq 2\sqrt{54\,\eta_0 + 2^6} = k,$$

wo $k$ nur von $d$ und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängt. Nach (8,14) ist daher für $|t| \leqq \frac{d}{2}$

$$\int_0^{\frac{d}{2}} \left|\frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma}\right| d\sigma \leqq 26\,k.$$

Das Integral

$$\int_{d/2}^{\pi} \left|\frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma}\right| d\sigma, \qquad -\frac{d}{2} \leqq t \leqq \frac{d}{2},$$

ist offenbar (wegen (8,18))

$$\leqq \left(\pi - \frac{d}{2}\right)\frac{2}{d}\cdot 2\,k \leqq \frac{4\pi}{d}k.$$

Um weiter das Integral $\int_0^{\pi} \frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma} d\sigma$ für alle $t$ in $\frac{d}{2} \leqq |t| \leqq \pi$ abzuschätzen, beachte man, daß (Nr. 59) für diese $t$ der Differenzenquotient $\left|\frac{Q(t+\sigma) - Q(t-\sigma)}{\sigma}\right| \leqq \frac{\operatorname{Max}_t |Q(t)|}{\frac{d}{8}}$ ist. Hieraus folgt dann, daß dieses

Integral (wegen (8, 18))

$$\leqq \frac{8\pi k}{d}$$

ist, und somit ergibt sich in Verbindung mit dem Obigen die Behauptung 4 des Zusatzes. —

64. Für unsere späteren Betrachtungen ist es nützlich, den folgenden von Lindelöf[58]) herrührenden Satz hervorzuheben:

*Ist* $w = \Phi(z)$ *in* $|z| < 1$ *regulär und bildet* $\Phi(z)$ *die Peripherie dieses Kreises auf eine geschlossene Jordankurve ab, die längs eines Bogens* $c$ *eine sich stetig drehende Tangente hat, so existiert in jedem Punkte des entsprechenden Bogens* $\vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2$ *der Peripherie*

$$\lim_{\vartheta' \to \vartheta} \arg \frac{\Phi(e^{i\vartheta'}) - \Phi(e^{i\vartheta})}{e^{i\vartheta'} - e^{i\vartheta}} = A_\Phi(e^{i\vartheta}) = \lim_{r \uparrow 1} \arg \Phi'(r e^{i\vartheta}),$$

*und es ist* $A_\Phi(e^{i\vartheta})$ *längs dieses Bogens eine stetige Funktion von* $\vartheta$.

*Hieraus ergibt sich für den Winkel* $\theta = \theta(\vartheta)$, *den die im mathematisch positiven Durchlaufungssinne von* $C$ *gerichtete Tangente im Punkte* $\Phi(e^{i\vartheta})$ *mit der positiven reellen Achse bildet (bei geeigneter Normierung der Winkel* mod $2\pi$) *wegen*

$$\theta(\vartheta) = \lim_{\vartheta' \downarrow \vartheta} \arg(\Phi(e^{i\vartheta'}) - \Phi(e^{i\vartheta})) = \lim_{\vartheta' \downarrow \vartheta} \arg \frac{\Phi(e^{i\vartheta'}) - \Phi(e^{i\vartheta})}{e^{i\vartheta'} - e^{i\vartheta}} + \lim_{\vartheta' \downarrow \vartheta} \arg(e^{i\vartheta'} - e^{i\vartheta}),$$

$$(8,19) \qquad \theta(\vartheta) = A_\Phi(e^{i\vartheta}) + \vartheta + \frac{\pi}{2}.$$

65. Hilfssatz 13. *Es sei* $w = \Phi(z)$ *in* $|z| < 1$ *regulär, in* $|z| \leqq 1$ *stetig und es möge* $\Phi'(z)$ *in* $|z| < 1$ *nach unten beschränkt sein, d. h. es möge ein* $N > 0$ *existieren, so daß*

$$|\Phi'(z)| \geqq N > 0$$

*ist. Ferner besitze die in* $|z| < 1$ *reguläre Potentialfunktion* $\arg \Phi'(z)$ *auf* $|z| = 1$ *stetige Randwerte* $A_\Phi(z)$, *und es gelte insbesondere für einen Punkt* $z = z_1$ *von* $|z| = 1$

$$(8,20) \qquad |\arg \Phi'(z) - A_\Phi(z_1)| \leqq \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad \text{für } |z - z_1| \leqq \delta(\varepsilon), \quad |z| < 1.$$

*Dann ist für alle* $z', z''$ *mit* $|z' - z_1| \leqq \delta(\varepsilon)$, $|z'' - z_1| \leqq \delta(\varepsilon)$, $|z'| < 1$, $|z''| < 1$

$$(8,21) \qquad |\Phi(z'') - \Phi(z')| \geqq N(1 - \varepsilon)|z'' - z'|,$$

*oder, mit anderen Worten: in einer allseitigen Umgebung von* $z = z_1$ *besitzen alle Differenzenquotienten von* $\Phi(z)$ *absolut eine positive untere Schranke.*

---

[58]) E. Lindelöf, Compte rendu du quatrième Congrès des Mathemat. Scandinaves 1916, p. 89 ff.

*Das Innere des von dem um $z = z_1$ mit dem Radius $\delta(\varepsilon)$ beschriebenen in $|z| \leqq 1$ liegenden Kreisbogen und dem $z_1$ enthaltenden Peripheriebogen gebildeten Kreisbogenzweiecks $Z$ wird durch $w = \Phi(z)$ auf das Innere einer geschlossenen Jordankurve abgebildet.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $A_\Phi(z_1) = 0$. Es ist bei geradliniger Integration von $z''$ nach $z'$ für $z''$ und $z'$ in der $\delta(\varepsilon)$-Umgebung von $z_1$ ($|z''| < 1$, $|z'| < 1$)

$$\Phi(z'') - \Phi(z') = \int_{z'}^{z''} \Phi'(z)\, dz = e^{i\alpha} \int_0^l \Phi'(z' + e^{i\alpha}\lambda)\, d\lambda,$$

wo

$$z = z' + \lambda e^{i\alpha}, \qquad 0 \leqq \lambda \leqq l, \qquad z'' = z' + l e^{i\alpha}$$

ist. Nun ist aber

$$|\Phi(z'') - \Phi(z')| = \left| \int_0^l \Phi' \cdot e^{i \arc \Phi'}\, d\lambda \right| \geqq \int_0^l |\Phi'| \cos(\arc \Phi')\, d\lambda,$$

und dies ist wegen $|\arc \Phi'(z)| \leqq \varepsilon < 1$, $|\sin \arc \Phi'(z)| \leqq \varepsilon < 1$ und wegen

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{(1 + |\sin\beta|)(1 - |\sin\beta|)} \geqq \sqrt{1 - |\sin\beta|} \geqq 1 - |\sin\beta|$$

$$\geqq \int_0^l |\Phi'| \cdot (1 - \varepsilon)\, d\lambda \geqq N l (1 - \varepsilon) = N(1 - \varepsilon)\, |z'' - z'|,$$

womit die Ungleichung (8, 21) bewiesen ist.

Um die zweite Behauptung einzusehen, beachte man, daß das Bild des Randes des in der Behauptung genannten Kreisbogenzweiecks $Z$ wegen der Stetigkeit von $\Phi(z)$ in $|z| \leqq 1$ und der Ungleichung (8, 21) eine doppelpunktfreie stetige Kurve ist.

66. Schließlich brauchen wir nach dem folgenden potentialtheoretischen

Hilfssatz 14. *Es sei $g(t)$ eine für alle reellen $t$ definierte reelle, integrable und periodische Funktion mit der Periode $2\pi$. Wir bilden die für $|z| = |r e^{i\varphi}| < 1$ reguläre Potentialfunktion*

$$u(r e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\vartheta) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\vartheta - \varphi)}\, d\vartheta \tag{8, 22}$$

*und die zu ihr konjugierte Potentialfunktion*

$$v(r e^{i\varphi}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(\vartheta) \frac{2r\sin(\vartheta - \varphi)}{1 + r^2 - 2r\cos(\vartheta - \varphi)}\, d\vartheta. \tag{8, 23}$$

*Gibt es dann für ein $\varphi = \psi$ eine reelle Konstante $A$ derart, daß das Integral*

$$\int_0^\pi \left| \frac{g(\psi + \vartheta) + g(\psi - \vartheta) - 2A}{\vartheta^2} \right| d\vartheta \tag{8, 24}$$

*konvergiert, so hat die Ableitung* $\frac{\partial v(re^{i\varphi})}{\partial \varphi}$ *an der Stelle* $\varphi = \psi$ *einen radialen Randwert. Ferner gilt für diesen Randwert*

$$(8,25)\quad h(\psi) = \lim_{r \uparrow 1} \left(\frac{\partial v(re^{i\varphi})}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\psi} = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} \frac{g(\psi+\vartheta)+g(\psi-\vartheta)-2A}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\,d\vartheta\,.^{59})$$

Vorbemerkungen. 1. Da wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$r\frac{\partial u(re^{i\varphi})}{\partial r} = \frac{\partial v(re^{i\varphi})}{\partial \varphi}$$

ist, liefert dieser Satz auch eine Bedingung für die Existenz von $\lim_{r \uparrow 1} \frac{\partial u(re^{i\psi})}{\partial r}$.

2. Ist $g(t)$ in $t = \psi$ stetig, so ist $A = g(\psi)$. Ist $g(t)$ zweimal stetig differenzierbar, so ist $\lim_{t \to 0} \frac{g(\psi+t)+g(\psi-t)-2g(\psi)}{t^2} = g''(\psi)$. Dies veranschaulicht die Bedeutung des Integranden in (8, 24) in diesem Zusammenhange.

3. Gibt es insbesondere für zwei Konstanten $A$ und $B$, so daß das Integral

$$\int_0^{\pm\pi} \left|\frac{g(\psi+t)-A-Bt}{t^2}\right| dt$$

konvergiert, so ist offenbar die Voraussetzung des Hilfssatzes 14 erfüllt und also der Hilfssatz anwendbar.

67. Beweis des Hilfssatzes 14. Man darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\psi = 0, A = 0$ annehmen. Denn sonst setze man $g^*(t) = g(\psi+t) - A$

---

[59]) Dieser Satz läßt sich dem folgenden Satz von Herrn A. Pleßner (Dissertation, Gießen 1923, S. 2) zur Seite stellen:

*Es sei* $g(t)$ *eine für alle reellen* $t$ *integrable, reelle und periodische Funktion mit der Periode* $2\pi$. *Ferner möge für ein* $t = \psi$ *der*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2}\int_0^t (g(\psi+t)+g(\psi-t)-2g(\psi))\,dt$$

*existieren. Man betrachte die Funktionen* (8, 22) *und* (8, 23). *Dann ist notwendig und hinreichend, damit die Funktion* $\frac{\partial}{\partial \varphi} v(re^{i\varphi})$ *an der Stelle* $\varphi = \psi$ *einen radialen Randwert besitzt, daß das Integral*

$$\int_0^{\pi} \frac{g(\psi+t)+g(\psi-t)-2g(\psi)}{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

*existiert. Ferner gilt für diesen Randwert die Relation* (8, 25).

und beachte, daß, wie wir sogleich zeigen werden, $(\Phi = \varphi - \psi)$

$$(8,26) \qquad v(re^{i\varphi}) = v(re^{i\psi}\cdot e^{i(\varphi-\psi)})$$

$$= v^*(re^{i\Phi}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^*(\vartheta)\frac{2r\sin(\vartheta-\Phi)\,d\vartheta}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\Phi)}$$

ist und betrachte $\frac{\partial}{\partial\Phi} v^*(re^{i\Phi})$ an der Stelle $\Phi = 0$. Die Richtigkeit von (8,26) ergibt sich so: Nach (8,23) ist

$$v(re^{i\varphi}) = v(re^{i\psi}e^{i(\varphi-\psi)}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(\vartheta)\frac{2r\sin(\vartheta-\psi-(\varphi-\psi))}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\psi-(\varphi-\psi))}\,d\vartheta$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\psi}^{\pi-\psi} g(\vartheta'+\psi')\frac{2r\sin(\vartheta'-(\varphi-\psi))}{1-r^2-2r\cos(\vartheta'-(\varphi-\psi))}\,d\vartheta'$$

und wegen der Periodizität des Integranden ist daher auch

$$(8,27) \qquad v(re^{i\varphi}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(\vartheta+\psi)\frac{2r\sin(\vartheta-(\varphi-\psi))}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-(\varphi-\psi))}\,d\vartheta.$$

Da nun ferner

$$(8,28) \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} A\frac{2r\sin(\vartheta-(\varphi-\psi))}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-(\varphi-\psi))}\,d\vartheta = 0$$

ist, so ergibt sich (8,26), indem man (8,28) zu (8,27) addiert.

Wir bilden nun

$$\frac{\partial v(re^{i\varphi})}{\partial\varphi} = -\frac{2r}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\vartheta)\frac{-(1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi))\cos(\vartheta-\varphi)+\sin(\vartheta-\varphi)2r\sin(\vartheta-\varphi)}{(1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi))^2}\,d\vartheta$$

$$= -\frac{2r}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(\vartheta)\frac{2r-(1+r^2)\cos(\vartheta-\varphi)}{(1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi))^2}\,d\vartheta,$$

und daher ist

$$\left(\frac{\partial v(re^{i\varphi})}{\partial\varphi}\right)_{\varphi=0} = \frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} g(\vartheta)\frac{(1-r)^2-(1+r^2)(1-\cos\vartheta)}{\left((1-r)^2+4r\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)^2}\,d\vartheta$$

$$= \frac{r}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\vartheta)\frac{(1-r)^2-2(1+r^2)\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{\left((1-r)^2+4r\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)^2}\,d\vartheta.$$

Da hier der Faktor von $g(\vartheta)$ im Integranden eine gerade Funktion von $\vartheta$ ist, so wird schließlich

$$(8,29)\quad \left(\frac{\partial v(re^{i\varphi})}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0} = \frac{r}{\pi}\int_0^{\pi}\{g(\vartheta)+g(-\vartheta)\}\frac{(1-r)^2-2(1+r^2)\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{\left((1-r)^2+4r\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)^2}\,d\vartheta.$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung am schnellsten nach dem Integralsatz von Lebesgue über Konvergenz von Integralfolgen, wenn man beachtet, daß 1. der Integrand in (8,29) für jedes von 0 verschiedene $\vartheta$ mit $r\uparrow 1$ gegen $-\frac{g(\vartheta)+g(-\vartheta)}{4\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$ konvergiert und daß 2. der Integrand für $\frac{1}{2}\leqq r<1$, $0<\vartheta\leqq\pi$

$$\leqq \frac{|g(\vartheta)+g(-\vartheta)|}{\vartheta^2}\left\{\frac{(1-r)^2\vartheta^2}{\left((1-r)^2+4r\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)^2}+\frac{4\sin^2\frac{\vartheta}{2}\vartheta^2}{\left((1-r)^2+4r\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)^2}\right\}$$

$$\leqq \frac{|g(\vartheta)+g(-\vartheta)|}{\vartheta^2}\left\{\frac{(1-r)^2\vartheta^2}{(1-r)^2\cdot 4\frac{1}{2}\sin^2\frac{\vartheta}{2}}+\frac{\vartheta^4}{\left(4\frac{1}{2}\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)^2}\right\}$$

$$\leqq \frac{|g(\vartheta)+g(-\vartheta)|}{\vartheta^2}\left\{\frac{\vartheta^2}{2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}+\frac{\vartheta^4}{4\sin^4\frac{\vartheta}{2}}\right\}$$

und das Integral $\int_0^{\pi}\frac{|g(\vartheta)+g(-\vartheta)|}{\vartheta^2}\,d\vartheta$ nach Voraussetzung existiert.

## § 9.

## Beweis des Hauptsatzes (Satz 7). Zusätze und Ergänzungen.

68. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit beim Beweise des Satzes 7 durchweg annehmen, daß $\tau=1$ (siehe Vorbemerkung 3), $w_1=0$ und die Innennormale von $C$ in $w_1$ in die Richtung der positiven reellen Achse gelegt ist, so daß insbesondere die Tangente mit der imaginären Achse zusammenfällt. Es ist dann $\xi(t)=x(t)$, $\eta(t)=|y(t)|$ (siehe Nr. 47).

Wir erbringen zuerst in den Nrn. 69 bis 82 den Beweis für den ersten Teil des Satzes, daß nämlich in $w_1$ eine konforme Ecke vorliegt. Hieraus folgt dann die Richtigkeit der zweiten auf die Existenz des $\lim_{w\to w_1}\frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{w-w_1}$ bezüglichen Behauptung leicht in Nr. 83 — im wesentlichen unter Zuhilfenahme des Hilfssatzes 14. Der Beweis des ersten Teiles läuft darauf hinaus, daß wir eine geeignete *innere* und *äußere Vergleichskurve* von $C$ im

Nullpunkt konstruieren und dann den Satz 4 des § 6 anwenden. Durch die Konstruktion der *inneren* Vergleichskurve, die wir in Nr. 69 bis 77 besprechen, beweisen wir die Beschränktheit des allseitig genommenen Differenzenquotienten $\frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{w-w_1}$ nach *unten*, durch die der *äußeren* Vergleichskurve (Nr. 78 bis 82) die nach *oben*.

69. I. Nachweis der Existenz der konformen Ecke. A. Konstruktion der inneren Vergleichskurve. Es sei $\bar{X}(t)$ irgendeine für $|t| \leqq \delta \leqq \frac{\pi}{8}$ definierte monotone Majorante von $x(t) = \xi(t)$ in der Umgebung des Nullpunktes mit konvergentem Integral $\int_0^{\omega} \frac{\bar{X}(t)}{t^2} dt$ (z. B. $\bar{X}(t) = \xi^*(t)$). Wir konstruieren dann zu $\bar{X}(t)$ nach dem Hilfssatz 12 eine Funktion $Q(t)$ (und $V(t)$) mit den dort angegebenen Eigenschaften 1 und 2. Wie in der Vorbemerkung 1 zu diesem Hilfssatz gesagt, setzen wir stets $|Q(t)| \leqq \frac{\pi}{8}$ voraus. Wir benutzen nun $Q(t)$ dazu, um eine im Einheitskreise $|\zeta| < 1$ reguläre Funktion $\Phi(\zeta)$ zu bilden, die eine geeignete „Halbumgebung" des Punktes $\zeta = 1$ ($|\zeta| \leqq 1$) auf das Innere einer geschlossenen Jordankurve $\mathfrak{C}$ abbildet. Diese Kurve $\mathfrak{C}$ wird gerade eine *innere Vergleichskurve* für $C$ in $w = 0$ sein. Und zwar gehen wir folgendermaßen vor: Wir wollen $\Phi(\zeta)$ so bestimmen, daß $\arg \Phi'(\zeta)$ in $|\zeta| \leqq 1$ stetig ist. Dann ist $\Phi(\zeta)$ schon bis auf drei reelle Konstanten eindeutig bestimmt, wenn die Randwerte von $\arg \Phi'(\zeta)$ als stetige Funktion von $\arg \zeta$ vorgegeben sind. Dabei wird $Q(t) + \pi = \arg \Phi'(\zeta)$ auf $|\zeta| = 1$ und $t = \arg \zeta$ sein.

70. Wir bilden mittels des Poissonschen Integrals die in $|\zeta| < 1$ reguläre und (wegen der Stetigkeit von $Q(t)$) in $|\zeta| \leqq 1$ stetige Potentialfunktion

$$(9,1) \qquad -Q_1(\varrho e^{i\vartheta}) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [Q(\sigma)+\pi] \frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2-2\varrho\cos(\vartheta-\sigma)} d\sigma .$$

Die zu $-Q_1(\varrho e^{i\vartheta})$ konjugierte Potentialfunktion $P_1(\varrho e^{i\vartheta})$ hat nach einem wichtigen Satze von Fatou[60]) wegen der gleichmäßigen Beschränktheit des

---

[60]) P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math. **30** (1905), p. 360. — Aus der Voraussetzung

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} |Q(t+\sigma)-Q(t-\sigma)| \operatorname{cotg}\frac{\sigma}{2} d\sigma \leqq k$$

folgert man leicht mittels der Fatouschen Umformungen, daß für $0 \leqq \varrho \leqq 1$ $|P_1(\varrho e^{i\vartheta})| \leqq k + |P_1(0)|$ ist.

Integrals

$$(9,2) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[Q(\vartheta+\sigma)-Q(\vartheta-\sigma)]\operatorname{cotg}\frac{\sigma}{2}\,d\sigma$$

durchweg für $-\pi \leqq \vartheta \leqq \pi$ gleichmäßig beschränkte Randwerte, die bis auf eine additive Konstante $(= P_1(0))$ durch $(9,2)$ gegeben sind. Diese Konstante soll so angenommen werden, daß $P_1(\varrho e^{i\vartheta}) \leqq \lg\frac{c_1}{2}$ ist, wo $c_1$ die kleinere der beim metrischen Parameter auftretenden Konstanten ist, also

$$(9,3) \qquad 0 < c_1 \leqq \left|\frac{r(t)}{t}\right|, \qquad -T \leqq t < T$$

ist.

Wir bilden nun die in $|\zeta| = |\varrho e^{i\vartheta}| < 1$ reguläre Funktion

$$\frac{1}{i}\lg\Phi'(\zeta) = +Q_1(\varrho e^{i\vartheta}) - i\,P_1(\varrho e^{i\vartheta})$$

$(-P_1$ ist zu $Q_1$ konjugiert). Dann hat

$$\lg\Phi'(\zeta) = P_1(\varrho e^{i\vartheta}) + i\,Q_1(\varrho e^{i\vartheta})$$

und mit $\lg\Phi'(\zeta)$ auch $\Phi'(\zeta)$ eine gleichmäßig beschränkte Randfunktion (für radiale Annäherung). Ferner gibt es eine Zahl $N > 0$, so daß

$$(9,4) \qquad 0 < N \leqq |\Phi'(\zeta)| = e^{P_1(\varrho e^{i\vartheta})} \leqq \frac{c_1}{2}$$

für alle $|\zeta| \leqq 1$ gilt. Wegen der Stetigkeit der Funktion $Q(t)$ in $t = 0$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\Delta_1(\varepsilon)$, so daß[61])

$$(9,5) \qquad |Q_1(\zeta) - Q_1(1)| \leqq \varepsilon \quad \text{für alle} \quad |\zeta - 1| \leqq \Delta_1(\varepsilon), \quad |\zeta| \leqq 1$$

gilt. Wegen

$$\frac{d\Phi}{d\vartheta} = \Phi'(\zeta)\frac{d\zeta}{d\vartheta} = \Phi'(\varrho e^{i\vartheta})\,i\,\varrho e^{i\vartheta}$$

$$= e^{P_1(\varrho e^{i\vartheta})}\,\varrho\,[i\cos(\vartheta + Q_1(\varrho e^{i\vartheta})) - \sin(\vartheta + Q_1(\varrho e^{i\vartheta}))]$$

wird

$$(9,6) \qquad \Phi(\varrho e^{i\vartheta}) - \Phi(\varrho)$$

$$= \int_0^{\vartheta} \varrho\, e^{P_1(\varrho e^{i\vartheta})}[-\sin(\vartheta + Q_1(\varrho e^{i\vartheta})) + i\cos(\vartheta + Q_1(\varrho e^{i\vartheta}))]\,d\vartheta.$$

---

[61]) Dies folgert man aus der Darstellung von $Q_1(\varrho e^{i\vartheta})$ durch das Poissonsche Integral $(9,1)$ unter Benutzung der Stetigkeit von $Q(t)$. Achtet man beim Beweise darauf, in welcher Weise $\Delta_1(\varepsilon)$ von den Eigenschaften von $Q(t)$ abhängt, so erhält man das folgende Resultat: *Ist für alle* $t$ $|Q(t)| \leqq M$ *und ist die „Stetigkeitsfunktion" von* $Q(t)$ *in* $t = 0$ $\delta_1(\omega)$, *d. h. ist*

$$|Q(t) - Q(0)| \leqq \omega \quad \text{für} \quad |t| \leqq \delta_1(\omega),$$

*so hängt die Funktion* $\Delta_1(\varepsilon)$ *nur noch von* $M$ *und der Funktion* $\delta_1(\omega)$ *ab,* $\Delta_1 = \Delta_1(\varepsilon; M; \delta_1(\omega))$. Vgl. H. A. Schwarz, Ges. Abhdl. II, S. 186. Vgl. ferner A. Ostrowski, Über das Poissonsche Integral und fast stetige Funktionen, Jahresber. d. Deutsch. Math.-V. XXXVI, (1927), S. 349–353, insbesondere S. 350 f.

In diesem Integral darf man $\varrho \uparrow 1$ gehen lassen[62]). Es konvergiert dann gegen

$$\int_0^{\vartheta} e^{P_1(e^{i\sigma})}\left[-\sin\left(\sigma + Q_1(e^{i\sigma})\right) + i\cos\left(\sigma + Q_1(e^{i\sigma})\right)\right] d\sigma .$$

Da (wegen (9, 4)) [63]) $\Phi(\zeta)$ stetige Randwerte besitzt, konvergiert die linke Seite von (9, 6) gegen $\Phi(e^{i\vartheta}) - \Phi(1)$. Normieren wir $\Phi(\zeta)$ so, daß $\Phi(1) = 0$ ist, so wird (wegen $Q_1(e^{i\sigma}) = \pi + Q(\sigma)$)

$$\begin{aligned}\Phi(e^{i\vartheta}) &= \int_0^{\vartheta} e^{P_1(e^{i\sigma})}\left[-\sin\left(\sigma + Q_1(e^{i\sigma})\right) + i\cos\left(\sigma + Q_1(e^{i\sigma})\right)\right] d\sigma \\ &= \int_0^{\vartheta} e^{P_1(e^{i\sigma})}\left[\sin\left(\sigma + Q(\sigma)\right) - i\cos\left(\sigma + Q(\sigma)\right)\right] d\sigma \\ &= X(\vartheta) + i\,Y(\vartheta) .\end{aligned}$$

$\Phi(\zeta)$ bildet die Peripherie des Einheitskreises auf eine stetige geschlossene Kurve $\Gamma$ ab. Ferner ist für alle $|\vartheta| \leqq \delta$ $X(\vartheta) \geqq 0$ und $Y(\vartheta) < 0$ für $\vartheta > 0$ und $> 0$ für $\vartheta < 0$ (wegen unserer Annahme $\delta \leqq \frac{\pi}{8}$, $|Q(t)| \leqq \frac{\pi}{8}$ für $|t| \leqq \delta$)[64]).

---

[62]) Nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue wegen der Beschränktheit des Integranden (siehe etwa L. Schlesinger und A. Pleßner, Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen, S. 105).

[63]) Denn aus ($\zeta_1 = \varrho_1 e^{i\vartheta}$, $\zeta_2 = \varrho_2 e^{i\vartheta}$, $\varrho_1 < 1$, $\varrho_2 < 1$)

$$\Phi(\varrho_1 e^{i\vartheta}) - \Phi(\varrho_2 e^{i\vartheta}) = e^{i\vartheta}\int_{\varrho_2}^{\varrho_1} \Phi'(\varrho e^{i\vartheta})\, d\varrho$$

folgt wegen $|\Phi'(\zeta)| \leqq \frac{c_1}{2}$

$$|\Phi(\varrho_1 e^{i\vartheta}) - \Phi(\varrho_2 e^{i\vartheta})| \leqq \frac{c_1}{2}\,|\varrho_1 - \varrho_2| .$$

Ist $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so ist für alle $\vartheta$ und $\varrho_1, \varrho_2$ mit $|\varrho_1 - \varrho_2| \leqq \frac{2\varepsilon}{c_1}$

$$|\Phi(\varrho_1 e^{i\vartheta}) - \Phi(\varrho_2 e^{i\vartheta})| \leqq \varepsilon .$$

Hieraus folgt (nach Cauchy-Bolzano) die gleichmäßige Konvergenz von $\Phi(\varrho e^{i\vartheta})$ mit $\varrho \uparrow 1$ gegen eine stetige Funktion $\Phi(e^{i\vartheta})$.

[64]) Für spätere Anwendung sei noch folgendes angemerkt: Es sei allgemein $\left|\int_0^a \frac{d\overline{X}(t)}{t}\right| \leqq \eta$ für $a \leqq \delta(\eta)$. Wir werden im folgenden gelegentlich $\delta(\eta)$ als „*Konvergenzfunktion*" des Integrals $\int_0^a \frac{d\overline{X}(t)}{t}$ bezeichnen. Es sei ferner $\delta$ irgendeine positive Zahl $< \frac{\pi}{8}$, die von mindestens einem der Werte von $\delta(\eta)$ übertroffen wird. Nun gelten für die zu $X(t)$ konstruierte Funktion $Q(t)$, die nach Voraussetzung

(Fortsetzung der Fußnote [64]) auf nächster Seite.)

71. Nun behaupten wir, *daß man einen so kleinen* $\zeta = 1$ *als Mittelpunkt enthaltenden Bogen* $\gamma_\zeta$ *von* $|\zeta| = 1$ *finden kann, daß das Bild* $\gamma_w$ *von* $\gamma_\zeta$ *vermöge* $w = \Phi(\zeta)$ *bis auf* $w = 0$ *ganz innerhalb von* $C$ *liegt.*

Den Beweis hierfür erbringen wir in den Nrn. 72 bis 74. Hier schicken wir zunächst die folgende Bemerkung über die Funktion

$$(9,7) \qquad Y(t) = -\int_0^t e^{P_1(e^{i\sigma})} \cos(\sigma + Q(\sigma))\, d\sigma$$

voraus, die wir bei diesem Beweise brauchen werden. Es ist wegen (9,4) und wegen $|\sigma + Q(\sigma)| \leqq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ für $|\sigma| \leqq \delta$

$$(9,8) \qquad |t| \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\, N \leqq |t|\, N \cos\tfrac{\pi}{4} \leqq |Y(t)| \leqq \tfrac{c_1}{2} |t|.$$

Ferner ist $Y(t)$ für $t \leqq \delta$ (stetig und eigentlich) monoton und daher für $|t| \leqq \delta$ eindeutig umkehrbar. Es sei $t = t(y)$ die (sicher für $|y| \leqq \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\delta N$) eindeutig definierte Umkehrfunktion von $Y(t)$. Dann kann man $X(t)$ als Funktion von $y$ darstellen: $x = X^*(y)$.

72. Es sei nun $r^*(\varepsilon)$ eine Richtungsfunktion der Kurve $C$ in $w = 0$, d. h. schließt man die Tangente in $w = 0$ zwischen zwei Geraden durch $w = 0$ ein, die mit dieser den Winkel $\varepsilon > 0$ $\left(\varepsilon < \frac{\pi}{2}\right)$ bilden, so liegen alle Punkte $P(t)$ von $C$ im Innern oder auf dem Rande des Kreises $K_{r^*}$ mit dem Radius $r^*(\varepsilon)$ um $w = 0$ zugleich auch im Innern der beiden von diesen Geraden gebildeten Scheitelwinkelräume der Öffnung $2\varepsilon$. Es sei $r_0 \leqq r^*\left(\frac{\pi}{4}\right)$, und es werde darüber hinaus $r_0 \leqq \frac{\delta N}{2}\sqrt{2}$ angenommen. Dann ist für alle Punkte $P(t)$ von $C$ innerhalb oder auf $K_{r_0}$ wegen $t_1 \leqq \frac{r(t)}{c_1}$ ((9,3)), $r(t) \leqq r_0 \leqq \frac{\delta N}{2}\sqrt{2}$, $\frac{N}{c_1} < 1$: $t \leqq \delta$. Ferner gilt für die Ordinaten $y(t)$ aller dieser Punkte $P(t)$ $(x(t) + i\,y(t))$:

$$(9,9) \qquad |y(t)| \geqq r(t) \cos\tfrac{\pi}{4} \geqq r(t)\, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}.$$

---

absolut durchweg $\leqq \frac{\pi}{8}$ ist (vgl. die Vorbemerkung 1 zum Hilfssatz 12), die in dem Zusatze des Hilfssatzes 12 ausgesprochenen Behauptungen. Hieraus folgt, daß *die in* (9,5) *angegebene Funktion* $\Delta_1(\varepsilon)$ (außer von $\varepsilon$) *nur von der Zahl* $\delta$ *und der Funktion* $\delta(\eta)$ *abhängt*, da ja nach dem in der Fußnote [61]) Gesagten $\Delta_1(\varepsilon)$, abgesehen von $\varepsilon$, nur noch von der oberen Schranke $M = \frac{\pi}{8}$ von $Q(t)$ und der „Stetigkeitsfunktion" $\delta_1 = \delta_1(\omega)$ von $Q(t)$ in $t = 0$ abhängt. Diese ist aber wiederum nur Funktion der Zahl $\delta$ und der Konvergenzfunktion $\delta(\eta)$ (Zusatz 1). Schließlich folgt aus dem Zusatz 4, daß *die Konstante* $N$ *in* (9,4) *nur Funktion von* $\delta, \delta(\eta)$ *und natürlich der Konstanten* $c_1$ *in* (9,3) *ist.*

73. Wir zeigen nun: *Es gibt ein* $R \leqq r_0$, *so daß für alle Punkte* $P(t)$ *von* $C$ *im Innern oder auf dem Rande des Kreises* $K_R$ *um* $w = 0$ *mit dem Radius* $R$

$$|x(t)| < X^*(y(t)), \quad t \neq 0, \tag{9,10}$$

*gilt, d. h. jeder innerhalb oder auf* $K_R$ *liegende Punkt* $P(t)$ *von* $C$ *liegt in dem folgenden Sinne „links" vom Kurvenbogen* $\beta$ *auf* $\Gamma$: $x = X^*(y)$, $|y| \leqq \frac{\delta N}{2}\sqrt{2}$. *Legt man durch den Punkt* $P(t)$ $(x(t) + i\,y(t))$, $P(t) \neq 0$, *die Parallele zur* $x$*-Achse im Abstande* $y = y(t)$, *so ist die Abszisse des — einzigen — Schnittpunktes* $Q$ *von* $\beta$ *mit dieser Geraden (absolut) größer als die von* $P(t)$. (Man beachte, daß wegen $y(t) \leqq R \leqq r_0 \leqq \frac{\delta N}{2}\sqrt{2}$ $X^*(y(t))$ sicher für alle diese $y(t)$ definiert ist.)

Zum Beweise von (9,10) bemerken wir zunächst, daß für $0 < |t| \leqq \delta$

$$\frac{x(t)}{X(t)} = \frac{x(t)'}{\int_0^t e^{P_1(e^{i\sigma})} \sin(\sigma + Q(\sigma))\, d\sigma}$$

ist, und dies ist wegen $|x(t)| \leqq \overline{X}(t)$ und $|e^{P_1(e^{it})}| = |\Phi'(e^{it})| \geqq N$ sowie wegen $|t + Q(t)| \leqq \frac{\pi}{4}$ für $|t| \leqq \delta$

$$\leqq \frac{\overline{X}(t)}{N\int_0^t \sin(\sigma + Q(\sigma))\, d\sigma} \leqq \frac{\overline{X}(t)}{N\frac{2}{\pi}\int_0^t Q(\sigma)\, d\sigma}. \tag{9,11}$$

Nach der im Hilfssatz 12 ausgesprochenen Eigenschaft 1 der Funktion $Q(t)$ gibt es nun ein $\Delta_2 > 0$, so daß dieser letzte Quotient und daher

$$\frac{|x(t)|}{X(t)} \leqq \frac{1}{8N} < 1 \quad \text{für} \quad 0 < |t| \leqq \Delta_2 \tag{9,12}$$

ist. Wählen wir daher $R = \operatorname{Min}(c_1 \Delta_2, r_0)$, so ist für alle $P(t)$ innerhalb oder auf $K_R$ $|t| \leqq \frac{R}{c_1} \leqq \Delta_2$ und somit (9,12) erfüllt.

Nun ist aber offenbar $X(t)$ im allgemeinen noch *nicht* die Abszisse $X^*(y(t))$ des Punktes $Q$, in dem die Gerade $y = y(t)$ den Kurvenbogen $\beta$ trifft. Es sei nun $\tau$ der diesem (einzigen) Schnittpunkt zugeordnete Parameterwert in der Parameterdarstellung $(X(t), Y(t))$ von $\beta$, so daß also $y(t) = Y(\tau)$, $X^*(y(t)) = X(\tau)$ ist. Wegen (9,7) ist

$$|y(t)| = |Y(\tau)| \leqq \frac{c_1}{2}|\tau|.$$

Da ferner wegen (9,9) und (9,3) $|y(t)| \geqq r(t)\frac{\sqrt{2}}{2} \geqq |t| \cdot \frac{c_1}{\sqrt{2}}$ ist, wird

$$\frac{c_1}{\sqrt{2}}|t| \leqq \frac{c_1}{2}|\tau|,$$

$$\sqrt{2}\,|t| \leqq |\tau|, \quad \text{d. h.} \quad |t| < |\tau|.$$

Da wegen $|Y(\tau)| \leqq R \leqq r_0 \leqq \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\delta N < Y(\delta)$ — wegen der Monotonie von $Y(t)$ — auch $|\tau| = |t(Y(\tau))| < \delta$ ist, ist $X(t)$ für $|t| \leqq |\tau|$ sicher monoton und daher ist

$$X^*(y(t)) = X(\tau) > X(t)$$

und also wegen

$$X^*(y(t)) > X(t) > |x(t)| \quad \text{für} \quad 0 < x(t)^2 + y(t)^2 < R^2,$$

womit (9, 10) bewiesen ist.

74. Hieraus ergibt sich nunmehr leicht, daß man für den gesuchten Bogen $\gamma_\zeta$ z. B. den Bogen

$$|\zeta - 1| \leqq \frac{R}{c_1}, \quad |\zeta| = 1 \tag{9,13}$$

wählen kann[65]). Denn da wegen der aus (9, 4) und wegen $\Phi(1) = 0$ folgenden Relation

$$|\Phi(\zeta)| \leqq \frac{c_1}{2}|\zeta - 1| \quad \text{für} \quad |\zeta| \leqq 1 \qquad (\zeta \neq 1) \tag{9,14}$$

das Bild $\gamma_w$ von $\gamma_\zeta$ vermittels $w = \Phi(\zeta)$ sicher im Innern von $K_R$ verläuft, kann $\gamma_w$ $C$ nur in Punkten $P(t)$ treffen, die innerhalb $K_R$ liegen. Nun ist aber $\left(\text{wegen } R \leqq \frac{\delta N}{2}\sqrt{2}\right)$ $\gamma_w$ sicher ein Teilbogen des Kurvenbogens $\beta$,

---

[65]) *Auch die oben im Text für $\gamma_\zeta$ angegebene obere Schranke hängt nur von den Zahlen $\delta$ und $c_1$ sowie von der Funktion $\delta(\eta)$ ab.* Denn man hat offenbar nur zu zeigen, daß der oben angegebene Radius $R$ des Kreises $K_R$ nur von den genannten Größen abhängt. Um dies einzusehen, beachte man: 1. Man kann in $w = 0$ eine Richtungsfunktion $r^*(\varepsilon)$ angeben, die außer von $\varepsilon$ nur noch Funktion von diesen Größen ist. Denn aus $\left|\int_0^t \frac{d\overline{X}}{t}\right| \leqq \eta$ für $|t| \leqq \delta(\eta)$ folgt $\left|\frac{1}{t}\int_0^t d\overline{X}(t)\right| \leqq \eta$, $\left|\frac{1}{t}\overline{X}(t)\right| \leqq \eta$ und wegen $|x(t)| \leqq X(t)$ und $\left|\frac{r(t)}{t}\right| \geqq c_1$

$$\left|\frac{x(t)}{r(t)}\right| \leqq \frac{\eta}{c_1}.$$

Ist $\alpha(t)$ der (nicht größere) Winkel zwischen der Tangente in $w = 0$ und dem von 0 nach $P(t)$ gezogenen Radiusvektor $r(t)$, so ist $\frac{x(t)}{r(t)} = \sin\alpha(t)$. Ist $\varepsilon > 0$, so ist demnach

$$\alpha(t) \leqq 2\sin\alpha(t) = 2\left|\frac{x(t)}{r(t)}\right| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad r(t) \leqq r^*(\varepsilon) = \text{Min}\,(\delta c_1, c_1\,\delta(\varepsilon c_1)).$$

2. Nach dem Zusatz 3 zum Hilfssatz 12 sowie nach dem in der Fußnote [64]) über die Zahl $N$ Gesagten, folgt, wie aus der Abschätzung (9, 11), (9, 12) hervorgeht, daß die Zahl $\Delta_2$ nur noch von $\delta$, $c_1$ und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängt.

Da nun

$$R = \text{Min}\,(c_1\,\Delta_2, r_0), \quad r_0 = \text{Min}\left(\delta N\frac{1}{2}\sqrt{2},\ r^*\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

ist, so ist hiermit die obige Behauptung über $R$ bewiesen.

so daß (da nach dem oben Gesagten jeder von 0 verschiedene Punkt von $C$ in oder auf $K_R$ ganz links von $\beta$ liegen muß) $C$ $\gamma_w$ nur in $w=0$ treffen kann. Da im übrigen der Bogen $\gamma_w$ in der Umgebung von $w=0$ auf derselben Seite von $C$ wie die Innennormale im Nullpunkte verläuft, muß er (bis auf $w=0$) im Innern von $C$ liegen, womit die am Anfang der Nr. 71 aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

75. Es sei hieran noch die folgende Bemerkung geknüpft: Der Bogen $\beta$ $\left(x=X^*(y),\ |y|\leqq \frac{\delta N}{2}\sqrt{2}\right)$ werde vom Nullpunkt aus nach beiden Seiten durchlaufen, und es seien $A$ resp. $B$ die zuerst dabei angetroffenen — wegen $R\leqq\frac{1}{2}\delta N\sqrt{2}$ sicher existierenden — Schnittpunkte von $\beta$ mit $K_R$. $A$ und $B$ liegen auf verschiedenen Seiten der reellen Achse, wie aus der Darstellung von $\beta$ durch die (monotone) Funktion $x=X^*(y)$, $-\frac{\delta N}{2}\sqrt{2}\leqq y\leqq+\frac{\delta N}{2}\sqrt{2}$ folgt. Ferner liegt der Kreisbogen $\widehat{AB}=\alpha$, der die positive reelle Achse trifft, ganz im Innern von $C$. Denn jeder Punkt $P(t)$ von $C$ auf $\alpha$ würde ja entgegen dem in Nr. 73 Bewiesenen (in dem oben gebrauchten Sinne) rechts von $\beta$ liegen. *Daher liegt das Kurvenbogenzweieck $AOB$, dessen eine Seite der Bogen $\alpha$ ist, bis auf $w=0$ ganz innerhalb von $C$.*

76. Wir wollen nun $\gamma_\zeta$ einer weiteren Einschränkung unterwerfen: Es soll für $\gamma_\zeta$ der Bogen

$$(9,15)\qquad |\zeta-1|\leqq\varrho=\operatorname{Min}\left(\frac{R}{c_1},\ \Delta_1\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{66}),\qquad |\zeta|=1,$$

gewählt werden, wo $\Delta_1(\varepsilon)$ die in (9,5) definierte „Stetigkeitsfunktion“ von $Q_1(\zeta)$ in $\zeta=1$ ist. Dann ergibt sich aus der eben gemachten Bemerkung unter Zuhilfenahme des Hilfssatzes 13 das folgende Resultat: *Beschreibt man durch die Endpunkte dieses Bogens $\gamma_\zeta$ um $\zeta=1$ den Kreis $k$ mit dem Radius $\varrho$, so wird das Innere des von $\gamma_\zeta$ und dem in $|\zeta|\leqq 1$ liegenden Kreisbogen $\mathfrak{K}$ von $k$ gebildeten Kreisbogenzweiecks $Z$ durch $w=\Phi(\zeta)$ in das Innere einer geschlossenen Jordankurve $\mathfrak{C}$ übergeführt, die selber bis auf $w=0$ ganz im Innern von $C$ liegt.* Daß nämlich das Bild des Kreisbogenzweiecks $Z$ eine geschlossene Jordankurve ist, folgt wegen (9,15) aus dem Hilfssatz 13. Nun besteht aber $\mathfrak{C}$ aus einem Teilbogen des Kurvenbogens $AOB$ von $\Gamma$ und einem weiteren Bogen, der einen Punkt von $OA$ mit einem Punkt von $OB$ verbindet. Da wegen (9,15) und (9,4) $\mathfrak{C}$ ganz im Innern von $K_R$ liegt und ferner der Umlaufssinn von $\mathfrak{C}$ derselbe ist wie von $Z$, so liegt $\mathfrak{C}$ nicht außerhalb des Kurvenbogenzweiecks $AOB$, und also auch ganz in $C$.

---

66) Offenbar hängt $\varrho$ nach dem in der Fußnote 65) über $R$ und dem in der Fußnote 64) über $\Delta_1(\varepsilon)$ Gesagten nur von $c_1$, $\delta$ und der Funktion $\delta(\eta)$ ab.

77. $\mathfrak{C}$ ist also eine innere Vergleichskurve von $C$ in $w=0$. *Wir zeigen, daß jede Funktion $F(z)$ mit $F(1)=0$, die $|z|<1$ auf das Innere $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{C}$ abbildet, in $z=1$ eine im Winkelraum gebildete von 0 und $\infty$ verschiedene Ableitung besitzt.* Man kann eine solche Funktion herstellen, indem man $|z|<1$ auf das Innere von $Z$ vermittels $\zeta=g(z)$ so abbildet, daß $g(1)=1$ ist und dann die Funktion $w=\Phi(g(z))$ bildet. $g(z)$ ist in einer Umgebung von $z=1$ noch analytisch und $|g'(1)|=\alpha_1$ ist dort positiv. Nun existiert, wie oben gesagt, $\lim\limits_{\zeta\uparrow 1}\Phi'(\zeta)=\alpha_2$, und es ist nach (9, 4) $N\leqq|\alpha_2|\leqq\frac{c_1}{2}$. Daher existiert auch wegen der Beschränktheit von $|\Phi'(\zeta)|$ nach einem schon oben zitierten Satze von Lindelöf der $\lim\limits_{\zeta\to 1}\Phi'(\zeta)$, wenn $\zeta$ „im Winkelraum“ gegen 1 konvergiert, und ist gleich $\alpha_2$. Somit ist auch

$$\lim_{z\uparrow 1}\frac{d\Phi(g(z))}{dz}=\lim_{z\uparrow 1}\Phi'_\zeta(\zeta)\,g'(z)$$

vorhanden und absolut gleich $|\alpha_1\alpha_2|$ und somit also von 0 und $\infty$ verschieden. Aus der Integraldarstellung

$$\Phi(g(z))-\Phi(g(1))=\int_1^z\frac{d}{dz}\Phi(g(z))\,dz$$

ergibt sich dann leicht, daß $\lim\limits_{z\to 1}\left|\frac{\Phi(g(z))-\Phi(g(1))}{z-1}\right|=|\alpha_1\alpha_2|$ ist, wenn $z\to 1$ „im Winkelraum“ konvergiert, d. h. die obige Behauptung. Nach dem Satze 4a des § 6 folgt unter Berücksichtigung der im Zusatz zu diesem Satze gegebene Formulierung — angewandt auf die Kurven $C$ und $\mathfrak{C}$ resp. die Funktionen $z=\varphi(w)$ und die zu $\Phi(g(z))$ inverse Funktion $z=\psi(w)$ — die Beschränktheit des Differenzenquotienten $\left|\frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{w-w_1}\right|$ bei allseitiger Annäherung nach unten[67]).

---

[67]) Normiert man die im Text genannte Funktion $\zeta=g(z)$ so, daß $z=0$ in den Mittelpunkt $\mu$ der Verbindungsstrecke der beiden Ecken des Kreisbogenzweiecks $Z$ und $z=1$ in $w=0$ übergeht, so bildet $w=\Phi(g(z))$ den Punkt $z=0$ auf einen im Innern von $\mathfrak{C}$ liegenden Punkt $w=a$ ab, dessen Minimalabstand vom Rande von $\mathfrak{C}$ und somit vom Rande von $C$ > als eine nur von $\delta$, $c_1$ und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängige positive Zahl $d$ ist. Da nämlich $Z$ in der $\Delta_1(\frac{1}{2})$-Umgebung von $\zeta=1$ gewählt ist, gilt nach dem Hilfssatz 13 für alle $\zeta$, $\zeta'$ in $Z$

$$|\Phi(\zeta)-\Phi(\zeta')|\geqq N_1\,|\zeta-\zeta'|,\qquad N_1=\left(1-\frac{1}{2}\right)N=\frac{N}{2}.$$

Nehmen wir $\Delta_1(\frac{1}{2})<1$ an — was natürlich erlaubt ist —, so ist der Minimalabstand von $\mu$ vom Rande von $Z$ gleich $1-\mu$ und daher $d\geqq(1-\mu)\frac{N}{2}$.

*Bildet nun $\varphi(w)$ insbesondere das Innere der Kurve $C$ so auf das Innere des Einheitskreises ab, daß $w=a$ in $z=0$, $w=0$ in $z=1$ übergeht, und gilt für die Unbewallt-*

(Fortsetzung der Fußnote [67]) auf nächster Seite.)

78. B. Konstruktion der äußeren Vergleichskurve. Wir gehen ähnlich wie oben vor:

Wir bilden nach Hilfssatz 12 zu $\bar{X}(t)$ (siehe Nr. 69) für $|t| \leqq \delta < \frac{\pi}{8}$ die Funktionen $Q(t)$ und $V(t)$ mit den dort angegebenen Eigenschaften. Nach der an diesen Hilfssatz angeschlossenen Bemerkung kann $Q(t)$ als eine *ungerade* Funktion angenommen werden. Dies wollen wir tun[68]). Dann setzen wir

$$Q^*(t) = -Q(t) - 2t \qquad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq \delta,$$
$$Q^*(t) = -Q(t) - 2\frac{\delta}{\pi - \delta}(\pi - t) \qquad „ \quad \delta \leqq t \leqq \pi,$$

und

$$Q^*(t) = -Q(t) - 2t \qquad \text{für} \quad 0 \geqq t \geqq -\delta,$$
$$Q^*(t) = -Q(t) + 2\frac{\delta}{\pi - \delta}(\pi + t) \qquad „ \quad -\delta \geqq t \geqq -\pi.$$

Dann ist $Q^*(t)$ für alle $t$ stetig, verschwindet für $t = 0$ und $t = \pm\pi$ und bleibt stetig für alle reellen $t$, wenn $Q^*(t + 2\pi) = Q^*(t)$ gesetzt wird. Ferner ist in $(-\pi, +\pi)$ $Q^*(t) > 0$ für $t < 0$, $Q^*(t) < 0$ für $t > 0$ und für $|t| \leqq \delta$ ist $|Q^*(t)| \geqq 2|t|$. Weiter gilt offenbar für $Q^*(t)$

$$(9,16) \qquad \frac{\bar{X}(t)}{\int_0^t \sin(Q^*(\sigma) + \sigma)\, d\sigma} \leqq \frac{\bar{X}(t)}{\frac{2}{\pi}\int_0^t Q(\sigma)\, d\sigma} \to 0 \quad \text{für} \quad t \to 0,$$

und $-Q^*(t)$ hat ebenso wie $Q(t)$ die Eigenschaften 2 des Hilfssatzes[69]). Schließlich bemerken wir noch, daß auch $Q^*(t)$ eine *ungerade* Funktion ist, es gilt also $Q^*(t) = -Q^*(-t)$.

Wir nehmen wie bisher an, daß für $|t| \leqq \delta$ $|Q(t)| \leqq \frac{\pi}{8}$ und somit

$$|Q^*(t) + t| \leqq \frac{\pi}{4}$$

ist. Ferner ist für $|t| \leqq \delta$ und daher durchweg $|Q^*(t)| \leqq \frac{3}{8}\pi$.

*heitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ von $C$ im Punkte $w = 0$ $\overline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = \varkappa$, so gilt nach dem Satze 4*

$$\lim_{w \to 0} \left| \frac{\varphi(w) - \varphi(0)}{w} \right| \geqq \frac{2}{\varkappa c_1 \alpha_1}$$

*für beliebige $w$ aus dem Innern und auf dem Rande von $C$. Dabei ist $\alpha_1 = |g'(1)$ eine nur von dem Kreisbogenzweieck $Z$, also nur von den Größen $\delta$, $c_1$ und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängige Zahl.*

[68]) Dies wird zur Folge haben, daß die der obengenannten Funktion $\Phi(\zeta)$ hier entsprechende weiter unten zu definierende Funktion $\Phi_1(\zeta)$ für $-1 \leqq \zeta \leqq 1$ reell ist. Von dieser Tatsache werden wir im Text *keinen* Gebrauch machen. Sie wird nur in Fußnote [74]) benutzt werden und uns dort einige Abkürzungen zum Beweise gestatten.

[69]) Man beachte noch, daß die Zusätze 1 bis 4 zum Hilfssatz 12 wörtlich richtig bleiben, wenn man die Funktion $Q(t)$ durch $Q^*(t)$ ersetzt.

79. Nunmehr verfahren wir analog wie in Nr. 70, um eine geeignete äußere Vergleichskurve an $C$ in $w = 0$ zu konstruieren. Wir bilden die in $|\zeta| = |\varrho e^{i\vartheta}| < 1$ reguläre, in $|\zeta| \leqq 1$ stetige Potentialfunktion

$$-Q_1^*(\varrho e^{i\vartheta}) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Q^*(\sigma)+\pi)\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2-2\varrho\cos(\sigma-\vartheta)}\,d\sigma$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(Q^*(\sigma)+\pi)\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2-2\varrho\cos(\sigma-\vartheta)}\,d\sigma;$$

wegen $Q^*(t) = -Q^*(-t)$ ist für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$

$$\int_{-\pi}^{\pi} Q^*(\sigma)\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2-2\varrho\cos(\sigma-\vartheta)}\,d\sigma = 0,$$

so daß $Q_1^*(\zeta)$ für $-1 \leqq \zeta \leqq 1$ konstant gleich $+\pi$ ist. Die zu $-Q_1^*(\zeta)$ konjugierte Potentialfunktion $P_1^*(\zeta)$ ist in $|\zeta| < 1$ regulär und wegen der Beschränktheit des Integrals

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{Q^*(t+\sigma)-Q^*(t-\sigma)}{\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}}\right|d\sigma$$

(vgl. [60])) gleichmäßig beschränkt. Daher ist auch

$$\Phi_1'(\zeta) = e^{P_1^*(\zeta)+iQ_1^*(\zeta)}$$

in $|\zeta| < 1$ regulär und beschränkt. Da $Q_1^*(\zeta)$ in $-1 \leqq \zeta \leqq 1$ konstant gleich $+\pi$ ist, so ist $\Phi_1'(\zeta)$ für diese $\zeta$ (negativ) reell. Wir normieren $P_1^*(\varrho e^{i\vartheta})$ so, daß $P_1^*(\varrho e^{i\vartheta}) \leqq \lg\frac{c_1}{2}$ ist; dann gibt es ein $N > 0$, so daß

$$0 < N \leqq |\Phi_1'(\zeta)| \leqq \frac{c_1}{2} \tag{9,17}$$

ist. Ferner hat $\Phi_1'(\zeta)$ in jedem Punkte von $|\zeta| = 1$ einen radialen Randwert.

Wegen der Stetigkeit von $Q_1^*(\zeta)$ in $\zeta = 1$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\Delta_1(\varepsilon)$, so daß

$$|Q_1^*(\zeta) - Q_1^*(1)| \leqq \varepsilon \quad \text{für alle} \quad |\zeta - 1| \leqq \Delta_1(\varepsilon), \quad |\zeta| \leqq 1$$

gilt. Die Funktion

$$\Phi_1(\zeta) - \Phi_1(\varrho) = \int_{\varrho}^{\zeta}\Phi_1'(\zeta)\,d\zeta$$

ist in $|\zeta| < 1$ regulär und in $|\zeta| \leqq 1$ stetig [70]). $\Phi_1(\zeta)$ bildet daher $|\zeta| < 1$ auf ein (eventuell mehrfach überdecktes) von einer stetigen Kurve begrenztes Gebiet ab. Normieren wir die additive Konstante in $\Phi_1(\zeta)$ durch $\Phi_1(1) = 0$, so wird [71])

[70]) Vgl. Fußnote [63]).

[71]) Vgl. Fußnote [62]).

$$\Phi_1(e^{i\vartheta}) = \int_0^{\vartheta} e^{P_1^*(e^{i\sigma})}\left[-\sin\left(\sigma + Q_1^*(e^{i\sigma})\right) + i\cos\left(\sigma + Q_1^*(e^{i\sigma})\right)\right] d\sigma$$

$$= \int_0^{\vartheta} e^{P_1^*(e^{i\sigma})}\left[\sin\left(\sigma + Q^*(\sigma)\right) - i\cos\left(\sigma + Q^*(\sigma)\right)\right] d\sigma$$

$$= X_1(\vartheta) + i\,Y_1(\vartheta).$$

Es ist hier für $|\vartheta| \leqq \delta$: $X_1(\vartheta) \leqq 0$, während $Y_1(\vartheta) < 0$ für $\vartheta > 0$ und $> 0$ für $\vartheta < 0$ ist. (Man beachte, daß $2|t| \leqq |Q^*(t)| \leqq \frac{3}{8}\pi$ für $|t| < \delta$ ist.) Ferner ist, da, wie oben gesagt, $\Phi_1'(\zeta)$ für $-1 \leqq \zeta \leqq 1$ reell ist, wegen $\Phi_1(1) = 0$ auch $\Phi_1(\zeta)$ auf diesem Intervall reell.

80. Analog wie in den Nrn. 71 bis 74 zeigt man auch hier, daß es einen $\zeta = 1$ als Mittelpunkt enthaltenden Bogen $\gamma_\zeta$ von $|\zeta| = 1$ gibt, so daß sein Bild $\gamma_w$ vermittels $w = \Phi_1(\zeta)$ in der $w$-Ebene (bis auf $w = 0$) ganz außerhalb von $C$ verläuft: Man zeigt unter Benutzung der Ungleichung (9, 17) wie in Nr. 71, daß für hinreichend kleine $|y|$ $\left(\text{z. B. } |y| \leqq \frac{\delta N}{2}\sqrt{2}\right)$ $X_1(t)$ als Funktion von $y$ darstellbar ist ($x = X_1^*(y)$), und beweist sodann — vgl. Nr. 72, 73 — unter Benutzung der Relationen (9, 16), (9, 17), daß es ein $R > 0$ gibt, so daß für alle Punkte $P(t)$ $(x(t) + i\,y(t))$ von $C$ im Innern oder auf dem Rande des Kreises $K_R$ mit dem Radius $R$ um $w = 0$

$$|x(t)| < -X_1^*(y(t)) \qquad (t \neq 0)$$

gilt. Dies besagt, daß alle in $K_R$ liegenden Punkte $P(t)$ von $C$ (wegen $X_1^*(y) \leqq 0$) *rechts* vom Kurvenbogen $x = X^*(y)$ liegen. (Die Zahl $R$ soll dabei — ähnlich wie in Nr. 72 — $< r^*\left(\frac{\pi}{4}\right)$ gewählt werden, wo $r^*(\varepsilon)$ eine Richtungsfunktion von $C$ in $w = 0$ ist.) Hieraus findet man dann wie in Nr. 74 unter Benutzung der Relation (9, 17) eine positive Schranke für die Länge des Bogens $\gamma_\zeta$.[72])

---

[72]) Auch hierbei sei bemerkt, daß die Länge des Bogens $\gamma_\zeta$ als nur von den Konstanten $\delta$, $c_1$ und von der in der Fußnote [64]) genannten „Konvergenzfunktion" $\delta(\eta)$ des Integrals $\int_0^a \frac{d\,\bar{X}(t)}{t}$ abhängig gewählt werden kann. Dies folgt ganz ähnlich wie die entsprechende Behauptung im Teil A unseres Beweises, indem man beachtet, daß die dem Zusatz zum Hilfssatz 12 entsprechenden Behauptungen für $Q(t)$ auch für $Q^*(t)$ wörtlich zutreffen: Man zeigt zuerst (Benutzung der Behauptung 1 dieses Zusatzes), daß die Funktion $\Delta_1(\varepsilon)$, abgesehen von $\varepsilon$, nur noch von diesen Größen abhängt (vgl. Fußnote [61])). Wie in Fußnote [64]) zeigt man ferner, daß das gleiche für $N$ gilt. Indem man noch schließlich die in Fußnote [65]) unter 1. bewiesene Tatsache benutzt, daß man für $C$ in $w = 0$ eine (abgesehen von ihrem Argument $\varepsilon$) nur von diesen Größen abhängige Richtungsfunktion $r^*(\varepsilon)$ angeben kann, und im übrigen ganz ähnlich wie dort schließt, erkennt man die Richtigkeit unserer Behauptung.

81. Beschreibt man nun um $\zeta = 1$ den Kreis $k$ durch die Endpunkte von $\gamma_\zeta$ mit dem Radius $\varrho$, so braucht das Bild der Begrenzung des Kreisbogenzweiecks $Z$

$$|\zeta - 1| \leqq \varrho, \qquad |\zeta| \leqq 1$$

vermittels $w = \Phi_1(\zeta)$ noch keine doppelpunktfreie Kurve zu sein. Die Anwendung des Hilfssatzes 13 jedoch lehrt, daß dies der Fall ist, wenn $\varrho$ weiter hinreichend klein angenommen wird. Wir denken uns nun $\gamma_\zeta$ und damit $\varrho$ [73]) so klein gewählt; die geschlossene Jordankurve $\mathfrak{C}_1$ sei dann das Bild des Randes von $Z$.

82. Liegt nun $C$ innerhalb von $\mathfrak{C}_1$, so ist $\mathfrak{C}_1$ eine äußere Vergleichskurve von $C$ in $w = 0$. Wir bilden dann den Einheitskreis $|z| < 1$ vermittels $\zeta = g(z)$ auf das Innere von $Z$ so ab, daß $g(1) = 1$ ist. Dann ist $g(z)$ in $z = 1$ noch analytisch, und ferner ist $|g'(1)| = \alpha > 0$.[74]) Weiter

[73]) Wir wählen $\varrho = \mathrm{Min}\left(\frac{R}{c_1}, \Delta_1\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, wo $R$ der im Texte genannte Radius von $K_R$ ist und $\Delta_1(\frac{1}{2}) < 1$ angenommen werde, so daß insbesondere wegen (9, 17) $\mathfrak{C}_1$ innerhalb $K_R$ liegt. $\varrho$ hängt dann nach dem in Fußnote [72]) Gesagten nur von $\delta, c_1$ und der Funktion $\delta(\eta)$ ab.

[74]) Für spätere Anwendung sei noch hervorgehoben: Normiert man die Funktion $\zeta = g(z)$ so, daß $z = 0$ in den Mittelpunkt $\zeta = \mu$ der Verbindungsstrecke der beiden Eckpunkte von $Z$ übergeht, so führt $w = \Phi_1(g(z))$ $z = 0$ in einen (reellen) Punkt $w = a'$ im Innern von $\mathfrak{C}_1$ und $C$ über, dessen Abstand vom Rande dieser beiden Kurven oberhalb einer nur von $\delta, c_1$ und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängigen positiven Konstanten $d'$ bleibt.

Da nämlich $Z$ in der $\Delta_1(\frac{1}{2})$-Umgebung von $\zeta = 1$ liegt und $\Delta_1(\frac{1}{2}) < 1$ angenommen worden ist, ist der Minimalabstand von $\mu$ vom Rande von $Z$ gleich $1 - \mu$, und es ist daher wegen der nach dem Hilfssatz 13 für alle $\zeta, \zeta'$ in $Z$ geltenden Relation

$$|\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta')| \geqq |\zeta - \zeta'| \frac{N}{2}$$

der Minimalabstand von $a'$ von $\mathfrak{C}_1$ $\geqq (1 - \mu)\frac{1}{2}N$. $N$ hängt nach Fußnote [72]) nur von den genannten Größen ab. Da hier nun aber $\mathfrak{C}_1$ *nicht* im Innern von $C$ liegt, müssen wir die Behauptung über den Minimalabstand von $a'$ von $C$ noch besonders beweisen: Wie oben bemerkt (s. Fußnote [73])), war $\varrho$ so gewählt, daß das Bild $\mathfrak{C}_1$ von $Z$ vermittels $w = \Phi_1(\zeta)$ ganz im Kreise $K_R$ mit dem Radius $R < r^*\left(\frac{\pi}{4}\right)$ um $w = 0$ liegt, wobei $r^*(\varepsilon)$ eine Richtungsfunktion von $C$ in $w = 0$ ist. Schließt man daher die Tangente an $C$ in $w = 0$ zwischen zwei Graden $g_1$ und $g_2$ durch $w = 0$ ein, die mit dieser den Winkel $\frac{\pi}{4}$ bilden, so liegen alle Punkte von $C$ in oder auf $K_R$ im Innern der von diesen Geraden gebildeten Winkelräume der Öffnung $\frac{\pi}{4}$. Da auch $\mathfrak{C}_1$ innerhalb $K_R$ liegt, genügt es zu zeigen, daß der Abstand von $a'$ von den Geraden $g_1$ und $g_2$ oberhalb einer nur von $\delta, c_1, \delta(\eta)$ abhängigen positiven Schranke bleibt. Dies folgt nun aber so: Da, wie oben hervorgehoben (Nr. 79, s. auch Fußnote [68])), $\Phi_1(\zeta)$ für $-1 \leqq \zeta \leqq 1$ und daher $\Phi_1(g(z))$ für $-1 \leqq z \leqq 1$ reell ist, ist $a' = \Phi_1(\mu)$ reell. Daher beträgt sein Abstand von $g_1$ und $g_2$ nach dem oben Gesagten mindestens $(1 - \mu)\frac{N}{2}\sin\frac{\pi}{4} = (1 - \mu)\frac{N}{4}\sqrt{2}$.

gilt, wie aus der Ungleichung (8, 21) des Hilfssatzes 13 leicht folgt,

$$(9,18)\quad \varliminf_{\zeta\to 1}\left|\frac{\Phi(\zeta)-\Phi(1)}{\zeta-1}\right| \geqq N \quad \text{und daher} \quad \varliminf_{z\to 1}\left|\frac{\Phi(g(z))-\Phi(g(1))}{z-1}\right| \geqq N\alpha > 0.$$

Hieraus ergibt sich dann die Behauptung sofort aus dem Satz 4 b.

Liegt aber $C$ noch nicht innerhalb von $\mathfrak{C}_1$, so ergänze man $\gamma_w$ so zu einer geschlossenen Jordankurve $\mathfrak{C}$, daß sie sowohl $\mathfrak{C}_1$ (bis auf $\gamma_w$) als auch $C$ (bis auf $w=0$) im Innern enthält, wende dann auf $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}$ den Hilfssatz 4 in Nr. 7 und dann auf $C$ und $\mathfrak{C}$ den eben genannten Satz 4 b an[75]). — Hiermit ist die Behauptung des Satzes 7 über die konforme Ecke bewiesen.

83. II. Der Beweis für die Existenz des $\lim\limits_{w\to w_1}\frac{\varphi(w)-\varphi(w_1)}{w-w_1}$ ergibt sich folgendermaßen: Da nach dem bisher Bewiesenen auch unter unseren jetzigen Annahmen $C$ in $w=0$ eine konforme Ecke hat, also für die zu $z=\varphi(w)$ inverse Funktion $w=f(z)=u+iv$ $(f(1)=0)$ die Relation

$$(9,19)\qquad 0<\mu_1\leqq\left|\frac{f(e^{i\vartheta})-f(1)}{\vartheta}\right|\leqq\mu_2$$

---

[75]) Da $g(z)$ eine eindeutig bestimmte Abbildungsfunktion von $|z|<1$ auf $Z$ ist und $Z$ nur von den Größen $\delta, c_1, \delta(\eta)$ abhängt, so hängt auch $|g'(1)|=\alpha$ und damit auch die Zahl $N\alpha$ in (9, 18) nur von diesen Größen ab. Es sei $w=a'$ der Punkt, der bei der in Fußnote [74]) besprochenen Normierung von $g(z)$ bei der Abbildung $w=\Phi_1(g(z))$ dem Nullpunkt entspricht. In dem Falle, in dem man $\mathfrak{C}_1$ zu einer geschlossenen $\mathfrak{C}_1$ (bis auf den gemeinsamen Boden $\gamma_w$) und $C$ im Innern enthaltenden Jordankurve $\mathfrak{C}$ ergänzt, die innerhalb des Kreises mit dem Radius $D'$ um $w=0$ liegt, gibt es nach Hilfssatz 5 eine nur von $d', \gamma_\zeta, D'$, also nur von $\delta, c_1, \delta(\eta)$ und $D'$ abhängige Konstante $\lambda\geqq 1$, so daß für die durch $\psi(a')=0$, $\psi(0)=1$ normierte Abbildungsfunktion $z=\psi(w)$ des Innern von $\mathfrak{C}$ auf $|z|<1$

$$\varlimsup_{w\to 0}\left|\frac{\psi(w)-\psi(0)}{w}\right|\leqq\frac{\lambda}{N\alpha}$$

für beliebige $w$ aus dem Innern von $C$ oder auf $C$ gilt.

Liegt $C$ in einem Kreise mit dem Radius $D$, so kann man offenbar erreichen, daß $\mathfrak{C}$ im konzentrischen Kreise mit dem Radius $D'=D+R$ verläuft, wo $R$ die in Nr. 80 genannte Zahl ist. $\lambda$ hängt dann nur von $\delta, c_1, \delta(\eta)$ und $D$ ab.

*Bildet man nun auch das Innere von $C$ vermittels $z=\varphi(w)$ so auf $|z|<1$ ab, daß $w=a'$ in $z=0$ $(w=0$ in $z=1)$ übergeht, und gilt für die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ von $C$ in $w=0$ $\varlimsup\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}=\varkappa$, so ist für beliebige $w$ aus dem Innern von $C$ oder auf $C$*

$$\varlimsup_{w\to 0}\left|\frac{\varphi(w)-\varphi(0)}{w}\right|\leqq\frac{\lambda\varkappa}{N\alpha}=M'\cdot\varkappa,$$

*wo die rechts stehende Konstante $M'$ nur von den genannten Größen $\delta, c_1, D$ und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängt und der Minimalabstand von $a'$ von $C$ größer ist als ein nur von diesen Größen abhängiges $d'>0$.* $D$ ist der Radius einer $C$ enthaltenden Kreisscheibe.

gilt, so ist $\vartheta$ ein metrischer Parameter der Kurve $C$ in $w=0$. Es bezeichne nun $\Xi^*(\vartheta)$ die Funktion $\xi^*(t)$ als Funktion des Parameters $\vartheta$. Dann konvergiert nach der Vorbemerkung 1 auch das Integral

$$(9,20) \qquad \int_0^a \frac{\Xi^*(\vartheta)}{\vartheta^2}\, d\vartheta$$

und somit wegen $|u(e^{i\vartheta})| \leqq \Xi^*(\vartheta)$ auch die Integrale

$$\int_0^a \frac{|u(e^{i\vartheta})|}{\vartheta^2}\, d\vartheta, \qquad \int_0^a \frac{|u(e^{-i\vartheta})|}{\vartheta^2}\, d\vartheta.$$

Hieraus folgt aber nach dem Hilfssatz 14 (nach Vorbemerkung 3, mit $A=B=0$), daß die Funktion $r\frac{\partial u(re^{i\vartheta})}{\partial r} = \frac{\partial v(re^{i\vartheta})}{\partial \vartheta}$ in $\vartheta=0$ für $r\uparrow 1$ einen Randwert besitzt. Da ferner aus der Konvergenz von (9, 20) $\frac{\Xi^*(\vartheta)}{\vartheta} \to 0$ folgt, so hat nach einem bekannten Satze von Fatou $\frac{\partial u}{\partial \vartheta}$ in $\vartheta=0$ für $r\uparrow 1$ den radialen Randwert 0. Daher hat ($z=re^{i\vartheta}$ gesetzt)

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\cdot\frac{d\vartheta}{dz} = \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + i\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\right)\frac{1}{iz}$$

für $z\uparrow 1$ einen Randwert. Hieraus folgt aber nach dem Korrolar zum Satze 3, daß

$$\lim_{z\to 1}\frac{f(z)-f(1)}{z-1},$$

wenn $z$ allseitig gegen 1 strebt, existiert und wegen (9, 19) von 0 und $\infty$ verschieden ist, w. z. b. w.

84. Aus den in den Fußnoten [67]), [75]) beim Beweise des Satzes 7 gemachten Bemerkungen ergibt sich der folgende

Zusatz zum Satze 7. *Es sei $C$ eine geschlossene Jordankurve, die durch den Punkt $w=0$ hindurchgeht und dort die imaginäre Achse zur Tangente hat. Sie sei in der Parameterdarstellung $w(t)=x(t)+iy(t)$, $-T\leqq t<T$, gegeben. Dabei sei $t$ ein von $w=0$ aus gezählter metrischer Parameter, d. h. es gelte für den von $w=0$ zum Punkte $P(t)$ gezogenen Radiusvektor $r(t)$*

$$(9,21) \qquad 0<c_1\leqq\left|\frac{r(t)}{t}\right|\leqq C_1.$$

*Ferner sei für die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ von $C$ in $w=0$ $\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon}=\varkappa$.*[76]) *Schließlich gelte für das mit einer monotonen Majorante $\overline{X}(t)$ der in Nr. 47*

[76]) Man beachte, daß unter der Annahme (9, 21) für $\varkappa$ die Relation $\varkappa\leqq\frac{C_1}{c_1}$ gilt (Nr. 15).

*eingeführten Funktion $\xi(t)$ gebildete Integral*

$$\left|\int_0^{\omega}\frac{d\overline{X}(t)}{t}\right| \leqq \eta \quad \text{für} \quad |\omega| \leqq \delta(\eta).$$

*$\delta$ sei eine beliebige positive Zahl, die von mindestens einem der Werte der Funktion $\delta(\eta)$ übertroffen wird, und es sei $X(t)$ für alle $|t| \leqq \delta$ sicher definiert. $C$ liege innerhalb des Kreises mit dem Radius $D$ um $w = 0$. Dann gibt es*

1. *einen Punkt $w = a$ im Innern von $C$ und zwei positive nur von den Konstanten $\delta$, $c_1$ und der Funktion $\delta(\eta)$ abhängige Konstanten $d$ und $M$, so daß der Kreis mit dem Radius $d$ um $w = a$ im Innern von $C$ liegt, und daß für die Funktion $z = \varphi(w)$, die das Innere von $C$ auf $|z| < 1$ abbildet und durch $\varphi(a) = 0$, $\varphi(0) = 1$ normiert ist, für alle $w$ aus dem Innern oder auf dem Rande von $C$*

$$\overline{\lim_{w \to 0}}\left|\frac{\varphi(w)-\varphi(0)}{w}\right| \geqq \frac{M}{\varkappa} > 0$$

*gilt.*

*Es gibt 2. einen Punkt $w = a'$ im Innern von $C$ und zwei nur von $\delta, c_1, \delta(\eta)$ und $D$ abhängige Konstanten $d'$ und $M'$, so daß der Kreis mit dem Radius $d'$ um $w = a'$ ganz im Innern von $C$ liegt, und daß für die Funktion $z = \varphi(w)$, die das Innere von $C$ auf $|z| < 1$ abbildet und durch $\varphi(a') = 0$, $\varphi(0) = 1$ normiert ist, für alle $w$ aus dem Innern oder auf dem Rande von $C$*

$$\overline{\lim_{w \to 0}}\left|\frac{\varphi(w)-\varphi(0)}{w}\right| \leqq M' \cdot \varkappa$$

*gilt.*

85. Die Bedingung für $\xi^*(t)$ des Satzes 7 ist, was die *Größenordnung* von $\xi^*(t)$ anbetrifft, die schärfste. Genauer gilt der folgende

Satz 8. *$w = f(z)$ bilde $|z| = |re^{i\vartheta}| < 1$ auf das Innere einer geschlossenen Jordankurve $C$ ab, die im Punkte $w_1 = f(1)$ $(\equiv P)$ eine konforme Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leqq 2$, hat und in der Umgebung des Punktes $P$ ganz innerhalb eines der beiden von den Halbtangenten in $P$ gebildeten Winkelräume bleibt. Darüber hinaus möge der Abstand $\xi(\vartheta)$* (siehe Nr. 47) *des Punktes $f(e^{i\vartheta})$ auf einem jeden der beiden in $P$ zusammenstoßenden Kurvenzweige von der entsprechenden Halbtangente in $P$ eine monotone Funktion von $\vartheta$ sein. Dann ist $\sigma = |\vartheta|^{\tau} \operatorname{sgn}\vartheta$ ein metrischer Parameter von $C$ in bezug auf $P$, und es konvergiert das Integral $\int_0^{\delta}\frac{\xi_1(\sigma)}{\sigma^2}d\sigma$, wo $\delta \gtrless 0$ und $\xi_1(\sigma) = \xi(\vartheta)$ ist.*

Beweis. Nach der Vorbemerkung 3 zum Satze 7 genügt es, den Satz für eine Ecke der Öffnung $\pi$ zu beweisen. Ferner dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $w_1 = f(1) = 0$ voraussetzen.

Daß $\sigma = |\vartheta|^{\tau} \operatorname{sgn}\vartheta$ ein metrischer Parameter von $C$ in bezug auf $P$ ist, folgt aus der Voraussetzung, daß $C$ in $P$ eine konforme Ecke besitzt (siehe Nr. 17).

Die Konvergenz des Integrals $\int_0^{\delta} \frac{\xi_1(\sigma)}{\sigma^2}\, d\sigma$ folgt leicht mit Hilfe des Poissonschen Integrals. Es gilt nämlich für den Realteil $x = x(re^{i\vartheta})$ von $f(z)$

$$x(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(e^{i\vartheta}) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}\, d\vartheta .$$

Da $C$ in $P$ eine konforme Ecke besitzt, so muß insbesondere $\left|\frac{f(r)}{1-r}\right|$ zwischen zwei festen Schranken liegen. Daher muß auch

$$\left|\frac{x(r)}{1-r}\right| \leqq \varkappa \tag{9,22}$$

sein. Es sei etwa $x(e^{i\vartheta})$ in der Umgebung des Punktes $\vartheta = 0$ (bis auf $\vartheta = 0$ selbst) positiv. (Wenn $x(e^{i\vartheta})$ negativ ist, so braucht man in der folgenden Betrachtung nur $x$ durch $-x(e^{i\vartheta})$ zu ersetzen.) Es sei also für $-\delta_1 \leqq \vartheta \leqq \delta_2$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $x(e^{i\vartheta}) \geqq 0$. Dann gilt

$$\left|\frac{x(r)}{1-r}\right| \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta_2} \frac{x(e^{i\vartheta})(1+r)}{1+r^2-2r\cos\vartheta}\, d\vartheta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta_1}^{0} \frac{x(e^{i\vartheta})(1+r)}{1+r^2-2r\cos\vartheta}\, d\vartheta - \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\delta_2}^{2\pi-\delta_1} \frac{x(e^{i\vartheta})(1+r)\, d\vartheta}{1+r^2-2r\cos\vartheta}\right|,$$

und da das dritte Integral rechts für alle $r$ mit $0 \leqq r \leqq 1$ beschränkt bleibt, ist wegen (9,22) für hinreichend kleines $(1-r)$

$$\varkappa_1 \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta_2} \frac{x(e^{i\vartheta})}{1+r^2-2r\cos\vartheta}\, d\vartheta > \frac{1}{2\pi}\int_{1-r}^{\delta_2} \frac{x(e^{i\vartheta})}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\, d\vartheta .$$

Da auf der Integrationsstrecke $(1-r)^2 \leqq \vartheta^2$ und $4r\sin^2\frac{\vartheta}{2} \leqq \vartheta^2$ ist, ist

$$\varkappa_1 \geqq \frac{1}{4\pi}\int_{1-r}^{\delta_2} \frac{x(e^{i\vartheta})}{\vartheta^2}\, d\vartheta$$

und ebenso

$$\varkappa_1 \geqq \frac{1}{4\pi}\int_{-\delta_1}^{-(1-r)} \frac{x(e^{i\vartheta})}{\vartheta^2}\, d\vartheta ,$$

woraus mit $r \uparrow 1$ die Behauptung folgt[77]).

[77]) An Stelle des im Beweise eingeschlagenen Weges hätte man auch den in Fußnote [59]) genannten Satz von Herrn Pleßner verwenden können.

## § 10.

## Anwendungen des Hauptsatzes auf rektifizierbare Kurven.

86. Wir wenden in diesem Paragraphen den Satz 7 aus dem § 7 auf rektifizierbare Kurven an, die in einem Punkte $P_0$ (den wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit als den Nullpunkt annehmen) eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leqq 2$, haben. Wir stellen sie durch die Gleichungen

$$w = w(s) = x(s) + i\,y(s), \qquad -\frac{S}{2} \leqq s < \frac{S}{2},$$

dar, wo $s$ die vom Nullpunkt aus in der einen Richtung positiv in der entgegengesetzten Richtung negativ gezählte Bogenlänge und $S$ die Gesamtlänge von $C$ ist. Dann existieren bekanntlich fast überall $x'(s) = \cos\theta(s)$, $y'(s) = \sin\theta(s)$, wo $\theta(s)$ der nur $\bmod 2\pi$ bestimmte Tangentenwinkel (= Winkel zwischen der positiven reellen Achse und der im Sinne wachsender $s$ gerichteten Tangente) in den entsprechenden Punkten ist, und es gilt

$$x(s) = \int_0^s x'(s)\,ds, \qquad y(s) = \int_0^s y'(s)\,ds.$$

$\theta_+$ und $\theta_-$ seien die Richtungswinkel der rechtsseitigen resp. linksseitigen Halbtangente im Nullpunkt. Dann gilt der folgende

Satz 9. *Ist* $\int_0^{\pm\delta} \frac{|\cos\theta(s) - \cos\theta_\pm|}{s}\,ds$ $(\delta > 0)$ *konvergent und bleibt* $\frac{r(s)}{|s|} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|s|}$ *zwischen zwei festen positiven Schranken, so hat $C$ in $P_0$ eine konforme Ecke der Öffnung $\pi\tau$.*

*Ist darüber hinaus der* $\lim_{s\to 0} \frac{r(s)}{|s|}$ *vorhanden und* $\neq 0$, *so existiert für die Abbildungsfunktion $z = \varphi(w)$ des Innern von $C$ auf $|z| < 1$ der* $\lim_{w\to 0} \frac{\varphi(w) - \varphi(0)}{w^{1/\tau}}$ *bei allseitiger Annäherung.*

Zum Beweise haben wir zu zeigen, daß für jeden der beiden Kurvenäste in $w = 0$ die Voraussetzungen des Satzes 7 selbst erfüllt sind. Wir zeigen dies etwa für $s > 0$ und denken uns dazu die rechtsseitige Halbtangente in die Richtung der positiven $y$-Achse gebracht $(\cos\theta_+ = 0)$. Dann ist $\xi(s) = |x(s)|$, so daß also $X(s) = \int_0^s |x'(s)|\,ds$ eine monotone Majorante von $\xi(s) = |x(s)| \leqq X(s) = \int_0^s |x'(s)|\,ds$ ist. Daher ergibt sich wegen $\cos\theta_+ = 0$ aus der (vorausgesetzten) Konvergenz des Integrals $\int_0^\delta \left|\frac{x'(s)}{s}\right| ds = \int_0^\delta \frac{dX(s)}{s}$ nach Hilfssatz 11 die Konvergenz von $\int_0^\delta X(s)\frac{ds}{s^2}$.

Da ferner aus $0 < c_1 \leqq \frac{r(s)}{|s|} \leqq C_1$ für die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ von $C$ in $P_0$ $\Delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ resp. aus $\lim_{s \downarrow 0} \left| \frac{r(s)}{s} \right| = \alpha > 0$: $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$ folgt, so sind die Voraussetzungen des Satzes 7 in der Tat erfüllt.

87. Für das Folgende brauchen wir noch zwei Hilfssätze. Um sie kurz zu formulieren, ist es nützlich, die folgende Begriffsbildung einzuführen: Es sei $G$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $\varrho$ eine positive Zahl. Wir sagen, eine in $G$ verlaufende doppelpunktfreie stetige Kurve $\mathfrak{C}$ sei eine *$\varrho$-Kurve in bezug auf $G$*, wenn der Kreis mit dem Radius $\varrho$ um einen beliebigen Punkt von $\mathfrak{C}$ ganz im Innern von $G$ liegt.

Hilfssatz 15. *Es sei $G$ ein von einer geschlossenen Jordankurve begrenztes Gebiet, das vollständig im Innern eines Kreises mit dem Radius $M$ enthalten ist. $w_1$ und $w_2$ seien Punkte im Innern von $G$, die sich durch eine $\varrho$-Kurve in bezug auf $G$ verbinden lassen. $z = \varphi(w; w_1; G)$ und $z = \varphi(w; w_2; G)$ mögen $G$ so auf $|z| < 1$ abbilden, daß $w = w_1$ bzw. $w = w_2$ in $z = 0$ übergeht. Dann existiert für jedes $w$ in $G + C$*

$$\lim_{w' \to w} \frac{\varphi(w; w_1; G) - \varphi(w'; w_1; G)}{\varphi(w; w_2; G) - \varphi(w'; w_2; G)} \qquad (w' \neq w \text{ in } G + C)$$

*und liegt absolut zwischen zwei nur von $M$ und $\varrho$ abhängigen positiven Schranken $\lambda_1, \lambda_2$.*

*Existiert ferner der $\lim_{w' \to w} \frac{\varphi(w; w_1; G) - \varphi(w'; w_1; G)}{w - w'}$, so existiert auch $\lim_{w' \to w} \frac{\varphi(w'; w_2; G) - \varphi(w; w_2; G)}{w' - w} = \varphi'(w; w_2; G)$, und es gilt*

$$\lambda_1 \leqq \left| \frac{\varphi'(w; w_1; G)}{\varphi'(w; w_2; G)} \right| \leqq \lambda_2.$$

Beweis. a) Es sei $\mathfrak{K}$ ein in $G$ gelegener Kreis mit dem Mittelpunkt $a$ und dem Radius $\varrho$, $a'$ ein Punkt aus $\mathfrak{K}$ mit $|a - a'| \leqq \frac{\varrho}{2}$. $z = \varphi(w; a)$ und $z = \varphi(w; a')$ mögen $G$ so auf $|z| < 1$ abbilden, daß $w = a$ bzw. $w = a'$ in $z = 0$ übergeht. Dann ist für die im Satze genannten $w, w'$

$$\frac{1}{3} \leqq \lim_{w' \to w} \left| \frac{\varphi(w; a') - \varphi(w'; a')}{\varphi(w; a) - \varphi(w'; a)} \right| \leqq 3.$$

Denn nach dem Schwarzschen Lemma (angewandt auf die in $|w - a| \leqq \varrho$ reguläre Funktion $\varphi(w; a)$, die in $|w - a| \leqq \varrho$ sicher absolut $< 1$ ist und in $w = a$ verschwindet) ist zunächst

$$|\varphi(w; a)| \leqq \frac{|w - a|}{\varrho}, \qquad |w - a| \leqq \varrho,$$

und somit

$$|\varphi(a'; a)| \leqq \frac{\varrho}{2} \cdot \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{2}. \tag{10,1}$$

Nun ist,

$$\zeta = \varphi(w; a), \quad \zeta' = \varphi(w'; a), \quad \zeta_1 = \varphi(a'; a)$$

gesetzt,

$$\varphi(w; a') = S(\zeta) = \frac{\zeta - \zeta_1}{1 - \zeta\bar{\zeta}_1} e^{i\tau}, \quad \tau \text{ reell},$$

und daher

$$\frac{\varphi(w; a') - \varphi(w'; a')}{w - w'} = \frac{S(\zeta) - S(\zeta')}{\zeta - \zeta'} \cdot \frac{\varphi(w; a) - \varphi(w'; a)}{w - w'},$$

so daß

$$\lim_{w' \to w} \frac{\varphi(w; a') - \varphi(w'; a')}{\varphi(w; a) - \varphi(w'; a)} = S'(\zeta) = \frac{1 - |\zeta_1|^2}{(1 - \zeta\bar{\zeta}_1)^2} e^{i\tau}$$

ist. Nun ist für $|\zeta| \leqq 1$

$$\frac{1 - |\zeta_1|}{1 + |\zeta_1|} \leqq |S'(\zeta)| \leqq \frac{1 + |\zeta_1|}{1 - |\zeta_1|}$$

und also (wegen (10, 1))

$$\frac{1}{3} \leqq \frac{1 - |\zeta_1|}{1 + |\zeta_1|} \leqq \lim_{w' \to w} \left| \frac{\varphi(w; a') - \varphi(w'; a')}{\varphi(w; a) - \varphi(w'; a)} \right| \leqq \frac{1 + |\zeta_1|}{1 - |\zeta_1|} \leqq 3,$$

wie behauptet.

88. Ist nun $|w_1 - w_2| \leqq \frac{\varrho}{2}$, so ist der Hilfssatz 17 bewiesen. Es sei also $|w_1 - w_2| > \frac{\varrho}{2}$.

b) Es sei nun $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_\varrho$ die $\varrho$-Kurve in bezug auf das Gebiet $G$, welche die im Satze genannten Punkte $w_1$ und $w_2$ miteinander verbindet[78]). Wir behaupten nun: *Es gibt eine Folge von endlich vielen Kreisen* $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_{n+1}$ *in* $G$ *mit dem festen Radius* $\varrho$ *und den Mittelpunkten* $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ *auf* $\mathfrak{C}_\varrho$ *mit* $a_0 \equiv w_1$, $|a_{n+1} - w_2| \leqq \frac{\varrho}{2}$, $|a_\nu - a_{\nu+1}| = \frac{\varrho}{2}$, $|a_\nu - a_\mu| \geqq \frac{\varrho}{2}$ $(0 \leqq \nu, \mu \leqq n+1, \nu \neq \mu)$. Zum Beweise dieser Behauptung geben wir ein Verfahren zur Konstruktion dieser Kreise an. $\mathfrak{K}_0$ ist der Kreis um $w = w_1 \equiv a_0$ mit $\varrho$ als Radius. Wir beschreiben sodann um $a_0$ den Kreis $\mathfrak{k}_0$ mit dem Radius $\frac{\varrho}{2}$. Dieser trifft $\mathfrak{C}_\varrho$ in endlich oder unendlich vielen Punkten; wir suchen denjenigen Schnittpunkt von $\mathfrak{C}_\varrho$ mit $\mathfrak{k}_0$ auf, den man beim Durchlaufen der Kurve $\mathfrak{C}_\varrho$ von $w_2$ aus zuerst antrifft, und bezeichnen ihn mit $a_1$. *Das Stück der Kurve* $\mathfrak{C}_\varrho$ *von* $w_2$ *bis* $a_1$ *liegt dann ganz außerhalb von* $\mathfrak{k}_0$. Liegt nun $w_2$ innerhalb des Kreises $\mathfrak{k}_1$ mit $\frac{\varrho}{2}$ um $a_1$, so ist die Behauptung bereits bewiesen. Falls nicht, so sei $a_2$ derjenige Schnittpunkt von $\mathfrak{k}_1$ mit $\mathfrak{C}_\varrho$, den man beim Durchlaufen von $\mathfrak{C}_\varrho$ von $w_2$ aus nach $a_1$ zuerst antrifft. *Der Teil der Kurve* $\mathfrak{C}_\varrho$ *von* $w_2$ *bis* $a_2$ *liegt sicher außerhalb der Kreise* $\mathfrak{k}_0$

[78]) Bei der Redaktion von b) und c) haben wir eine Überlegung aus einer noch nicht veröffentlichten Arbeit von Herrn Ostrowski benutzt.

*und* $\mathfrak{k}_1$. Ferner ist offenbar $|a_0 - a_2| \geqq \frac{\varrho}{2}$. Liegt nun $w_2$ innerhalb des Kreises $\mathfrak{k}_2$ mit $\frac{\varrho}{2}$ um $a_2$, so ist der Beweis vollendet; sonst verfahren wir in analoger Weise wie bei $a_0$ und $a_1$ bei $a_2$ und gelangen zu einem neuen Mittelpunkt $a_3$ und so fort. Dies Verfahren muß schließlich abbrechen, indem $w_2$ entweder in das Innere oder auf die Peripherie eines Kreises $\mathfrak{k}_{n+1}$ mit dem Radius $\frac{\varrho}{2}$ um einen der konstruierten Punkte $a_{n+1}$ auf $\mathfrak{C}_\varrho$ fällt. Denn da für alle so konstruierten Punkte $a_\nu$ $|a_\nu - a_\mu| \geqq \frac{\varrho}{2}$ gilt und da alle $a_\nu$ im Innern von $G$ also auch im Innern des Kreises mit dem Radius $M$ liegen, so kann es nur endlich viele Punkte $a_\nu$ und somit nur endlich viele Kreise $\mathfrak{k}_\nu$ geben. Beschreibt man nun um jeden Punkt $a_\nu$ den Kreis $\mathfrak{K}_\nu$ mit dem Radius $\varrho$, so liegt wegen der Eigenschaft von $\mathfrak{C}_\varrho$ und weil ferner $a_\nu$ auf $\mathfrak{C}_\varrho$ liegen, $\mathfrak{K}_\nu$ in $G$. Hiermit ist die Behauptung b) bewiesen.

c) Aus der zuletzt angegebenen Überlegung folgt noch genauer: Die Anzahl $n+2$ der Kreise $\mathfrak{K}_\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n+1)$ der $w_1$ und $w_2$ verbindenden „Kreiskette" bleibt für jede Wahl von $w_1 \equiv a_0$, $w_2$ und $\mathfrak{C}_\varrho$ gleichmäßig unterhalb einer festen nur von $M$ und $\varrho$ abhängigen Schranke. (Sie hängt also *nicht* von $G, w_1, w_2, \mathfrak{C}_\varrho$ ab, wofern natürlich $w_1, w_2$ sich nur durch eine $\varrho$-Kurve in bezug auf $G$ verbinden lassen.) Dies folgt aus der Tatsache: Ist $a_0$ irgendein Punkt im Innern des Kreises $K_M$ mit dem Radius $M$, sind $a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ beliebige Punkte, für die nur die Relation $|a_\nu - a_\mu| \geqq \frac{\varrho}{2}$ $(\nu, \mu = 0, 1, 2, \ldots)$ gilt, so ist die Anzahl $N$ der Punkte $a_\nu$ in $K_M$ sicher $\leqq \left[\frac{16M}{\varrho} + 1\right]^2$. Dies kann man nun leicht einsehen, indem man ein quadratisches „Gitter" mit der „Maschenweite" $\frac{\varrho}{8}$ zeichnet, das den Kreis $K_M$ vollständig überdeckt. Liegt dann ein Punkt $a_\nu$ im Innern eines der Quadrate dieses „Gitters", so liegt sicher keiner auf dem Rande dieses Quadrates, da ja $\frac{\varrho}{2} > \frac{\varrho}{8}\sqrt{2}$, also größer als die Diagonale dieses Quadrates ist. Liegt aber ein Punkt $a_\nu$ auf dem Rande eines Quadrates, so gibt es sicher zwei an diesem Rande aneinanderstoßende Quadrate, in deren Innerem und auf deren Rande kein Punkt $a_\nu$ liegt. Daher sind sicher nicht mehr Punkte $a_\nu$ in $K_M$ vorhanden als es Quadrate gibt, die den Kreis $K_M$ überdecken. Deren Anzahl ist aber sicher $\leqq \left[\frac{2M}{\frac{\varrho}{8}} + 1\right]^2 = \left[\frac{16M}{\varrho} + 1\right]^2$.

d) Durch sukzessive Anwendung des unter a) Bewiesenen folgt nun die Behauptung des Satzes: Bezeichnen wir nämlich mit $z = \varphi(w; a_\nu)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n+1$, diejenige Funktion, die $G$ so auf $|z| < 1$ abbildet, daß $w = a_\nu$ in $z = 0$ übergeht, so ist wegen der Eigenschaft der Kreise $\mathfrak{K}_\nu$

für die im Satze genannten $w, w'$

$$\frac{1}{3} \leqq \lim_{w' \to w} \left| \frac{\varphi(w; a_\nu) - \varphi(w'; a_\nu)}{\varphi(w; a_{\nu+1}) - \varphi(w'; a_{\nu+1})} \right| \leqq 3.$$

Multiplizieren wir alle diese Ungleichungen für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$ miteinander und der entsprechenden für $\varphi(w, a_{n+1})$ und $\varphi(w, w_2)$, so erhalten wir

$$\frac{1}{3^{n+2}} \leqq \lim_{w' \to w} \left| \frac{\varphi(w; w_1) - \varphi(w'; w_1)}{\varphi(w; w_2) - \varphi(w'; w_2)} \right| \leqq 3^{n+2}$$

und wegen $n \leqq \left[\frac{16M}{\varrho} + 1\right]^2$ ist hiermit der Hilfssatz 17 bewiesen.

89. Nun brauchen wir noch den folgenden einfachen geometrischen

Hilfssatz 16. *Es sei $C$ eine geschlossene rektifizierbare Jordankurve. Ist $r(P_1, P_2)$ der geradlinige Abstand zweier Punkte $P_1, P_2$ von $C$, $\sigma(P_1, P_2)$ die Länge des sie verbindenden (kleineren) Bogens von $C$, so gelte für beliebige $P_1, P_2$ auf $C$*

$$\frac{r(P_1, P_2)}{\sigma(P_1, P_2)} \geqq c_1 > 0 \qquad (c_1 < 1), \tag{10,2}$$

*wo $c_1$ eine feste Konstante ist. $w_1$ und $w_2$ seien schließlich zwei im Innern von $C$ liegende Punkte, die Mittelpunkte je einer ganz im Innern von $C$ gelegenen Kreisscheibe vom Radius $\varrho > 0$ sind. Dann lassen sich $w_1$ und $w_2$ durch eine $r$-Kurve in bezug auf das Innere $G$ von $C$ für $r = \frac{\varrho}{2} c_1$ miteinander verbinden.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß $|w_1 - w_2| > \varrho$ ist, da man sonst offenbar $w_1$ mit $w_2$ durch eine $\frac{\varrho}{2}$-Kurve in bezug auf $G$ verbinden kann. — Wir denken uns zunächst durch die Mittelpunkte $w_1$ und $w_2$ der Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ mit dem Radius $\varrho$ die Geraden $g_1$ und $g_2$ gezogen, und zwar so, daß $g_1$ und $g_2$ im Innern von $C$ oder auf $C$ einander nicht treffen, und daß ferner weder $g_1$ den Kreis $\mathfrak{K}_2$ noch $g_2$ den Kreis $\mathfrak{K}_1$ trifft. (Man beachte, daß $|w_1 - w_2| > \varrho$ vorausgesetzt wurde.) Wir verfolgen nun zunächst $g_1$ von $w_1$ aus nach beiden Seiten bis zu den so zuerst angetroffenen Schnittpunkten $A_1, B_1$ (die $w_1$ zwischen sich enthalten). Dann zerfällt $C$ durch $A_1$ und $B_1$ in zwei Teile, von denen jeder zusammen mit der Strecke $A_1 B_1$ eine geschlossene Jordankurve bildet. $C_1$ sei diejenige dieser beiden Jordankurven, in deren *Äußerem* der Kreis $\mathfrak{K}_2$ liegt, $C_2$ die andere. $C_1$ enthält sicher einen Halbkreis von $\mathfrak{K}_1$ (vom Radius $\varrho$) im Innern, und da dessen Mittelpunkt auf $A_1 B_1$ liegt, so muß die Länge desjenigen Teiles der Kurve $C_1$, den $C_1$ mit $C$ gemeinsam hat, sicher $\geqq \pi\varrho > 2\varrho$ sein. — Analog denken wir uns auch $g_2$ von $w_2$ aus nach beiden Richtungen bis zu den beiden auf diese Weise zuerst angetroffenen Schnittpunkten $A_2, B_2$ durchlaufen. Diese liegen notwendig auf dem Teile

von $C_2$, den $C_2$ mit $C$ gemeinsam hat, da ja die Strecke $A_1 B_1$ von $g_2$ nach der Konstruktion nicht getroffen werden kann. Durch $A_2 B_2$ zerfällt nun $C_2$ in zwei Teilkurven $C_3$, $C_4$, von denen die eine, etwa $C_3$, als Begrenzung u. a. die Strecken $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ hat. Die Länge desjenigen Bogens von $C_4$, den $C_4$ mit $C_2$ und somit auch mit $C$ gemeinsam hat, ist sicher $\geqq \pi \varrho > 2\varrho$.

90. Wir betrachten nun genauer die Kurve $C_3$. Diese besteht aus den beiden getrennt liegenden geradlinigen Stücken $A_1 B_1$, $A_2 B_2$ und den beiden punktfremden Kurvenbögen $\gamma_1 = \overset{\frown}{A_1 A_2}$ und $\gamma_2 = \overset{\frown}{B_1 B_2}$ von $C$, welche die Endpunkte $A_1, A_2$ bzw. $B_1, B_2$ dieser Strecken miteinander verbinden. Ferner hat jeder Punkt $P_1$ von $\gamma_1$ von jedem Punkte $P_2$ von $\gamma_2$ einen größeren Abstand als $2\varrho c_1$. Denn es ist ja nach der Bemerkung über die Längen der Bögen $\overset{\frown}{A_1 B_1}$ von $C_1$ und $\overset{\frown}{A_2 B_2}$ von $C_4$, die diese Kurven mit $C$ gemeinsam haben: $\sigma(P_1, P_2) \geqq \pi\varrho > 2\varrho$ und daher nach (10, 2)

$$r(P_1, P_2) > 2\varrho c_1. \tag{10,3}$$

Es sei nun $\mathfrak{M}_1$ die Menge aller Punkte in der $w$-Ebene, deren Abstand von $\gamma_1 \leqq \frac{\varrho c_1}{2}$, $\mathfrak{M}_2$ die Gesamtheit aller Punkte, deren Abstand von $\gamma_2 \leqq \frac{\varrho c_1}{2}$ ist. Sowohl $\mathfrak{M}_1$ als auch $\mathfrak{M}_2$ bilden ein Kontinuum. Denn beide Mengen sind abgeschlossen, und sind etwa $P_1$ und $P_2$ Punkte von $\mathfrak{M}_1$, so liegt jeder von ihnen im Innern oder auf dem Rande eines ganz zu $\mathfrak{M}_1$ gehörenden Kreises mit dem Radius $\frac{\varrho c_1}{2}$ um einen geeigneten Punkt von $\gamma_1$; sie können somit beide (durch Radien) mit $\gamma_1$ und daher auch miteinander verbunden werden. Analoges gilt für $\mathfrak{M}_2$. Ferner ist $\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2 = 0$; denn gäbe es einen Punkt $P$, der zugleich zu $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ gehörte, so gäbe es auch einen Punkt $Q_1$ auf $\gamma_1$ mit $|Q_1 - P| \leqq \frac{\varrho c_1}{2}$ und einen Punkt $Q_2$ auf $\gamma_2$ mit $|Q_2 - P| \leqq \frac{\varrho c_1}{2}$, so daß $|Q_1 - Q_2| \leqq \varrho c_1$ wäre — im Gegensatz zu (10, 3). Nach einem bekannten Satz [79]) gibt es dann aber ein geschlossenes Polygon $\Pi$ mit endlich vielen Seiten, das sich nicht selber überschneidet und das $\mathfrak{M}_1$ im Innern enthält und $\mathfrak{M}_1$ von $\mathfrak{M}_2$ trennt. Dieses Polygon muß nun notwendig die Strecken $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ (in je endlich vielen Punkten) treffen, und es gibt einen ganz im Innern von $C_3$ verlaufenden Streckenzug $S$ von $\Pi$, der einen Punkt $A$ von $A_1 B_1$ mit einem Punkte $B$ von $A_2 B_2$ verbindet. Der Streckenzug $\mathfrak{C}$, der sich aus der Strecke $w_1 A$, dem Streckenzug $S$ und der Strecke $w_2 B$ zusammensetzt — ist $w_1 = A$

[79]) Siehe L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie I, S. 84.

oder $w_2 = B$, so ist die Strecke $w_1 A$ bzw. $w_2 B$ als der Punkt $w_1 = A$ bzw. $w_2 = B$ aufzufassen — ist dann offenbar eine $r$-Kurve in bezug auf $G$ mit $r = \frac{\varrho c_1}{2}$. Denn jeder Punkt dieses Streckenzuges $\mathfrak{C}$ hat offenbar von der Kurve $C$ einen größeren Abstand als $\frac{\varrho c_1}{2}$. —

91. Satz 10. *Es sei $C$ eine geschlossene Jordankurve, die längs eines Teilbogens $c$ eine sich stetig drehende Tangente besitzt. Dieser Teilbogen möge durch die Gleichung*

$$(10,4) \qquad w = w(s) = x(s) + i\,y(s), \qquad 0 \leqq s \leqq a,$$

*dargestellt sein, wo $s$ die längs $c$ gemessene Bogenlänge ist. Ferner mögen für jedes feste $\alpha'$ und $\beta'$, $0 < \alpha' < \beta' < a$, und ein geeignetes $\varepsilon > 0$ die Integrale*

$$(10,5) \qquad \int_0^{\varepsilon} \left| \frac{x'(s \pm \sigma) - x'(s)}{\sigma} \right| d\sigma, \qquad \int_0^{\varepsilon} \left| \frac{y'(s \pm \sigma) - y'(\sigma)}{\sigma} \right| d\sigma \ {}^{80})$$

*gleichmäßig für alle $s$ mit $0 < \alpha' \leqq s \leqq \beta' < a$ konvergieren.*

*Bildet man dann das Innere $G$ von $C$ auf $|z| < 1$ vermittels $z = \varphi(w)$ ab, so existiert in jedem inneren Punkte $w$ von $c$ die allseitige Ableitung $\varphi'(w)$, und es ist auf jedem inneren Teilbogen von $c$ $\varphi'(w)$ stetig und von 0 verschieden.*

Beweis. Zunächst bemerken wir, daß man für den Beweis annehmen darf, daß $C$ *durchweg* eine sich stetig drehende Tangente besitzt. Sonst verfahre man folgendermaßen: Es seien $c'$, $c''$ zwei feste *innere* Teilbögen von $c$, und $c''$ enthalte $c'$. Dann kann man bekanntlich $c''$ durch einen (bis auf seine Endpunkte) ganz im Innern von $C$ verlaufenden Jordanbogen zu einer geschlossenen, durchweg mit stetiger Tangente versehenen Jordankurve $C^*$ ergänzen. Bei der durch $z = \varphi(w)$ vermittelten Abbildung gehen die Bögen $c'$, $c''$ in Bögen $\gamma'$ bzw. $\gamma''$ von $|z| = 1$ und $C^*$ in eine geschlossene Jordankurve $\Gamma^*$ über, die den Bogen $\gamma''$ mit der Peripherie gemeinsam hat und sonst ganz innerhalb dieses Kreises verläuft. $z = g(\zeta)$ bilde nun den Kreis $|\zeta| < 1$ einer $\zeta$-Ebene auf das Innere von $\Gamma^*$ ab, und es entspreche bei dieser Abbildung dem Bogen $\gamma'$ von $|z| = 1$ der Bogen $b'$ von $|\zeta| = 1$. Dann ist nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip $g(\zeta)$ auf dem *abgeschlossenen* Bogen $b'$ noch analytisch und $g'(\zeta)$ ist dort von 0 verschieden. Es sei nun $w = f(z)$ die zu $z = \varphi(w)$ inverse Funktion; dann bildet $w = F(\zeta) = f(g(\zeta))$ $|\zeta| < 1$ auf das Innere der ge-

---

80) Die Voraussetzung, daß beide Integrale in (10,5) konvergieren, ist insofern unnötig, da aus der gleichmäßigen Konvergenz des einen der beiden Integrale auch die des anderen folgt, wie leicht zu sehen ist. Für unsere Zwecke ist es aber bequem, diese Annahme zu machen.

schlossenen durchweg mit stetiger Tangente versehenen Jordankurve $C^*$ ab, die den Bogen $c''$ mit $C$ gemeinsam hat. Ist nun unter der Annahme der gleichmäßigen Konvergenz der Integrale (10, 5) für alle $s$ auf $c'$ $(\alpha' \leqq s \leqq \beta')$ für $F(\zeta)$ bewiesen, daß $F'(\zeta)$ auf $b'$ existiert und zugleich mit $\frac{1}{F'(\zeta)}$ stetig ist, so folgt wegen

$$\lim_{z \to z_1} \frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} = \lim_{\zeta \to \zeta_1} \frac{F(\zeta)-F(\zeta_1)}{\zeta-\zeta_1} \cdot \frac{\zeta-\zeta_1}{g(\zeta)-g(\zeta_1)} = F'(\zeta)\frac{1}{g'(\zeta)}$$

$$(z = g(\zeta),\ z_1 = g(\zeta_1),\ \zeta,\ \zeta_1 \text{ auf } b',\ z,\ z_1 \text{ auf } \gamma'),$$

daß $f'(z)$ auf $\gamma'$ existiert und dort zugleich mit $\frac{1}{f'(z)}$ stetig ist. —

92. Da wegen der Stetigkeit der Tangente $C$ in jedem Punkte $P$ regulär unbewallt ist (d. h. für die Unbewalltheitsfunktion $\Delta(\varepsilon)$ von $C$ in $P$ die Bedingung $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\Delta(\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$ gilt) und ferner in jedem inneren Punkte $P$ von $c$ die Integrale (10, 5) konvergieren, sind die Voraussetzungen des Satzes 7 erfüllt, und es folgt daraus, daß $\varphi(w)$ in jedem inneren Punkte von $c$ eine *allseitige* von 0 und $\infty$ verschiedene Ableitung besitzt. —

Um die Stetigkeit von $\varphi(w)$ zu zeigen, beweisen wir zuerst: *Ist $c'$ $(\alpha' \leqq s \leqq \beta')$ ein fester innerer Teilbogen von $c$, so gibt es zwei für alle $w$ auf $c'$ feste Konstanten $K_1$, $K_2$, so daß für alle $w$ auf $c'$*

$$(10,6) \qquad 0 < K_1 \leqq |\varphi'(w)| \leqq K_2$$

*ist.* Der Beweis für diese Behauptung wird sich aus dem Zusatz zum Satze 7 ergeben. — Da $C$ nach der Annahme durchweg stetige Tangente besitzt, können wir für die analytische Darstellung von $C$ durchweg die Bogenlänge als Parameter benutzen und also annehmen, daß $C$ *durchweg* durch die Gleichung (10, 4) mit $0 \leqq s < S$ ($S$ Gesamtlänge von $C$) gegeben ist, wobei $s$ bei der Durchlaufung von $C$ in *mathematisch positivem Sinne wächst.* (Der Bogen $c$ werde, wie in der Formulierung des Satzes angegeben wird, durch diese Gleichung für $0 \leqq s \leqq a \leqq S$ geliefert.) Wir denken uns die Funktionen $w(s)$, $w'(s)$ sogleich für alle reellen $s$ stetig und periodisch fortgesetzt, indem wir $w(s + \nu S) = w(s)$, $w'(s + \nu S) = w'(s)$ $(\nu \gtreqless 0, \text{ ganz})$, $0 \leqq s < S$, annehmen. Ähnlich können wir den Tangentenwinkel $\theta(s)$ von $C$ etwa für $s = 0$ beliebig normieren und zunächst für alle $s$ mit $0 \leqq s < S$ und sodann für alle reellen $s$ stetig fortsetzen, indem wir $\theta(s + \nu S) = \theta(s) + 2\pi\nu$ $(\nu \gtreqless 0, \text{ ganz})$, $0 \leqq s < S$, annehmen.

93. Es sei nun $P(s_0)$ ein beliebiger Punkt von $C$. Dann ist jeder Punkt $P$ von $C$ eindeutig dadurch festgelegt, daß wir seinen längs $C$ gemessenen kürzesten Abstand $\sigma$ von $P\left(-\frac{S}{2} \leqq \sigma < \frac{S}{2}\right)$, mit einem Vorzeichen versehen, angeben. (Dabei soll natürlich $\sigma$ in der Richtung wachsender $s$

von $s_0$ aus positiv gerechnet werden.) Wegen der Stetigkeit der Tangente gibt es dann ein $c_1$ mit $0 < c_1 < 1$, so daß, unter $r(P_0, P)$ den geradlinigen Abstand zweier Punkte $P_0 = P(s_0)$, $P = P_{s_0}(\sigma)$, unter $\sigma$ (wie eben gesagt) die Länge des kürzesten sie verbindenden Bogens von $C$ verstanden,

$$(10,7) \qquad 0 < c_1 \leqq \frac{r(P_0, P)}{\sigma} \leqq 1$$

gilt und also die Bogenlänge „gleichmäßig" für alle Punkte $P_0 = P(s_0)$ von $C$ (und also insbesondere auch von $c'$) metrischer Parameter von $C$ ist.

94. Es sei nunmehr $P(s_0)$ ein Punkt auf $c'$, $\xi_{s_0}(\sigma)$, $\eta_{s_0}(\sigma)$ seien die in Nr. 47 eingeführten Größen (der Abstand des Punktes $P_{s_0}(\sigma)$ von der Tangente in $P(s_0)$ bzw. die Projektion des Radiusvektors $\overrightarrow{P(s_0)\,P_{s_0}(\sigma)}$ auf die Tangente in $P(s)$). Wir denken uns die Tangente und die Normale in $P(s_0)$ als die Achsen eines Koordinatensystems $(x^*, y^*)$ aufgefaßt (ähnlich wie es in der Differentialgeometrie üblich ist: das „mitbewegte Zweibein"), und zwar fassen wir die innere Normale als positive $x^*$-Achse, diejenige Halbgerade der Tangente, die aus ihr durch Drehung um $\frac{\pi}{2}$ in mathematisch-positivem Sinne hervorgeht, als die positive $y^*$-Achse auf. Dann ist, wenn $\alpha = \alpha(s_0)$ den Winkel zwischen der positiven $x$- und der positiven $x^*$-Achse bezeichnet und $w^* = x^* + i y^*$ gesetzt wird, bei geeigneter Zählung von $\alpha$ $w^* = (w - w(s_0))\, e^{i\alpha}$ oder

$$x^* = (x - x(s_0)) \cos\alpha - (y - y(s_0)) \sin\alpha,$$
$$y^* = (x - x(s_0)) \sin\alpha + (y - y(s_0)) \cos\alpha.$$

Sind $x^*(\sigma)$, $y^*(\sigma)$ die Koordinaten des Punktes $P_{s_0}(\sigma)$, so ist $\xi_{s_0}(\sigma) = |x^*(\sigma)|$, $\eta_{s_0}(\sigma) = |y^*(\sigma)|$, $r^2 = x^*(\sigma)^2 + y^*(\sigma)^2$. Ferner gilt — man beachte, daß $\sigma = s - s_0$ bzw. $= s - s_0 \pm S$ ist, wo $P_{s_0}(\sigma)$ der Parameterwert $s$ der Bogenlänge entspricht —

$$\frac{dx^*}{d\sigma} = x^{*\prime} = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad x^{*\prime}(0) = 0,$$
$$\frac{dy^*}{d\sigma} = y^{*\prime} = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \quad y^{*\prime}(0) = -1, \qquad |\sigma| < \frac{S}{2}.$$

Wir können $x^{*\prime}$ auch in der Form schreiben

$$(10,8) \qquad x^{*\prime}(\sigma) = (x'(s) - x'(s_0)) \cos\alpha - (y'(s) - y'(s_0)) \sin\alpha,$$

da wegen $x'(s_0) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, $y'(s_0) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ der hinzugefügte Bestandteil $\sin\alpha \cos\alpha - \cos\alpha \sin\alpha = 0$ ist.

Dann ergibt sich wegen (10,8), daß

$$\left| \int_0^\omega \left| \frac{x^{*\prime}(t)}{t} \right| dt \right| \leqq \int_0^\omega \left| \frac{x'(s_0+t) - x'(s_0)}{t} \right| dt + \int_0^\omega \left| \frac{y'(s_0+t) - y'(s_0)}{t} \right| dt \Bigg|$$

für alle $s_0$ in $\langle\alpha', \beta'\rangle$ gilt; es ist also, wenn $\xi^*_{s_0}(t)$ die in Nr. 47 definierte Funktion von $C$ im Punkte $P(s_0)$ ist, für die „Majorante“

$$X(t) = X_{s_0}(t) = \left| \int_0^t |x^{*\prime}(\sigma)|\, d\sigma \right| \text{ von } \xi^*_{s_0}(t) \text{ für jedes } \eta > 0$$

$$\left| \int_0^{\omega} \frac{dX(t)}{t} \right| = \left| \int_0^{\omega} \left| \frac{x^{*\prime}(t)}{t} \right| dt \right| \leqq \eta \text{ für } |\omega| \leqq \delta'\left(\frac{\eta}{2}\right)$$

gleichmäßig für alle $s_0$ in $\langle\alpha', \beta'\rangle$, wo $\delta'(\eta)$ die „Konvergenzfunktion“ der Integrale (10, 5) ist.

95. Es werde nun $\sigma$ auf das Intervall $|\sigma| \leqq \delta < \frac{S}{2}$ beschränkt, wo $\delta$ so klein gewählt ist, daß es von mindestens einem Wert der eben genannten Funktion $\delta'(\eta)$ übertroffen wird[81]). Da nun die Kurve ganz im Endlichen verläuft, also einen endlichen Durchmesser $D$ hat, so sind für die Kurve $C$ im Punkte $P(s_0)$ gleichmäßig für alle $s_0$ in $\langle\alpha', \beta'\rangle$, *im Koordinatensystem* $(x^*, y^*)$ *betrachtet*, sämtliche Voraussetzungen des Zusatzes zum Satze 7 erfüllt. Daher gibt es zu jedem Punkte $P(s)$ *erstens* einen Punkt $w^* = a_{s_0} = a$ in $G$ und zwei für alle $s_0$ in $\langle\alpha', \beta'\rangle$ feste positive Konstanten $d$, $M$, so daß der Kreis mit $d$ um $a_{s_0}$ in $G$ liegt, und daß für die durch $\varphi_{s_0}(a') = 0$, $\varphi_{s_0}(0) = 1$ normierte Abbildungsfunktion $z = \varphi_{s_0}(w^*)$ von $G$ auf $|z| < 1$ für alle $w^*$ auf $C$

$$|\varphi'_{s_0}(0)| = \lim_{w^* \to 0} \left| \frac{\varphi_{s_0}(w^*) - \varphi_{s_0}(0)}{w^*} \right| \geqq M > 0$$

für alle $s_0$ in $\langle\alpha', \beta'\rangle$ gilt. *Zweitens* gibt es zu jedem $P(s_0)$ einen Punkt $w^* = a'_{s_0} = a'$ in $G$ und zwei für alle $s_0$ in $\langle\alpha', \beta'\rangle$ feste positive Konstanten $d'$, $M'$, so daß der Kreis mit $d'$ um $a'_{s_0}$ in $G$ liegt, und daß ferner für die durch $\varphi_{s_0}(a') = 0$, $\varphi_{s_0}(0) = 1$ normierte Abbildungsfunktion $z = \varphi_{s_0}(w^*)$ von $G$ auf $|z| < 1$ für alle $w^*$ auf $C$

$$|\varphi'_{s_0}(0)| = \lim_{w^* \to 0} \left| \frac{\varphi_{s_0}(w^*) - \varphi_{s_0}(0)}{w^*} \right| \leqq M'$$

für alle $s_0$ in $\langle\alpha', \beta'\rangle$ gilt[82]). Hieraus folgt nun nach dem Hilfssatz 15

---

[81]) Für den Fall, daß die Integrale (10, 5) gleichmäßig für alle $s$ auf $C$ konvergieren und dieselbe „Konvergensfunktion“ $\delta'(\eta)$ besitzen, wollen wir $\delta$ genauer festlegen. Ist $S \geqq l > 0$, so soll $\delta = \frac{1}{4}\,\mathrm{Min}\,(l, \delta'(1))$ gesetzt werden ($\delta$ hängt also nur von $l$ und der Funktion $\delta'(\eta)$ ab).

[82]) Man beachte, daß die Zahlen $d$, $M$ und $d'$, $M'$ nach dem Zusatz zum Satze 7 nur von der Konstanten $c_1$ in (10, 7), dem Durchmesser $D$ von $C$, von $\delta$ und der Funktion $\delta'(\eta)$ abhängen. Da in dem Falle, daß die Integrale (10, 5) gleichmäßig für alle $s$ auf $C$ konvergieren, die Zahl $\delta$ nach Fußnote [81]) als nur von der unteren Schranke $l$ von $S$ und von der Funktion $\delta'(\eta)$ abhängig gewählt werden kann und soll, *so hängen dann* $d$, $M$, $d'$, $M'$ *nur von* $c_1$, $l$, $D$ *und der Funktion* $\delta'(\eta)$ *ab.*

(10, 6) [83]), sobald wir zeigen, daß man jeden der den Punkten $a_{s_0}$ bzw. $a'_{s_0}$ im $(x, y)$-System entsprechenden Punkte $A_{s_0}$, $A'_{s_0}$ mit dem Punkte $w_0$, für den $\varphi(w) = 0$ ist, durch eine $\varrho$-Kurve in bezug auf $G$ für ein passendes $\varrho > 0$ verbinden kann. Dies folgt aber wegen (10, 7) sofort aus dem Hilfssatz 16. Denn ist $\varrho'$ der Radius einer Kreisscheibe um $w_0$, die ganz in $G$ liegt, und ist $r = \frac{1}{2}\,\mathrm{Min}\,(d, d', \varrho')$, wo $d$ resp. $d'$ die eben genannten unteren Schranken für die Abstände von $a_{s_0}$ resp. $a'_{s_0}$ von $C$ sind, so kann man nach Hilfssatz 16 wegen (10, 7) jeden Punkt $A_{s_0}$ bzw. $A'_{s_0}$ mit $w_0$ durch eine $\varrho$-Kurve mit $\varrho = \frac{r c_1}{2}$ verbinden, wobei $c_1$ die in (10, 7) definierte Konstante ist [84]). —

96. Jetzt beweisen wir die *Stetigkeit* von $\varphi(w)$. Nach dem Satze von Lindelöf in Nr. 64 ist der Tangentenwinkel $\theta^*(\vartheta)$ von $C$ als Funktion des Zentriwinkels $\vartheta$ stetig, und es gilt (bei geeigneter Normierung der Winkel mod $2\pi$)

$$\theta^*(\vartheta) = \arg f'(e^{i\vartheta}) + \vartheta + \frac{\pi}{2}. \tag{10, 9}$$

Weiterhin bemerken wir, daß wegen der Beschränktheit der Ableitung $f'(e^{i\vartheta})$ von $f(e^{i\vartheta})$ [85]) für die Bogenlänge $s$ von $C$ als Funktion des Parameters $\vartheta$ die Relationen gelten

$$s(\vartheta_1) - s(\vartheta_2) = \int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} |f'(e^{i\vartheta})|\, d\vartheta,$$

und fast überall

$$\frac{ds(\vartheta)}{d\vartheta} = |f'(e^{i\vartheta})|, \qquad \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{|f'(e^{i\vartheta})|} = |\varphi'(w(s))|.$$

Schließlich gilt auf dem $c'$ entsprechenden Bogen $\gamma'$ von $|z| = 1$

---

[83]) Nach Hilfssatz 15 dürfen die Konstanten $K_1 = \lambda_1 M$, $K_2 = \lambda_2 M'$ gesetzt werden, wo $\lambda_1$, $\lambda_2$ als nur von dem Durchmesser $D$ von $C$ und dem Radius $\varrho$ der $\varrho$-Kurve in bezug auf $G$ abhängig gewählt werden können, durch die ein jeder Punkt $A_{s_0}$ resp. $A'_{s_0}$ mit $w_0$ verbunden werden kann.

[84]) Da für den Fall, daß die Integrale (10, 5) durchweg auf $C$ gleichmäßig konvergieren, die Zahlen $d$, $d'$, wie in Fußnote [82]) gesagt, nur von $D$, der unteren Schranke $l$ von $S$, $c_1$ und der Funktion $\delta'(\eta)$ abhängig sind, so folgt hieraus, daß auch $\varrho$ nur von $D$, $l$, $c_1$, der Funktion $\delta'(\eta)$ und $\varrho'$ abhängt. Da aber auch $M$, $M'$ (nach Fußnote [82])) und $\lambda_1$, $\lambda_2$ (nach Fußnote [83])) nur von diesen Größen abhängen, erhalten wir in diesem Falle das Resultat: *Konvergieren die Integrale* (10, 5) *gleichmäßig für alle $s$ auf $C$, so gilt die Relation* (10, 6) *für alle $w$ auf $C$ mit den nur von $D$, $l$, $c_1$, $\varrho'$ und der Funktion $\delta'(\eta)$ abhängigen Konstanten $K_1 = \lambda_1 M$, $K_2 = \lambda_2 M'$, wobei $D$ der Durchmesser von $C$, $l$ eine untere Schranke für die Gesamtlänge $S$ von $C$, $c_1$ die in* (10, 7) *definierte Konstante und $\varrho'$ der Radius einer ganz in $G$ liegenden Kreisscheibe mit dem Mittelpunkte $w_0$ ($\varphi(w_0) = 0$) ist.*

[85]) H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration, 2. éd., pp. 62 ff.

$(\vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2,\ |z| = 1)$ wegen (10, 6)

$$\frac{1}{K_2} \leqq \frac{ds(\vartheta)}{d\vartheta} \leqq \frac{1}{K_1}, \tag{10,10}$$

$$\left| \frac{s(\vartheta) - s(\vartheta')}{\vartheta - \vartheta'} \right| \leqq \frac{1}{|\vartheta - \vartheta'|} \left| \int_{\vartheta'}^{\vartheta} \frac{ds}{d\vartheta}\, d\vartheta \right| \leqq \frac{1}{K_1}. \tag{10,11}$$

Nach einem (oben mehrfach benutzten) Satze von Fatou[86]) hat nun die zu $-\arg f'(z)$ konjugierte Potentialfunktion $\lg |f'(z)|$ an der Stelle $\vartheta$ dann und nur dann einen Randwert bei radialer Annäherung, wenn das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\arg f'(e^{i(\vartheta+t)}) - \arg f'(e^{i(\vartheta-t)})}{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}\, dt \tag{10,12}$$

existiert, und dieser Randwert ist bis auf eine feste additive Konstante $(K = \log |f'(0)|)$ durch das Integral (10, 12) gegeben. Existiert insbesondere dieses Integral für $\vartheta_1 < \tau_1 \leqq \vartheta \leqq \tau_2 < \vartheta_2$ gleichmäßig, so sind die Randwerte $\lg |f'(e^{i\vartheta})|$ auf diesem abgeschlossenen Bogen $\tau_1 \leqq \vartheta \leqq \tau_2$ (gleichmäßig) stetig. Wenn wir also die gleichmäßige Konvergenz des Integrals (10, 12) nachweisen, so ist damit die Stetigkeit von $f'(z)$ auf diesem Bogen und somit die von $\varphi'(w)$ auf dem entsprechenden Bogen von $C$ dargetan. Um dies aber zu beweisen, genügt es, die gleichmäßige Konvergenz der Integrale

$$\int_0^{\omega'} \left| \frac{\arg f'(e^{i(\vartheta+t)}) - \arg f'(e^{i\vartheta})}{t} \right| dt, \quad \int_0^{\omega'} \left| \frac{\arg f'(e^{i(\vartheta-t)}) - \arg f'(e^{i\vartheta})}{t} \right| dt \tag{10,13}$$

nachzuweisen. Nun beachte man, daß es nach der Voraussetzung zu jedem $\eta > 0$ ein $\beta > 0$ gibt[87]), so daß gleichmäßig für alle $s_0$ in $\langle \alpha', \beta' \rangle$

---

[86]) P. Fatou, loc. cit. S. 360.

[87]) Da nämlich, $\theta(s_0 + \sigma) = \theta$, $\theta(s_0) = \theta_0$ gesetzt,

$$\begin{aligned} \sin(\theta - \theta_0) &= \sin\theta \cdot \cos\theta_0 - \cos\theta \cdot \sin\theta_0 \\ &= \sin\theta \cdot \cos\theta_0 - \sin\theta_0 \cdot \cos\theta_0 - \cos\theta \cdot \sin\theta_0 + \sin\theta_0 \cdot \cos\theta_0, \end{aligned}$$

also

$$|\sin(\theta - \theta_0)| \leqq |\cos\theta_0|\,|\sin\theta - \sin\theta_0| + |\sin\theta_0|\,|\cos\theta - \cos\theta_0| \tag{a}$$

ist, ist für $|\theta - \theta_0| < \frac{\pi}{2}$, $|\sin(\theta - \theta_0)| < 1$, also sicher für hinreichend kleines $|\sigma|$ wegen

$$|\theta - \theta_0| \leqq \frac{\pi}{2} \sin|\theta - \theta_0|, \quad |\theta - \theta_0| \leqq \frac{\pi}{2}[|x'(s_0 + \sigma) - x'(s_0)| + |y'(s_0 + \sigma) - y'(s_0)|].$$

Hieraus folgt nun die im Text aufgestellte Behauptung. —

Wir knüpfen an die Ungleichung (a) noch eine weitere Bemerkung, die uns weiter unten (beim Beweise des Zusatzes 2 vom Satze 10) nützlich sein wird. *Ist die „Stetigkeitsfunktion" von* $x'(s)$, $y'(s)$: $\delta(\varepsilon)$, d. h. gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon)$,

(Fortsetzung der Fußnote [87]) auf nächster Seite.)

(10, 14) $$\int_0^{\omega} \left| \frac{\theta(s_0 \pm \sigma) - \theta(s_0)}{\sigma} \right| d\sigma \leqq \eta \qquad (\omega > 0)$$

gilt, sobald $\omega \leqq \beta$ ist. Nach (10, 9) ist $(0 < t_1 < t_2)$

(10, 15) $$\int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\arg f'(e^{i(\vartheta+t)}) - \arg f'(e^{i\vartheta})}{t} \right| dt \leqq \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\theta^*(\vartheta+t) - \theta^*(\vartheta)}{t} \right| dt + \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{(\vartheta+t) - \vartheta}{t} \right| dt.$$

Da nun für $\tau_1 \leqq \vartheta \leqq \tau_2$ $(0 < t_1 < t_2 < \vartheta_2 - \tau_2)$ [88])

$$\int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\theta^*(\vartheta+t) - \theta^*(\vartheta)}{t} \right| dt = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left| \frac{\theta(s+\sigma) - \theta(s)}{\sigma} \right| \frac{\sigma}{t} \frac{dt}{ds}(s+\sigma)\, d\sigma,$$

und dieses wegen (10, 10), (10, 11), sowie wegen $0 < \sigma_1 < \sigma_2$

$$\leqq \frac{K_2}{K_1} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left| \frac{\theta(s+\sigma) - \theta(s)}{\sigma} \right| d\sigma \leqq \frac{K_2}{K_1} \int_0^{\sigma_2} \left| \frac{\theta(s+\sigma) - \theta(s)}{\sigma} \right| d\sigma$$ [89])

---

so daß für alle reellen $s$ und $s_0$ mit $|s - s_0| \leqq \delta(\varepsilon)$

$$|x'(s) - x'(s_0)| \leqq \varepsilon, \qquad |y'(s) - y'(s_0)| \leqq \varepsilon$$

gilt, so folgt aus (a) für $\varepsilon < \frac{1}{2}$, daß

(b) $$|\sin(\theta - \theta_0)| \leqq 2\varepsilon < 1$$

ist. Hieraus ergibt sich weiter, da ja (b) für *alle* $s$ mit $0 \leqq |s - s_0| - |\sigma| \leqq \delta(\varepsilon)$ gilt und $\theta(s)$ stetig ist und für $s \to s_0$ in $\theta(s_0)$ übergeht, daß auch für alle $|s - s_0| \leqq \delta(\varepsilon)$

$$|\theta - \theta_0| \leqq 2\varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} = \varepsilon\pi$$

ist, *und also*

$$|\theta(s) - \theta(s_0)| \leqq \varepsilon \quad \textit{für} \quad |s - s_0| \leqq \delta\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right), \qquad \varepsilon < \frac{\pi}{2},$$

*ist.* Somit ist auch *für den Fall, daß die Integrale* (10, 5) *gleichmäßig für alle* $s$ *auf* $C$ *konvergieren, für alle reellen* $s_0$ *das Integral*

(c) $$\left| \int_0^{\alpha} \left| \frac{\theta(s_0+t) - \theta(s_0)}{t} \right| dt \right| \leqq \eta$$

*für* $|\alpha| \leqq \beta(\eta) = \operatorname{Min}\left(\delta'\left(\frac{\eta}{\pi}\right), \delta\left(\frac{1}{4}\right)\right)$, *so daß die „Konvergenzfunktion" des Integrals in* (c) *nur von den Funktionen* $\delta'(\eta)$ *und* $\delta(\varepsilon)$ *abhängt.*

[88]) Für die Rechtfertigung der Variablentransformation vergleiche etwa Hobson, The theorie of functions of a real variable, Cambridge 1907, p. 410 f.

[89]) *Die „Konvergenzfunktion"* $\delta''(\eta)$ *des Integrals*

$$\int_0^{\alpha} \left| \frac{\arg f'(e^{i(\vartheta \pm \tau)}) - \arg f'(e^{i\vartheta})}{\tau} \right| d\tau \qquad (\vartheta \textit{ beliebig, reell})$$

*darf also* $= \beta\left(\frac{K_2}{K_1}\eta\right)$ *gesetzt werden, wo* $\beta(\eta)$ die am Schlusse der Fußnote [87]) angegebene Funktion ist, und *nur von der „Stetigkeitsfunktion"* $\delta(\varepsilon)$ *von* $x'(s)$ *und* $y'(s)$ *und der „Konvergenzfunktion"* $\delta'(\eta)$ *der Integrale* (10, 5) *abhängt.*

ist, so folgt hieraus mit Rücksicht auf (10, 14) und (10, 15) die gleichmäßige Konvergenz des ersten der Integrale (10, 14) für $\tau_1 \leqq \vartheta \leqq \tau_2$. Die des zweiten ergibt sich ganz analog. — Damit ist der Satz 10 bewiesen. —

97. Wir formulieren nun noch das in der Fußnote [84]) gewonnene Ergebnis besonders als

Zusatz 1 zum Satze 10. *Es sei $C$ eine geschlossene durchweg mit stetiger Tangente versehene Jordankurve, die unter Zugrundelegung der Bogenlänge $s$ als Parameter durch die Gleichungen* (10, 4) *dargestellt sein möge, und es sei insbesondere:*

1. *Der Durchmesser von $C$ $\leqq D$ und die Gesamtlänge $S$ von $C \geqq l > 0$.*

2. *Ist $r(P_1, P_2)$ der geradlinige Abstand zweier Punkte $P_1$ und $P_2$ auf $C$, $\sigma(P_1, P_2)$ die Länge des sie verbindenden (nicht größeren) Bogens von $C$, so gelte*

$$\frac{r(P_1, P_2)}{\sigma(P_1, P_2)} \geqq c_1 > 0.$$

3. *Die Integrale*

$$(10,5) \qquad \int_0^{\varepsilon} \left| \frac{x'(s \pm \sigma) - x'(s)}{\sigma} \right| d\sigma, \quad \int_0^{\varepsilon} \left| \frac{y'(s \pm \sigma) - y'(s)}{\sigma} \right| d\sigma \qquad (\varepsilon > 0)$$

*mögen für alle reellen Werte von $s$ existieren und sie mögen durchweg die „Konvergenzfunktion" $\delta'(\eta)$ besitzen, d. h. sie mögen absolut $\leqq \eta$ für $\varepsilon \leqq \delta'(\eta)$ sein.*

*$w = f(z)$ bilde dann $|z| < 1$ so auf das Innere $G$ von $C$ ab, daß $z = 0$ in einen Punkt $w = w_0$ übergeht, der mitsamt einer vollen Kreisscheibe mit dem Radius $\varrho$ um $w_0$ ganz in $G$ liegt. Dann ist $f'(z)$ in $|z| \leqq 1$ stetig, und es gibt zwei positive nur von $c_1$, $l$, $D$ und $\varrho$, sowie der Funktion $\delta'(\eta)$ abhängige Konstanten $\mu_1$ und $\mu_2$, so daß für $|z| = 1$ und daher für alle $|z| \leqq 1$*

$$(10,16) \qquad 0 < \mu_1 \leqq |f'(z)| \leqq \mu_2$$

*ist.*

98. Wir heben nun noch den folgenden weiteren Zusatz zum Satze 10 hervor.

Zusatz 2 zum Satze 10. *Ist außer den in Zusatz 1 genannten Eigenschaften der Kurve $C$ noch bekannt, daß für jedes $\varepsilon > 0$*

$$(10,17) \quad |x'(s_1) - x'(s_2)| \leqq \varepsilon, \quad |y'(s_1) - y'(s_2)| \leqq \varepsilon \text{ für } |s_1 - s_2| \leqq \delta(\varepsilon)$$

*gleichmäßig für alle reellen $s_1$ und $s_2$ ist, so gibt es auch zu jedem $\varepsilon > 0$ ein nur von $D$, $l$, $c_1$, $\varrho$ und den Funktionen $\delta(\varepsilon)$, $\delta'(\eta)$ abhängiges $\delta_1(\varepsilon)$, so daß für die Ableitung der im Zusatz 1 eingeführten Funktion $w = f(z)$ gilt:*

$$|f'(z_1) - f'(z_2)| \leqq \varepsilon \text{ für } |z_1 - z_2| \leqq \delta_1(\varepsilon), \quad |z_1| = |z_2| = 1.$$

Beweis. Es sei $\theta(s)$ der Tangentenwinkel von $C$ als Funktion der Bogenlänge $s$, $s = s(\vartheta)$ vermittele den Zusammenhang zwischen dem Zentriwinkel in der $z$-Ebene und der Bogenlänge $s$ von $C$. Dann folgt aus der Voraussetzung (10, 17), daß auch

$$|\theta(s_1) - \theta(s_2)| \leqq \varepsilon \quad \left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\right) \text{ für } |s_1 - s_2| \leqq \bar{\delta}(\varepsilon) = \delta\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)$$ [90])

gilt. Nun ist bei geeigneter Normierung von $\theta(s(\vartheta)) = \theta^*(\vartheta)$

$$\theta^*(\vartheta) = \theta(s(\vartheta)) = \arg f'(e^{i\vartheta}) + \vartheta + \frac{\pi}{2}.$$

Da nach dem Zusatz 1 zum Satze 10 $0 < \mu_1 \leqq |f'(e^{i\vartheta})| \leqq \mu_2$ ist, ist auch

$$|s_1 - s_2| = |s(\vartheta_1) - s(\vartheta_2)| \leqq \mu_2 |\vartheta_1 - \vartheta_2|.$$

Daher ist für $|\vartheta_1 - \vartheta_2| \leqq \bar{\bar{\delta}}(\varepsilon) = \operatorname{Min}\left(\frac{\bar{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\mu_2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$

$$|\arg f'(e^{i\vartheta_1}) - \arg f'(e^{i\vartheta_2})| \leqq \varepsilon.$$

Hieraus werden wir herleiten: Die zu $-\arg f'(z)$ konjugierte Potentialfunktion $\lg|f'(z)|$ hat für $|z| = 1$ durchweg stetige Randwerte $\lg|f'(e^{i\vartheta})|$, und zwar gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein nur von $D$, $c_1$, $l$, $\varrho$ und den Funktionen $\delta(\varepsilon)$ und $\delta'(\eta)$ abhängiges $\delta_2(\varepsilon)$, derart, daß

$$\left|\lg|f'(e^{i\vartheta_1})| - \lg|f'(e^{i\vartheta_2})|\right| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad |\vartheta_1 - \vartheta_2| \leqq \delta_2(\varepsilon)$$

für alle reellen $\vartheta_1$, $\vartheta_2$, die dieser Bedingung genügen, ist.

Hieraus ergibt sich dann sofort in Verbindung mit dem über $\arg f'(e^{i\vartheta})$ Gesagten wegen

$$|f'(z_1) - f'(z_2)| = |e^{\lg f'(z_1)} - e^{\lg f'(z_2)}| = |e^{\lg f'(z_2)}| \cdot |e^{\lg f'(z_1) - \lg f'(z_2)} - 1|$$
$$\leqq |f'(z_2)| \cdot [e^{|\lg f'(z_1) - \lg f'(z_2)|} - 1]$$ [91]), $\quad |z_1| = |z_2| = 1,$

und wegen $|f'(z)| \leqq \mu_2$ die Richtigkeit der Behauptung des Zusatzes 2.

99. Die Behauptung über die Randwerte von $\lg|f'(z)|$ ergibt sich nun aus der Fatouschen Darstellung dieser Randwerte durch das in unserem Falle sicher für alle reellen $\vartheta$ gleichmäßig konvergente Integral (s. die Fußnote [86]))

$$\lg|f'(e^{i\vartheta})| - \lg|f'(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\arg f'(e^{i(\vartheta+\tau)}) - \arg f'(e^{i(\vartheta-\tau)})}{\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}}\, d\tau,$$

---

[90]) Vgl. die Fußnote [87]).

[91]) Man beachte, daß für beliebiges (komplexes) $a$

$$|e^a - 1| = \left|\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a^\nu}{\nu!}\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|a|^\nu}{\nu!} = e^{|a|} - 1$$

ist.

und zwar stützt sich der Beweis nur auf die beiden folgenden Tatsachen: 1. Auf die eben gemachte Bemerkung über die Stetigkeitsfunktion von $\arg f'(e^{i\vartheta})$ und 2. auf die Bemerkung in der Fußnote [89]), nach der es eine Konvergenzfunktion des Integrals

$$\int_0^{\omega} \left| \frac{\arg f'(e^{i(\vartheta+\tau)}) - \arg f'(e^{i\vartheta})}{\tau} \right| d\tau$$

gibt, die, abgesehen von ihrem Argument, nur von $\mu_1$, $\mu_2$, der Funktion $\delta(\varepsilon)$ und der Konvergenzfunktion $\delta'(\eta)$ der Integrale $(10,5)$, also auch nach Zusatz 1 zum Satze 10 nur von $D$, $c_1$, $l$, $\varrho$ und den Funktionen $\delta(\varepsilon)$ und $\delta'(\eta)$ abhängt. Es gilt nämlich allgemein die

Bemerkung. *Ist $g(\vartheta)$ für alle reellen $\vartheta$ stetig, d. h. ist für jedes $\varepsilon > 0$*

$$|g(\vartheta_1) - g(\vartheta_2)| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad |\vartheta_1 - \vartheta_2| \leqq \beta(\varepsilon),$$

*ist ferner*

$$(10,18) \qquad \int_0^{\omega} \left| \frac{g(\vartheta \pm t) - g(\vartheta)}{t} \right| dt, \quad \omega > 0,$$

*gleichmäßig für alle reellen $\vartheta$ konvergent, und ist $\beta'(\eta)$ eine Konvergenzfunktion von $(10,18)$, so ist auch*

$$h(\vartheta) = \int_0^{\pi} \frac{g(\vartheta+t) - g(\vartheta-t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\, dt + \text{konst.}$$

*stetig und $h(\vartheta)$ hat eine nur von den Funktionen $\beta(\varepsilon)$, $\beta'(\eta)$ abhängige Stetigkeitsfunktion $\beta^*(\varepsilon)$.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, und es sei $\omega_1$ eine positive Zahl $< \beta'\left(\frac{\varepsilon}{16}\right)$. Wir bilden dann die Differenz

$$(10,19) \quad h(\vartheta_1) - h(\vartheta_2) = \int_0^{\pi} \frac{g(\vartheta_1+t) - g(\vartheta_1-t) - g(\vartheta_2+t) + g(\vartheta_2-t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\, dt$$

und zerlegen in dem Integral in $(10,19)$ die Integrationsstrecke $0 \ldots \pi$ in die beiden Teile $0 \ldots \omega_1$ und $\omega_1 \ldots \pi$:

$$(10,20) \qquad \int_0^{\pi} = \int_0^{\omega_1} + \int_{\omega_1}^{\pi}.$$

Dann sind die Integrale $(\nu = 1, 2)$

$$\int_0^{\omega_1} \left| \frac{g(\vartheta_\nu+t) - g(\vartheta_\nu-t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} \right| dt \leqq \int_0^{\omega_1} \left| \frac{g(\vartheta_\nu+t) - g(\vartheta_\nu)}{\frac{t}{2}} \right| dt + \int_0^{\omega_1} \left| \frac{g(\vartheta_\nu-t) - g(\vartheta_\nu)}{\frac{t}{2}} \right| dt \leqq 2\,\frac{2\cdot\varepsilon}{16} =$$

Daher liefert das erste Integral in (10, 20) absolut genommen höchstens den Beitrag $\frac{\varepsilon}{2}$. Nunmehr denken wir uns $\omega_1$ festgehalten und wählen $|\vartheta_1 - \vartheta_2| \leqq \beta\left(\frac{\varepsilon\,\omega_1}{8\pi}\right)$. Dann wird auch für $t \geqq \omega_1$

$$\left|\frac{g(\vartheta_1 \pm t) - g(\vartheta_2 \pm t)}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\right| \leqq \left|\frac{g(\vartheta_1 \pm t) - g(\vartheta_2 \pm t)}{\frac{t}{2}}\right| \leqq \frac{2}{\omega_1} \cdot \frac{\varepsilon\,\omega_1}{8\pi} = \frac{\varepsilon}{4\pi}$$

und daher auch das zweite Integral in (10, 20) sicher $\leqq \frac{\varepsilon}{2}$. Wir können somit $\beta^*(\varepsilon) = \beta\left(\frac{\varepsilon\,\omega_1}{8\pi}\right)$ setzen, wo $\omega_1$ nur von $\varepsilon$ und der Funktion $\beta'(\eta)$ abhängt.

## § 11.

## Kurven mit stetiger Tangente: Lipschitzbedingung für die Tangente.

100. Wir betrachten nunmehr Kurven $C$, mit einer Ecke der Öffnung $\pi\tau$ $0 < \tau \leqq 2$, in einem ihrer Punkte, die von zwei Kurvenästen mit stetiger Tangente gebildet wird. Man kann bei diesen Kurven auch nach einer Bedingung für den Tangentenwinkel als Funktion der Bogenlänge in der Umgebung der Ecke fragen, die hinreichend für eine konforme Ecke in diesem Punkte $P_0$ ist. Aus dem Satze 7 können wir eine für die *Größenordnung* der Änderung des Tangentenwinkels notwendige und hinreichende Bedingung folgern. Wir charakterisieren sie, ganz entsprechend wie bei der allgemeineren Fragestellung des Satzes 7, durch die Angabe einer Lipschitzschen Bedingung, und zwar folgendermaßen: Bildet die (im Sinne wachsender Bogenlänge gerichtete) Tangente in $P$ mit der positiven reellen Achse den Winkel $\theta = \theta(s)$, wobei $s$ die von $P$ aus gezählte Bogenlänge bedeutet $(-\delta \leqq s \leqq \delta)$, und haben die Halbtangenten in $P$ die Richtungswinkel $\theta_+$ und $\theta_-$, so möge

$$(11,1) \qquad \underset{(0 < s \leqq \delta)}{|\theta(s) - \theta_+| \leqq \omega(s)}, \qquad \underset{(0 > s \geqq -\delta)}{|\theta(s) - \theta_-| \leqq \omega(|s|)}$$

sein, wo $\omega(\sigma)$ eine für $\sigma \downarrow 0$ monoton nach 0 abnehmende stetige Funktion von $\sigma$ ist, $0 < \sigma \leqq \delta$. Wir bezeichnen $\omega(|s|)$ als den *Lipschitzschen Modul* von $\theta(s)$ in $s = 0$. Wir fassen alle geschlossenen Jordankurven, deren Tangentenwinkel $\theta(s)$ als Funktion der Bogenlänge $s$ in einer von zwei Kurvenästen mit stetiger Tangente gebildeten Ecke $P_0$ $(s = 0)$ für hinreichend kleine $\delta$ der Lipschitzschen Bedingung (11, 1) genügen, zu einer Klasse $L(\omega(\sigma))$ zusammen.

Satz 11. *Hinreichend und notwendig dafür, daß alle Kurven der Klassen $L(\omega(\sigma))$ in dem betrachteten Punkte $P_0$ eine konforme Ecke*

*besitzen, ist, daß das Integral*

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma}\, d\sigma, \quad \varepsilon > 0,$$

*konvergiert.*

101. Vorbemerkung. Die Bedingung dieses Satzes ist invariant gegenüber einer Transformation der Form $w^* - w_1^* = (w - w_1)^\alpha$, d. h. nach Ausführung dieser Transformation geht die Kurve $C$ in eine Kurve $C^*$ über mit einer Ecke $\pi\tau\cdot\alpha$, in $w^* = w_1^*$, und es gibt gleichfalls eine Funktion $\omega^* = \omega^*(|s^*|)$ der Bogenlänge $s^*$ der transformierten Kurve, so daß der Tangentenwinkel $\theta^* = \theta^*(s^*)$ von $C^*$ in der Umgebung von $w^* = w_1^*$ der Bedingung genügt ($\theta_+^* = \lim_{s^* \searrow 0} \theta^*(s^*)$, $\theta_-^* = \lim_{s^* \nearrow 0} \theta^*(s^*)$):

$$|\theta^*(s^*) - \theta_\pm^*| \leqq \omega^*(|s^*|),$$

und das Integral

$$\int_0^{\delta_1^*} \frac{\omega^*(\sigma)}{\sigma}\, d\sigma \quad \text{gleichzeitig mit} \quad \int_0^{\delta_1} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma}\, d\sigma$$

konvergiert und divergiert. Wir berechnen zuerst den Winkel $\theta^*(s^*)$, in den $\theta(s)$ durch die obige Transformation übergeht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $w_1 = 0$, $w_1^* = 0$. Dann ist für $w^*$ auf $C^*$, wenn $w = Re^{i\beta} = x(s) + iy(s)$ gesetzt wird,

$$(11,2) \qquad \frac{dw^*}{ds} = \alpha w^{\alpha-1} \frac{dw}{ds} = \alpha R^{\alpha-1} e^{i\beta(\alpha-1)}(x'(s) + iy'(s)) = \alpha R^{\alpha-1} e^{i(\beta(\alpha-1)+\theta)}.$$

Beachtet man nun, daß ($w^* = x^* + iy^*$ gesetzt)

$$(11,3) \qquad \frac{ds^*}{ds} = \sqrt{x^{*\prime 2}(s) + y^{*\prime 2}(s)} = \left|\frac{dw^*}{ds}\right| = \alpha R^{\alpha-1}, \qquad s^* = \int_0^s \frac{ds^*}{ds}\, ds,$$

ist, so findet man aus (11,2) und (11,3)

$$\frac{dw^*}{ds^*} = \frac{dw^*}{ds}\frac{ds}{ds^*} = e^{i(\beta(\alpha-1)+\theta)}.$$

Hieraus folgt, daß (bei geeigneter Normierung der Winkel) der Tangentenwinkel des transformierten Kurvenastes

$$\theta^*(s^*) = \beta(\alpha-1) + \theta(s), \qquad s^* = \int_0^s \frac{ds^*}{ds}\, ds,$$

ist. Dann gilt für $s^* > 0$, $s > 0$ (man beachte, daß wegen (11,3) sgn $s^*$ = sign $s$ ist)

$$|\theta^*(s^*) - \theta_+^*| = |(\alpha-1)\beta + \theta - (\alpha-1)\theta_+ - \theta_+| \leqq |\alpha-1|\,|\beta-\theta_+| + |\theta-\theta_+|.$$

Nun ist nach dem Satze von Rolle $\beta$ gleich einem Werte von $\theta(s)$ an einer zwischen 0 und $s$ gelegenen Stelle $\gamma s$, $0 < \gamma < 1$: $\beta = \Theta(\gamma s)$, also

$$|\theta^*(s^*) - \theta_+^*| \leqq |\alpha - 1| \cdot \omega(|\gamma s|) + \omega(|s|),$$

und dies ist wegen der Monotonie von $\omega(|s|)$

$$\leqq |\alpha - 1|\, \omega(|s|) + \omega(|s|) = (|\alpha - 1| + 1)\, \omega(|s|).$$

Nun ist aber wegen (11,3) $|s^*| \sim |s|^\alpha$, also ist für hinreichend kleines $|s|$:

$$|s^*| \geqq \left(\frac{s}{2}\right)^\alpha.$$

Daher ist wegen der Monotonie von $\omega(|s|)$

$$|\theta^*(s^*) - \theta_+^*| \leqq (|\alpha - 1| + 1)\, \omega\left(2\,|s^*|^{\frac{1}{\alpha}}\right) = \omega^*(|s^*|),$$

wo $\int_0^{\delta_1^*} \frac{\omega^*(\sigma)}{\sigma}\, d\sigma$ gleichzeitig mit $\int_0^{\delta_1} \frac{\omega(t)}{t}\, dt$ konvergiert. Denn setzt man $u = 2\,\sigma^{\frac{1}{\alpha}}$, so wird

$$\int_{\delta_2^*}^{\delta_1^*} \frac{\omega^*(\sigma)}{\sigma}\, d\sigma = \int_{\delta_2^*}^{\delta_1^*} \frac{\omega\left(2\,\sigma^{\frac{1}{\alpha}}\right)(|\alpha - 1| + 1)}{\sigma}\, d\sigma = \int_{\delta_2}^{\delta_1} \frac{\omega(u)(|\alpha - 1| + 1)}{u^\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha} \cdot \frac{d\sigma}{du}\, du$$

$$= 2^\alpha \cdot (|\alpha - 1| + 1) \cdot \int_{\delta_2}^{\delta_1} \frac{\omega(u)}{u^\alpha} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \cdot \alpha \cdot u^{\alpha - 1}\, du = (|\alpha - 1| + 1)\, \alpha \int_{\delta_2}^{\delta_1} \frac{\omega(u)}{u}\, du.$$

102. Der Beweis des Satzes 11 ergibt sich unmittelbar aus dem Satze 9 und dem Satze 8. Daß die Bedingung des Satzes *hinreichend* ist, folgt sofort aus dem Satze 9, da offenbar seine Voraussetzungen hier erfüllt sind. Um zu beweisen, daß sie *notwendig* ist, konstruieren wir auf eine einfache Weise zu einer beliebig vorgegebenen Funktion $\omega(\sigma)$, $0 < \sigma \leqq \delta$, $\delta > 0$, die mit $\sigma \downarrow 0$ selbst monoton gegen 0 abnimmt, und für die das Integral $\int_0^\delta \frac{\omega(\sigma)}{\sigma}\, d\sigma$ divergiert, eine geschlossene Jordankurve $\Gamma$ mit den folgenden Eigenschaften: 1. $\Gamma$ besitzt in einem ihrer Punkte $P$ eine von zwei Kurvenästen mit stetiger Tangente gebildete Ecke von vorgeschriebener Öffnung $\pi\tau$, $0 < \tau \leqq 2$. 2. Für den Tangentenwinkel $\theta(s)$ als Funktion der (von $P$ aus in der einen Durchlaufungsrichtung positiv, in der entgegengesetzten negativ gerechneten) Bogenlänge $s$ gelten die Relationen

$$(11,4) \qquad \underset{s>0}{|\theta(s) - \theta_+| = \omega(s)}, \qquad \underset{s<0}{|\theta(s) - \theta_-| = \omega(|s|)},$$

unter $\theta_+$, $\theta_-$ wie oben die Winkel verstanden, welche die Halbtangenten in $P$ mit der positiven reellen Achse einschließen. 3. $\Gamma$ hat in $P$ sicher keine konforme Ecke. Wir verfahren bei dieser Konstruktion folgendermaßen: Wir ziehen durch $w=0$ zwei Strahlen $s_1$ und $s_2$, die mit der positiven reellen Achse die Winkel $\tau\frac{\pi}{2}$ resp. $-\tau\frac{\pi}{2}$ bilden, und senkrecht zu $s_1$ die Gerade $g_1$, senkrecht zu $s_2$ die Gerade $g_2$. Wir fassen $s_1$ als die positive $\eta$-Achse und $g_1$ als die zugehörige $\xi$-Achse eines üblichen rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems $(\xi, \eta)$ und analog $s_2$ und und $g_2$ als die entsprechenden $+\eta$- bzw. $\xi$-Achsen eines zweiten derartigen Koordinatensystems auf. Dann betrachten wir den für hinreichend kleine $s \geqq 0$ sicher doppelpunktfreien Kurvenbogen

$$(11,5) \qquad \xi(s)=\int_0^s \sin\omega(\sigma)\,d\sigma, \qquad \eta(s)=\int_0^s \cos\omega(\sigma)\,d\sigma$$

in bezug auf ein jedes dieser Koordinatensysteme und erhalten so zwei in $w=0$ zusammenstoßende Kurvenbögen, welche die Strahlen $s_1$ bzw. $s_2$ (die entsprechenden $+\eta$-Achsen) in diesem Punkte zu Halbtangenten besitzen und somit dort eine Ecke der Öffnung $\pi\tau$ bilden. Wegen der Monotonie von $\omega(\sigma)$ liegt ferner ein jeder dieser beiden Kurvenbögen *ganz auf einer Seite* der entsprechenden Achse, und zwar — wegen unserer Normierung der $+\eta$-Achse — ganz im Innern des Winkelraumes $(s_1, s_2)$ der Öffnung $\pi\tau$. Ergänzen wir nun diese Bögen durch einen die (nicht gemeinsamen) Endpunkte verbindenden Jordanbogen zu einer geschlossenen Jordankurve $\Gamma$, so ist $\Gamma$ bereits die Kurve mit den angegebenen Eigenschaften. Denn daß der Tangentenwinkel in der Umgebung des Nullpunktes als Funktion der Bogenlänge $s$ der Bedingung (11, 4) genügt, folgt sofort aus (11, 5). Daß aber $\Gamma$ in $w=0$ keine konforme Ecke besitzen kann, ist eine Folgerung aus dem Satze 8. Sonst wäre nämlich, wenn der Kreis $|z|=|re^{i\vartheta}|<1$ auf das Innere von $\Gamma$ so abgebildet wird, daß $z=1$ in $w=0$ übergeht, $t'=|\vartheta|^\tau \operatorname{sgn}\vartheta$ ein metrischer Parameter von $\Gamma$ in bezug auf $w=0$ (Nr. 17), und es müßte das mit der Abszisse $\xi_1(t')$ von $\Gamma$ als Funktion von $t'$ gebildete Integral $\int_0^{\delta_1}\frac{\xi_1(t')}{t'^2}\,dt'$ konvergieren. Dann müßte aber nach der Vorbemerkung 1 zum Satze 7 auch das Integral $\int_0^{\delta}\frac{\xi(s)}{s^2}\,ds$ und damit auch wegen $\left|\frac{\xi(s)}{s}\right|\leqq 1$ und

$$\int_\varepsilon^\delta \frac{\xi(s)}{s^2}\,d\sigma=\left(-\xi(s)\,\frac{1}{s}\right)_\varepsilon^\delta+\int_\varepsilon^\delta \frac{\sin\omega(\sigma)}{\sigma}\,d\sigma$$

das Integral $\int_0^\delta \frac{\omega(s)}{\sigma}\, d\sigma$ konvergieren, da ja die Bogenlänge $s$ wegen der Stetigkeit der Tangente von $\Gamma$ in der Umgebung des Punktes $w = 0$ sicher ein metrischer Parameter ist. Dies aber widerspricht der Voraussetzung. —

103. Wir machen noch zu dem Satze 11 den folgenden

Zusatz. *Es möge $C$ längs des Teilbogens $c$ eine sich stetig drehende Tangente besitzen, und der Tangentenwinkel $\theta(s)$ genüge auf einem festen inneren Bogen $c'$ von $c$ gleichmäßig einer Lipschitzschen Bedingung, d. h. es möge*

$$|\theta(s) - \theta(s_0)| \leqq \omega(|s - s_0|)$$

*sein. Dann ist die Ableitung $\varphi'(w)$ der Abbildungsfunktion $z = \varphi(w)$ des Inneren von $C$ auf $|z| < 1$ auf dem Bogen $c'$ gleichmäßig stetig, falls das Integral*

$$\int_0^\delta \frac{\omega(\sigma)}{\sigma}\, d\sigma$$

*existiert.*

Der Beweis dieses Zusatzes ergibt sich unmittelbar aus dem Satze 10, da offenbar seine Voraussetzungen erfüllt sind. —

104. Man kann nun insbesondere, indem man spezielle Funktionen für $\omega(|s - s_0|)$ einsetzt, Kriterien für die Existenz einer konformen Ecke bzw. für die Stetigkeit von $\varphi'(w)$ und $f'(z)$ am Rande herleiten. So kann man z. B. $\omega(\sigma) = K\sigma^\alpha$, $\alpha > 0$, setzen; das mit dieser Funktion gebildete Integral $\int_0^{\delta_1} \frac{\omega(\sigma)}{\sigma}\, d\sigma = K\int_0^{\delta_1} \sigma^{\alpha-1}\, d\sigma$ konvergiert. Für den Fall, daß $C$ längs eines Bogens $c$ eine sich stetig drehende Tangente besitzt und der Tangentenwinkel $\theta(s)$ dort gleichmäßig in $s$ auf $c$ einer solchen Lipschitzschen Bedingung genügt, also

$$(11,6)\quad |\theta(s) - \theta(s_0)| \leqq K|s - s_0|^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad K > 0, \text{ fest},$$

ist, erhalten wir den *Satz von Kellogg*[92]. Wir beweisen zugleich etwas mehr:

Satz 12. *$C$ besitze längs des Bogens $c$ eine sich stetig drehende Tangente. $z = \varphi(w)$ bilde das Innere von $C$ auf $|z| < 1$ ab. Es sei $c'$ ein innerer Teilbogen von $c$. Bei dieser Abbildung entspricht $c'$ einem Bogen $\gamma'$ der Peripherie des Einheitskreises.*

---

[92]) Kellogg, Harmonic functions and Greens integral, Transactions of the Am. Mathemat. Society **13** (1912), pp. 109—132.

*Notwendig und hinreichend dafür, daß $\varphi'(w)$ und die Ableitung der zu $\varphi(w)$ inversen Funktion $f(z)$ auf $c'$ bzw. $\gamma'$ stetig sind und dort gleichmäßig einer Lipschitz-Bedingung mit festen Exponenten $\alpha$, $0<\alpha<1$, und festem $K$ in ihren Argumenten genügen, ist, daß der Tangentenwinkel $\theta(s)$ gleichmäßig in $s$ auf $c'$ der Bedingung* (11, 6) *genügt.*

Beweis. Ist die Voraussetzung (11, 6) erfüllt, so folgt die Stetigkeit von $\varphi'(w)$ bzw. $f'(z)$ auf $c'$ bzw. $\gamma'$ aus dem obigen Zusatz zum Satze 11. Es genügt nun zu beweisen, daß $f'(z)$ für $z$ auf $\gamma'$ einer Lipschitz-Bedingung mit dem Exponenten $\alpha$, $0<\alpha<1$, genügt, da wegen ($z=\varphi(w)$, $z_0=\varphi(w_0)$)

$$\left|\frac{z-z_0}{w-w_0}\right|^{\alpha}\leqq k, \qquad |f'(z)|\geqq m>0$$

und wegen

$$\frac{|\varphi'(w)-\varphi'(w_0)|}{|w-w_0|^{\alpha}}=\frac{\left|\frac{1}{f'(z)}-\frac{1}{f'(z_0)}\right|}{|z-z_0|^{\alpha}}\cdot\frac{|z-z_0|^{\alpha}}{|w-w_0|^{\alpha}}=\frac{|f'(z)-f'(z_0)|}{|f'(z)\cdot f'(z_0)|\,|z-z_0|^{\alpha}}\cdot\left|\frac{z-z_0}{w-w_0}\right|^{\alpha}$$

$$\leqq\frac{k}{m^2}\,\frac{|f'(z)-f'(z_0)|}{|z-z_0|^{\alpha}}$$

dann auch $\varphi'(w)$ einer solchen Bedingung mit demselben $\alpha$ genügt.

105. Zum Nachweis dafür, daß nun $f'(z)$ einer solchen Bedingung genügt, dürfen wir annehmen, daß $c\equiv C$ ist, daß also $C$ durchweg eine sich stetig drehende Tangente besitzt und der Tangentenwinkel $\theta(s)$ von $C$ für alle $s$ mit $0\leqq s\leqq S$ ($S$ Gesamtlänge von $C$) einer Lipschitz-Bedingung mit dem Exponenten $\alpha$ genügt. Denn sonst kann man den Bogen $c$ durch einen bis auf seine Endpunkte ganz innerhalb von $C$ verlaufenden Jordanbogen $J$ zu einer geschlossenen Jordankurve $C^*$ ergänzen, die durchweg diese Eigenschaft besitzt[93]). Vermittels $z=\varphi(w)$ wird der Bogen $c$ auf einen Bogen $\gamma$ von $|z|=1$, die Kurve $C^*$ auf eine geschlossene Jordankurve $\Gamma^*$ abgebildet, die den Bogen $\gamma$ mit $|z|=1$ gemeinsam hat und sonst ganz innerhalb von $|z|=1$ liegt. $z=g(\zeta)$ bilde den Kreis $|\zeta|<1$ auf das Innere von $\Gamma^*$ ab; entspricht dabei dem im Satze genannten Teilbogen $\gamma'$ von $\gamma$ der Bogen $b'$ von $|\zeta|=1$, so ist $g(\zeta)$ auf $b'$ analytisch und $g'(\zeta)$ ist dort von 0 verschieden, so daß also auch insbesondere $\frac{1}{g'(\zeta)}$

[93]) Man kann $J$ stückweise aus endlich vielen Bögen $j_\nu$ so zusammensetzen, daß $C^*=c'+J$ durchweg stetige Tangente hat und daß ferner auf jedem Bogen $j_\nu$

$$\frac{|w'(\sigma+h)-w'(\sigma)}{|h|^{\alpha}}\leqq k$$

ist ($\sigma$ die längs $C^*$ gemessene Bogenlänge, $w(\sigma)$, $w(\sigma+h)$ auf $j_\nu$). Dann gilt, wie leicht zu sehen ist, eine solche Ungleichung durchweg auf $C^*$.

auf $b'$ sicher eine stetige Ableitung nach $\zeta$ besitzt und somit a fortiori einer Lipschitz-Bedingung mit dem Exponenten $\alpha$ genügt. $w = F(\zeta) = f(g(\zeta))$ vermittelt dann die Abbildung von $|\zeta| < 1$ auf das Innere der Kurve $C^*$. Ist nun für $w = F(\zeta)$ bewiesen, daß $F'(\zeta)$ durchweg auf $|\zeta| = 1$ einer Lipschitz-Bedingung mit dem Exponenten $\alpha$ genügt, so folgt wegen $f'(z) = F'(\zeta) \cdot \frac{1}{g'(\zeta)}$ ($z$ auf $\gamma'$, $\zeta$ auf $b'$) nach dem eben über $\frac{1}{g'(\zeta)}$ Gesagten, daß auch $f'(z)$ für alle $z$ auf $\gamma'$ einer solchen Bedingung in $z$ genügt. —

106. Wir nehmen jetzt also an, daß $C$ durchweg stetige Tangente besitzt und daß der Tangentenwinkel $\theta(s)$ für alle $s$ mit $0 \leqq s \leqq S$ ($S$ Gesamtlänge von $C$) der Bedingung (11, 6) genügt, und zeigen, daß dann $f'(z)$ für alle $z = e^{i\vartheta}$ auf $|z| = 1$, oder, was auf dasselbe hinausläuft, für alle $\vartheta$ in $\langle 0, 2\pi \rangle$ einer Lipschitz-Bedingung mit dem Exponenten $\alpha$ genügt. Hierzu benützen wir den folgenden Satz von Herrn J. Privaloff[94]), der eine Verschärfung eines Satzes von Herrn Fatou darstellt: *Ist* $g(z) = u + iv$ *in* $|z| < 1$ *regulär und genügt die Randfunktion von* $v(re^{i\vartheta})$ *für alle reellen* $\vartheta$ *einer Lipschitz-Bedingung mit dem Exponenten* $\alpha$, *ist also*

$$|v(e^{i\vartheta_1}) - v(e^{i\vartheta_2})| \leqq K|\vartheta_1 - \vartheta_2|^\alpha,$$

*so genügt auch die dann sicher existierende Randfunktion von* $u(re^{i\vartheta})$ *für alle diese* $\vartheta$ *einer solchen Bedingung mit demselben* $\alpha$

$$|u(e^{i\vartheta_1}) - u(e^{i\vartheta_2})| \leqq K'|\vartheta_1 - \vartheta_2|^\alpha.$$

$s(\vartheta)$ bezeichne (wie oben) die Bogenlänge $s$ als Funktion des Parameters $\vartheta$. Wir denken uns nun den Tangentenwinkel $\theta(s)$ etwa für $s = 0$ beliebig normiert und für alle $s$ stetig fortgesetzt und sodann die (nach dem Satze von Lindelöf in Nr. 64) in $|z| \leqq 1$ stetige Potentialfunktion $\arc f'(z)$ so normiert, daß durchweg

$$\theta(s(\vartheta)) = \theta^*(\vartheta) = \arc f'(e^{i\vartheta}) + \vartheta + \frac{\pi}{2}$$

besteht. Dann sind sowohl $\arc f'(z)$ als auch $\lg f'(z)$ in $|z| < 1$ eindeutig festgelegt. Ferner gilt für $0 \leqq \vartheta_0$, $\vartheta \leqq 2\pi$

$$(11,7) \qquad \frac{|\arc f'(e^{i\vartheta}) - \arc f'(e^{i\vartheta_0})|}{|\vartheta - \vartheta_0|^\alpha} \leqq \frac{|\theta(s) - \theta(s_0)|}{|s - s_0|^\alpha} \left|\frac{s - s_0}{\vartheta - \vartheta_0}\right|^\alpha + |\vartheta - \vartheta_0|^{1-\alpha} \leqq K_1,$$ [95])

[94]) J. Privaloff, Bull. de la société math. de France **44** (1916), p. 100—103. Geht man den Beweis von Herrn Privaloff durch, so erkennt man, daß die Lipschitz-Konstante $K'$ von $u(e^{i\vartheta})$ nur von dem Exponenten $\alpha$ und von der Lipschitz-Konstanten $K$ von $v(e^{i\vartheta})$ abhängt.

[95]) Man beachte, daß die Konstante $K_1$ nur von $\alpha$, der oberen Schranke $\mu_2$ von $|f'(z)|$ und der Lipschitz-Konstanten $K$ in (11, 6) abhängt.

und daher auch für alle reellen $\vartheta$, $\vartheta_0$

$$\left| \frac{|\arc f'(e^{i\vartheta}) - \arc f'(e^{i\vartheta_0})|}{|\vartheta - \vartheta_0|^\alpha} \right| \leqq 2K_1 .$$

Somit ist nach dem genannten Satz von Herrn Privaloff

$$\frac{|\lg|f'(e^{i\vartheta})| - \lg|f'(e^{i\vartheta_0})||}{|\vartheta - \vartheta_0|^\alpha} = \frac{1}{|\vartheta - \vartheta_0|^\alpha} \left| \lg \left| \frac{f'(e^{i\vartheta})}{f'(e^{i\vartheta_0})} \right| \right| \leqq K_2 .$$ [96])

Nun ist (man beachte, daß $\lg f'(z)$ in $|z| < 1$ eindeutig und regulär und auf $|z| = 1$ stetig ist)

$$|f'(e^{i\vartheta}) - f'(e^{i\vartheta_0})| = |e^{\lg f'(e^{i\vartheta})} - e^{\lg f'(e^{i\vartheta_0})}| = |e^{\lg f'(e^{i\vartheta_0})}| \, |e^{\lg f'(e^{i\vartheta}) - \lg f'(e^{i\vartheta_0})} - 1|$$
$$\leqq \mu_2 [e^{|\lg f'(e^{i\vartheta}) - \lg f'(e^{i\vartheta_0})|} - 1] \leqq \mu_2 (e^{(2K_1 + K_2)|\vartheta - \vartheta_0|^\alpha} - 1) .$$ [97])

Bekanntlich ist nun $\lim\limits_{\vartheta \to \vartheta_0} \dfrac{e^{(2K_1 + K_2)|\vartheta - \vartheta_0|^\alpha} - 1}{|\vartheta_1 - \vartheta_0|^\alpha} = 2K_1 + K_2$, so daß

$$\frac{|f'(e^{i\vartheta}) - f'(e^{i\vartheta_0})|}{|\vartheta - \vartheta_0|^\alpha} \leqq \mu_2 \frac{e^{(2K_1 + K_2)|\vartheta - \vartheta_0|^\alpha} - 1}{|\vartheta - \vartheta_0|^\alpha}$$

in der Tat beschränkt bleibt, wenn $\vartheta$, $\vartheta_0$ in einem festen endlichen Intervall bleiben [97]).

107. Die Umkehrung des Kelloggschen Satzes ergibt sich unmittelbar aus der folgenden etwas allgemeineren Tatsache.

*Es sei $c$ ein Kurvenstück mit durchweg stetiger Tangente. $w = g(t) = u(t) + i\,v(t)$, $\alpha \leqq t \leqq \beta$, sei eine beliebige Parameterdarstellung dieses Kurvenstücks mit durchweg stetiger und nirgends verschwindender Ableitung $g'(t) = u'(t) + i\,v'(t)$. $s$ sei die von dem Endpunkt $g(\alpha)$ von $c$ an längs $c$ gemessene Bogenlänge $s$, und $w = G(s)$ sei die Parameterdarstellung vermittels der Bogenlänge $s$ $(a \leqq s \leqq b)$. Genügt dann $g(t)$ gleichmäßig in $\langle \alpha, \beta \rangle$ einer Lipschitz-Bedingung mit dem Exponenten $\gamma$, $0 < \gamma < 1$, d. h. ist also gleichmäßig für alle $t_1$ und $t_2$ in $\langle \alpha, \beta \rangle$*

$$\left| \left( \frac{dg(t)}{dt} \right)_{t=t_1} - \left( \frac{dg(t)}{dt} \right)_{t=t_2} \right| \leqq k |t_1 - t_2|^\gamma \qquad (k \text{ fest}), \tag{11,8}$$

*so gilt das analoge auch für $G'(s) = x'(s) + i\,y'(s)$.*

---

[96]) Man beachte, daß nach dem in der Fußnote [94]) Gesagten $K_2$ nur von $\alpha$ und der Lipschitz-Konstanten $K_1$ in (11, 7), also nach Fußnote [95]) nur von $\alpha$, $\mu_2$ und der Lipschitz-Konstanten $K$ in (11, 6) abhängt.

[97]) Man beachte, daß *die Lipschitz-Konstante von $f'(e^{i\vartheta})$* nach den Fußnoten [95]) und [96]) *nur von $\alpha$, der Lipschitz-Konstanten $K$ in* (11, 6) *und der Schranke $\mu_2$ von $|f'(z)|$ abhängt.*

Beweis. Es gibt eine feste Konstante $m > 0$, so daß für alle $t$ in $\langle \alpha, \beta \rangle$ $|g'(t)| \geqq m > 0$ ist. Wir zeigen, daß gleichmäßig für alle $s$, $s_0$ in $\langle a, b \rangle$

$$|x'(s) - x'(s_0)| = |\cos\theta(s) - \cos\theta(s_0)| \leqq K|s - s_0|^\gamma,$$
$$|y'(s) - y'(s_0)| = |\sin\theta(s) - \sin\theta(s_0)| \leqq K|s - s_0|^\gamma$$
$$(K > 0, \text{ fest})$$

gilt. Dies beweisen wir für $x'(s)$ (für $y'(s)$ ist der Beweis analog). — Wegen

$$\cos\theta(s) = x'(s) = \frac{u_t'}{|g'(t)|} = u_t' \cdot \frac{dt}{ds}, \qquad y'(s) = \frac{v_t'}{|g'(t)|} = v_t' \frac{dt}{ds}$$

gilt, wenn die Werte $t$, $t_0$ den Werten $s$ bzw. $s_0$ entsprechen,

$$\frac{|x'(s) - x'(s_0)|}{|s - s_0|^\gamma} \leqq \frac{|u_t'(t) - u_t'(t_0)|}{|t - t_0|^\gamma} \left|\frac{t - t_0}{s - s_0}\right|^\gamma \frac{dt}{ds} + \frac{\left|\frac{dt}{ds}(t) - \frac{dt}{ds}(t_0)\right|}{|t - t_0|^\gamma} \left|\frac{t - t_0}{s - s_0}\right|^\gamma |u_t'(t_0)|.$$

Man beachte nun, daß $\left|\frac{t - t_0}{s - s_0}\right|^\gamma$ und $\frac{dt}{ds}$ wegen der Beschränktheit von $\left|\frac{1}{g'(t)}\right| = \frac{dt}{ds}$ gleichmäßig beschränkt sind. Da ferner der erste Faktor des ersten Summanden auf der rechten Seite dieser Ungleichung beschränkt bleibt, genügt es zu beweisen, daß

$$\frac{\left|\frac{dt}{ds}(t) - \frac{dt}{ds}(t_0)\right|}{|t - t_0|^\gamma} \leqq \text{konst.}$$

gilt. Dies folgt aber sofort aus der Voraussetzung (11, 8), wenn man beachtet, daß

$$\frac{1}{|t - t_0|^\gamma} \left|\frac{1}{|g'(t)|} - \frac{1}{|g'(t_0)|}\right| \leqq \frac{1}{|t - t_0|^\gamma} \left|\frac{1}{g'(t)} - \frac{1}{g'(t_0)}\right| = \frac{1}{|t - t_0|^\gamma} \left|\frac{g'(t) - g'(t_0)}{g'(t)\, g'(t_0)}\right|$$

ist, und dieses wegen $|g'(t)| \geqq m > 0$ in $\langle \alpha, \beta \rangle$ und wegen (11, 8)

$$\leqq \frac{k}{m^2}$$

ist.

108. Unter Berücksichtigung der Fußnote [97]) ergibt sich noch der folgende

Zusatz zum Satz 11. *Es sei $C$ eine geschlossene durchweg mit stetiger Tangente versehene Jordankurve, für die die Voraussetzungen* 1 *und* 2 *des Zusatzes* 1 *zum Satz* 10 *erfüllt sind. Darüber hinaus gelte für den Tangentenwinkel $\theta(s)$ von $C$ als Funktion der Bogenlänge $s$ ($0 \leqq s < S$, $S$ Gesamtlänge von $C$)*

$$|\theta(s) - \theta(s_0)| \leqq K|s - s_0|^\alpha, \quad 0 \leqq s, \quad s_0 < S, \quad 0 < \alpha < 1.$$

*$w = f(z)$ bilde $|z| < 1$ so auf das Innere $G$ von $C$ ab, daß $z = 0$ in einen Punkt $w = w_1$ übergeht, der mitsamt einer vollen Kreisscheibe vom Radius $\varrho$ in $G$ liegt. Dann gibt es eine nur von den in der Voraussetzung genannten Zahlen $l, \varrho, D, c_1, K, \alpha$ abhängige Konstante $L$ derart, daß für alle $z, z_1$ mit $|z| = |z_1| = 1$*

$$|f'(z) - f'(z_1)| \leqq L|z - z_1|^{\alpha}, \quad L = L(l, \varrho, D, c_1; K, \alpha)$$

*gilt.*

*Ist ferner bei dieser Abbildung $s = s(\vartheta)$ die Bogenlänge längs $C$ als Funktion des Zentriwinkels $\vartheta$, so ist wegen $\frac{ds(\vartheta)}{d\vartheta} = |f'(e^{i\vartheta})|$ und wegen*

$$\left|\left(\frac{ds(\vartheta)}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=\vartheta_1} - \left(\frac{ds(\vartheta)}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=\vartheta_2}\right| \leqq |f'(e^{i\vartheta_1}) - f'(e^{i\vartheta_2})|$$

*auch*

$$\left|\left(\frac{ds}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=\vartheta_1} - \left(\frac{ds}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=\vartheta_2}\right| \leqq L|\vartheta_1 - \vartheta_2|^{\alpha}, \quad L = L(l, \varrho, D, c_1; K, \alpha).$$

Beweis. Aus dem genannten Zusatz 1 zum Satz 10 folgt — man beachte, daß die dort genannte Konvergenzfunktion der Integrale (10, 5) $\delta'(\eta) = \left(\frac{\alpha\eta}{K}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ ist —, daß es eine Konstante $\mu_2 > 0$ gibt, die nur von $l$, $D, c_1, \varrho, K, \alpha$ abhängt, so daß

$$|f'(z)| \leqq \mu_2 \quad \text{in} \quad |z| \leqq 1$$

ist. Hieraus folgt nach der Fußnote [97]) die Behauptung.

## Anhang.

Wir gehen noch auf die in der Einleitung erwähnte Verallgemeinerung der Sätze der Herren Carathéodory und Valiron über die Existenz einer endlichen, im Winkelraum gebildeten Ableitung ein. Es bezeichne $G$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $P$ $(w = w_1)$ einen Randpunkt von $G$, $w = f(z)$ bilde $|z| < 1$ auf $G$ ab. Dann lautet das oben erwähnte Resultat von Herrn Carathéodory: Gibt es einen Kreis $K_1$, der $P$ mit dem Rande von $G$ gemeinsam hat und sonst ganz in $G$ verläuft, und einen Kreis $K_2$, der gleichfalls den Punkt $P$ mit dem Rande von $G$ gemeinsam hat und sonst ganz außerhalb von $G$ verläuft, so gibt es einen Punkt $z_1$ der Peripherie $|z| = 1$, so daß $\lim_{z \to z_1} f(z) = w_1$ ist, wenn $z$ „im Winkelraum“ gegen $z_1$ konvergiert, und ferner $f(z)$ in $z_1$ eine „im Winkelraum“ gebildete Ableitung besitzt. Das Resultat von Herrn Valiron kann nach Durchführung einer trivialen Transformation folgendermaßen formuliert werden: Es sei $G$ ein im Einheitskreis $|w| = 1$ liegendes Gebiet, das den Punkt $w = 1$ zum

einfachen Randpunkt hat. $w = f(z)$ bilde $|z| < 1$ konform auf $G$ ab, und es sei in $|z| < 1$ $\lim_{z \to 1} f(z) = 1$. Ferner möge es zwei bis auf $w = 1$ in $G$ verlaufende, in $w = 1$ mündende und sich dort unter dem Winkel $\pi$ treffende Kurvenbögen $\gamma_1$, $\gamma_2$ geben, die in der Umgebung des Punktes $w = 1$ durch eine Gleichung der Form

$$(1) \qquad x = \frac{C|y|}{\lg\frac{1}{|y|}\lg\lg\frac{1}{|y|}\cdots\left(\lg_\alpha\frac{1}{|y|}\right)^{1+\varepsilon}}, \qquad w - 1 = x + iy,$$

dargestellt werden, wo $\varepsilon > 0$, $C$ eine Konstante und $\lg_\alpha \frac{1}{|y|}$ den $\alpha$-fach iterierten Logarithmus von $\frac{1}{|y|}$ bedeutet. Dann besitzt $f(z)$ in $z = 1$ eine endliche „im Winkelraum" gebildete Ableitung. Weiterhin zeigt Herr Valiron, daß der $\lim_{z \to 1} \frac{1 - f(z)}{1 - z}$ (für $z \to 1$ „im Winkelraum") nicht endlich ist, wenn der Rand von $G$ in der Umgebung von $w = 1$ von zwei in $w = 1$ unter dem Winkel $\pi$ zusammenstoßenden Kurvenzweigen gebildet wird, von dem jeder durch eine Gleichung der Form

$$(2) \qquad x = \frac{C|y|}{\lg\frac{1}{|y|}\lg\lg\frac{1}{|y|}\cdots\lg_\alpha\frac{1}{|y|}} \qquad (C \text{ Konstante}),$$

dargestellt wird.

Dieser Ansatz von Herrn Valiron hat eine gewisse Ähnlichkeit mit dem unsrigen: Die Einführung der Kurvenbögen (1) bzw. (2) entspricht bei unserem Ansatz der Einführung der „Majorante" $\xi^*(t)$ von $\xi(t)$ in § 7, und zwar für den Spezialfall

$$\xi^*(t) = \frac{C|t|}{\lg\frac{1}{|t|}\lg\lg\frac{1}{|t|}\cdots\left(\lg_\alpha\frac{1}{|t|}\right)^{1+\varepsilon}} \quad \text{bzw.} \quad \xi(t) = \frac{C|t|}{\lg\frac{1}{|t|}\lg\lg\frac{1}{|t|}\cdots\lg_\alpha\frac{1}{|t|}}.$$

Man beachte, daß im ersten Falle das Integral $\int_{-\varepsilon}^{\delta} \frac{\xi^*(t)}{t^2}\,dt$ konvergiert, im zweiten Falle divergiert.

Wir wollen nun diese Sätze folgendermaßen verallgemeinern: Analog wie in der in Nr. 41 gegebenen Definition bei einer Jordankurve $C$ sagen wir auch von einem einfach zusammenhängenden beschränkten Gebiet $G$, es besitze im Randpunkte $P$ die *innere* bzw. *äußere Vergleichskurve* $\mathfrak{C}_i$ bzw. $\mathfrak{C}_a$, wenn es eine geschlossene Jordankurve $\mathfrak{C}_i$ bzw. $\mathfrak{C}_a$ gibt, die den Punkt $P$ mit dem Rande von $G$ gemeinsam hat und sonst ganz im Innern von $G$ bzw. ganz außerhalb von $G$ verläuft und im letzten Falle $G$ in ihrem Innern enthält. Dann beweisen wir die folgende naheliegende Verallgemeinerung der obigen Sätze:

*Es sei $G$ ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet, $P$ $(w=w_1)$ ein Randpunkt von $G$, und es möge $G$ in $P$ eine innere $(\mathfrak{C}_i)$ und eine äußere $(\mathfrak{C}_a)$ Vergleichskurve besitzen, die eine gemeinsame Tangente in $P$ haben. $z=\psi_i(w)$ und $z=\psi_a(w)$ mögen das Innere von $\mathfrak{C}_i$ bzw. von $\mathfrak{C}_a$ auf das Innere des Einheitskreises $|z|=1$ abbilden. Ferner möge $\psi_a(w)$ in $w_1$ eine allseitig genommene endliche und von 0 verschiedene Ableitung besitzen, während über $\psi_i(w)$ nur vorausgesetzt werde, daß für eine in einem „festen Winkelraum" gegen $w_1$ konvergierende Punktfolge $\zeta_\mu$ $(\mu=1,2,\ldots)$*

$$\left|\frac{1-\psi_i(\zeta_\mu)}{1-\zeta_\mu}\right| \geqq m > 0 \tag{3}$$

*bleibt, unter $m$ eine positive Konstante verstanden.*

*Bildet dann $w=f(z)$ den Kreis $|z|<1$ auf $G$ ab, so gibt es einen Punkt $\alpha$ von $|z|=1$, so daß $f(z)$ bei Annäherung von $z$ an $\alpha$ „im Winkelraum" gegen $w_1$ konvergiert und ferner in $\alpha$ eine „im Winkelraum" genommene (endliche) Ableitung besitzt.*

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\psi_i(w_1)=\psi_a(w_1)=1$ ist und daß ferner die zu $w=f(z)$ inverse Funktion $z=\varphi(w)$ und $z=\psi_i(w)$ denselben Punkt $w=w_0$ im Innern von $\mathfrak{C}_i$ in den Nullpunkt überführen. Ferner bemerken wir, daß der Punkt $P$ $(w=w_1)$ ein mehrfacher Randpunkt von $G$ sein kann; alle Punkte $w^*$ jedoch, die im Innern von $\mathfrak{C}_i$ gegen $w_1$ streben, konvergieren gegen einen und denselben Randpunkt in $w_1$, da ja das Innere von $\mathfrak{C}_i$ ganz dem Innern von $G$ angehört. Daher konvergieren ihre Bildpunkte $z=\varphi(w^*)$ nach bekannten Sätzen über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung gegen einen und denselben Punkt $z=\alpha$ der Peripherie des Einheitskreises. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\alpha=1$ $\left(\text{sonst betrachte man } f\left(\frac{z}{\alpha}\right)\right.$ und $\left.\frac{\varphi(w)}{\alpha}\right.$ statt $f(z)$ bzw. $\left.\varphi(w)\right)$. Da nun auch die Punkte $\zeta_\mu$ in $\mathfrak{C}_i$ gegen $w_1$ streben, konvergieren auch ihre Bildpunkte $z_\mu=\varphi(\zeta_\mu)$ gegen 1 für $\zeta_\mu \to w_1$.

Endlich bemerken wir noch, daß wegen der Winkeltreue der durch $z=\psi_i(w)$ vermittelten Abbildung die Punkte $\psi_i(\zeta_\mu)$ in einem festen Winkelraum gegen den Punkt $z=1$ konvergieren. Daher gibt es eine positive Konstante $\lambda$, so daß

$$0<\lambda \leqq \frac{1-|\psi_i(\zeta_\mu)|}{|1-\psi_i(\zeta_\mu)|} \leqq 1 \tag{4}$$

gilt.

Nun ist nach dem Lindelöfschen Prinzip, angewandt auf $\varphi(w)$ und $\psi_i(w)$ (da beide Funktionen im Innern von $\mathfrak{C}_i$ regulär und absolut $<1$ sind, in $w_0$ verschwinden, und da $\psi_i(w)$ die Abbildungsfunktion des Innern

von $\mathfrak{C}_i$ auf $|z|<1$ ist), für alle $w$ im Innern von $\mathfrak{C}_i$

$$|\varphi(w)| \leqq |\psi_i(w)|, \quad \frac{1-|\varphi(w)|}{|w_1-w|} \geqq \frac{1-|\psi_i(w)|}{|w_1-w|}$$

und daher insbesondere für $w=\zeta_\mu$

$$\frac{1-|\varphi(\zeta_\mu)|}{|w_1-\zeta_\mu|} \geqq \frac{1-|\psi_i(\zeta_\mu)|}{|w_1-\zeta_\mu|}.$$

Nach (4) und der Voraussetzung (3) ist daher

$$\frac{1-|\varphi(\zeta_\mu)|}{|w_1-\zeta_\mu|} \geqq \lambda \frac{|1-\psi_i(\zeta_\mu)|}{|w_1-\zeta_\mu|} \geqq \lambda m > 0. \tag{5}$$

Wir betrachten nun die Funktion $F(z)=\psi_a(f(z))$. $F(z)$ ist in $|z|<1$ regulär und absolut $<1$. Daher existiert nach dem in der Einleitung zitierten Satz a) auf S. 327 (Satz 4 der in Fußnote [10]) genannten Carathéodoryschen Abhandlung) der

$$\lim_{z\to 1} \frac{1-F(z)}{1-z},$$

wenn $z$ „im Winkelraum gegen" $z=1$ konvergiert. Wir zeigen, daß dieser Grenzwert endlich und von 0 verschieden ist. Hierzu genügt es nach dem Satze 1 in der eben zitierten Abhandlung von Herrn Carathéodory zu zeigen, daß für die Folge der Punkte $z_\mu=\varphi(\zeta_\mu)$ für die (siehe oben) die Relationen

$$\lim_{\mu\to\infty} z_\mu = 1, \qquad \lim_{\mu\to\infty} F(z_\mu) = \lim_{\mu\to\infty} \psi_a(\zeta_\mu) = 1$$

bestehen, der Quotient

$$\frac{1-|F(z_\mu)|}{1-|z_\mu|} \leqq k, \tag{6}$$

also beschränkt bleibt. Für diesen ergibt sich aber

$$\frac{1-|F(z_\mu)|}{1-|z_\mu|} = \frac{1-|\psi_a(\zeta_\mu)|}{|w_1-\zeta_\mu|} \frac{|w_1-\zeta_\mu|}{1-|z_\mu|} = \frac{1-|\psi_a(\zeta_\mu)|}{|w_1-\zeta_\mu|} \frac{1}{\dfrac{1-|\varphi(\zeta_\mu)|}{|w_1-\zeta_\mu|}}$$

und dies ist wegen $1-|\psi_a(\zeta_\mu)| \leqq |1-\psi_a(\zeta_\mu)|$ und (5)

$$\leqq \frac{|1-\psi_a(\zeta_\mu)|}{|w_1-\zeta_\mu|} \frac{1}{\lambda m}.$$

Da nun $\psi_a(w)$ in $w_1$ eine allseitig genommene Ableitung besitzt, ist $\left|\dfrac{1-\psi_a(\zeta_\mu)}{w_1-\zeta_\mu}\right|$ sicher beschränkt, womit (6) bewiesen ist. Aus der Tatsache, daß

$$\lim \frac{1-F(z)}{1-z} = \lim \frac{1-\psi_a(w)}{w_1-w} \frac{w_1-f(z)}{1-z}$$

für gegen 1 „im Winkelraum" konvergierendes $z$ existiert und endlich ist,

und daß ferner $\lim \frac{1-\psi_a(w)}{w_1-w}$ existiert und von 0 und $\infty$ verschieden ist, folgt nun, daß auch

$$\lim_{z\to 1} \frac{w_1-f(z)}{1-z}$$

für $z\to 1$ „im Winkelraum“ vorhanden und endlich ist. Hieraus ergibt sich auch unmittelbar die Konvergenz von $f(z)\to w_1$ für $z\to 1$ „im Winkelraum“. — Hiermit ist der Satz bewiesen. —

Besitzt nun insbesondere das Gebiet $G$ Vergleichskurven $\mathfrak{C}_i$ und $\mathfrak{C}_a$, bei denen im Punkte $w=w_1$ die Voraussetzungen unseres Satzes 7 (oder auch der Sätze 9 oder 11) (für den Fall $\tau=1$) anwendbar sind, so haben die Funktionen $\psi_i(w)$ und $\psi_a(w)$ in $w_1$ sicher „im Winkelraum“ gebildete Ableitungen, so daß also dieser Satz anwendbar ist. Hierin sind offenbar die oben angegebenen Resultate der Herren Carathéodory und Valiron als spezielle Fälle enthalten.

(Eingegangen am 2. Juli 1930.)

# Die Anzahl der Nullstellen der Hankelschen Funktionen.

Von

Hans Falckenberg in Gießen.

**1.** Wenn man in der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$(1)\qquad \frac{d^2v}{dz^2}+\frac{dv}{dz}\left(\frac{1-\alpha'-\alpha}{z-a}+\frac{1-\beta'-\beta}{z-b}+\frac{1-\gamma'-\gamma}{z-c}\right)$$
$$+\frac{v}{(z-a)(z-b)(z-c)}\left\{\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a}+\frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b}+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\right\}=0,$$

in der $z$ eine komplexe Veränderliche bedeutet, die singulären Stellen $(a>b>c)$ und die zugehörigen Exponenten $(\alpha'>\alpha,\ \beta'>\beta,\ \gamma'>\gamma;\ \alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1)$ aber reell sind, die Veränderliche $z$ durch $iz_1$, die Größen $a, b, c$ durch $-a_1, -b_1, -c_1$ ersetzt, dann aber an Stelle von $z_1$ wieder $z$ und an Stelle von $a_1, b_1, c_1$ wieder $a, b, c$ schreibt, so erhält man die Differentialgleichung

$$(2)\qquad \frac{d^2v}{dz^2}+\frac{dv}{dz}\left(\frac{1-\alpha'-\alpha}{z-ia}+\frac{1-\beta'-\beta}{z-ib}+\frac{1-\gamma'-\gamma}{z-ic}\right)$$
$$-\frac{v}{(z-ia)(z-ib)(z-ic)}\left\{\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-ia}+\frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-ib}+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-ic}\right\}=0,$$

die nunmehr vom gleichen Typ wie Gleichung (1) ist, aber die rein imaginären singulären Stellen $ia, ib, ic$ hat, wobei nun $a<b<c$ ist. Hier setzen wir nach dem Vorgang von F. Klein[1]) zunächst

$$(3)\qquad a=0;\quad \alpha'=-\alpha=\nu>0;\quad \beta'-\beta=\gamma'-\gamma=\psi>\nu-\frac{1}{2}$$

und lassen dann $b\to c\to\infty$ und $\psi\to\infty$ wachsen, während $\beta'+\beta+\gamma'+\gamma=1$ und $\beta'\beta-\gamma'\gamma$ endlich bleibt. Durch diesen Grenzübergang erhält man die Besselsche Differentialgleichung

$$(4)\qquad \frac{d^2v}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dv}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)v=0,$$

[1]) Vgl. etwa „Über die hypergeometrische Funktion", autographierte Vorlesungshefte, 2. Aufl., Leipzig 1906, S. 282.

die hier als derjenige Grenzfall der hypergeometrischen erscheint, bei der die beiden singulären Stellen $ib$ und $ic$ in dem unendlich fernen Punkt zusammengerückt sind, wodurch dieser zur *wesentlichen* singulären Stelle der Besselschen Differentialgleichung wird. Spezielle Lösungen dieser Differentialgleichung sind die Hankelschen Funktionen

$$H_1(z) = I_\nu(z) + iY_\nu(z) \tag{5}$$

und

$$H_2(z) = I_\nu(z) - iY_\nu(z), \tag{5a}$$

wobei $I_\nu(z)$ die Zylinderfunktion erster, $Y_\nu(z)$ die zweiter Art ist[2]). Die Nullstellen der Hauptzweige der Hankelschen Funktionen ergeben sich nach (5) für diejenigen Werte von $z$, für die der Quotient $\frac{Y_\nu(z)}{I_\nu(z)} = \pm i$ wird. E. Hilb und ich[3]) haben die Anzahl dieser Nullstellen im Anschluß an Arbeiten von F. Klein auf geometrischem Wege bestimmt, indem wir die Anzahl der Überdeckungen berechnet haben, welche die den singulären Stellen $ib$ und $ic$ entsprechenden Ecken desjenigen Kreisbogendreiecks erleiden, das entsteht, wenn man die positive oder negative $Z$-Halbebene abbildet durch den Quotienten der zwei zu einer der beiden singulären Stellen $ib$ oder $ic$ der Differentialgleichung (2) gehörenden Fundamentallösungen und den Grenzfall untersuchen, in dem $ib$ und $ic$ auf der imaginären Achse ins Unendliche gerückt sind.

A. Hurwitz[4]) hat die Anzahl der Nullstellen der hypergeometrischen Funktion auf rein analytischem Wege bestimmt. Die Anwendung seiner Methode auf unseren Grenzfall läßt sich, wie im folgenden gezeigt werden soll, ebenso einfach durchführen wie die der geometrischen, hat aber den Vorzug, dem vorgegebenen analytischen Problem naturgemäßer zu sein.

**2.** Zunächst überzeugt man sich unschwer davon, daß die Anzahl der rein imaginären Nullstellen einer Lösung der Gleichung (2) gleich ist der Anzahl der reellen Nullstellen der entsprechenden Lösung der Gleichung (1). Diese Zahlen wurden zuerst berechnet von F. Klein[5]); insbesondere findet man unter Berücksichtigung von Gleichung (3) für die Anzahl der

[2]) Vgl. Niels Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, Leipzig 1904, Kap. XI.

[3]) In der unter dem Titel dieser Arbeit erschienenen Note in den Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Klasse 1916. Vgl. auch die dort herangezogene Literatur.

[4]) Über die Nullstellen der hypergeometrischen Funktion, Math. Annalen **64** (1907), S. 517. Weiterhin zitiert mit H.

[5]) „Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe", Math. Annalen **37** (573), S. 573. Vgl. auch H., S. 525 ff.

zwischen $ib$ und 0, bzw. zwischen $ic$ und $ib$ gelegenen rein imaginären Nullstellen der zum größeren Exponenten gehörigen Fundamentallösung $v_{\beta'}$ der singulären Stelle $ib$ die Zahl $E(\nu - \frac{1}{2}) = 0$ bzw. $E(-\frac{1}{2} + \nu - \psi) = 0$,[6] während die Anzahl der zwischen 0 und $ic$ liegenden im allgemeinen auch 0 ist, und nur in dem Fall, daß $\nu = k + \frac{1}{2}$ ist, wobei $k$ die Zahl 0 oder jede positive ganze Zahl sein kann, den Wert $\frac{1-(-1)^k}{2} = \varepsilon$ annimmt[7]. Entsprechende Resultate erhält man für die Anzahl der rein imaginären Nullstellen der zum größeren Exponenten der singulären Stelle $ic$ gehörenden Fundamentallösung $v_{\gamma'}$. Alle diese Zahlen sind, sofern man von vornherein die unter (3) angegebene Voraussetzung über die Größe von $\psi$ macht, *von dem noch vorzunehmenden Grenzübergang unabhängig* und haben für uns insofern besondere Bedeutung, als die Hankelschen Funktionen gerade diejenigen Lösungen der Besselschen Differentialgleichung sind, die an der wesentlichen singulären Stelle $ib = ic = \infty$ verschwinden, da sich, wie man weiß[8]), der Quotient $\frac{I_\nu(z)}{Y_\nu(z)}$ asymptotisch den Werten $\pm i$ nähert, wenn $z$ auf der imaginären Achse gegen unendlich strebt, so daß die Hankelschen Funktionen bei unserem Grenzübergang als der Grenzfall der zu den größeren Exponenten der singulären Stellen $ib$ und $ic$ der Differentialgleichung (2) gehörenden Fundamentallösungen zu gelten haben. Die Anzahl der *rein imaginären* Nullstellen unserer Funktionen ist damit also schon bestimmt. Man erhält nämlich für diese Anzahl im allgemeinen Fall $(\nu \neq k + \frac{1}{2})$

$$N_i = 0 \tag{6a}$$

und im Sonderfall $(\nu = k + \frac{1}{2})$

$$N_i \begin{cases} = 0 & \text{für gerade } k, \\ = 1 & \text{für ungerade } k. \end{cases} \tag{6b}$$

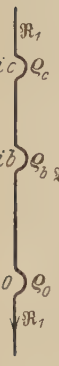
**3.** Um nun zu den reellen und komplexen Nullstellen überzugehen, betrachten wir die zur Rechten der imaginären Achse der $Z$-Ebene liegende Halbebene als einen geschlossenen, durch die imaginäre Achse berandeten Bereich $\mathfrak{B}$. Innerhalb dieses Bereiches sind die Funktionen $v_{\beta'}$ und $v_{\gamma'}$ regulär; auf dem Rand sind sie nur an den Stellen $ib$, 0 und $ic$ irregulär und haben sonst dort auch im allgemeinen keine Nullstellen; den Sonderfall, daß $\nu = k + \frac{1}{2}$ ist, schließe ich vorläufig aus. Bei Durchlaufung des Randes wollen wir die singulären Stellen dadurch vermeiden, daß wir auf infinitesimalen Konturen $\varrho_c$, $\varrho_b$, $\varrho_0$ um sie herum gehen. Dadurch gewinnen

[6]) $E(\xi)$ = größte ganze Zahl *unter* $\xi$ für reelle $\xi > 1$, $E(\xi) = 0$ für reelle $\xi \leqq 1$.

[7]) H., S. 534.

[8]) Nielsen, a. a. O. § 58 und 59.

wir, wie in der Figur angedeutet, einen neuen Bereich $\mathfrak{B}_1$, innerhalb dessen und auf dessen Rand $\mathfrak{R}_1$ die Funktionen $v_{\beta'}$ und $v_{\gamma'}$ regulär sind. Bezeichnet man die Anzahl der Stellen, an denen $v_{\beta'}$ innerhalb $\mathfrak{B}_1$ gleich 0 wird, mit $N_{\beta'}$, so ist nach einem Satz von Cauchy




$2\pi i N_{\beta'}$ = der stetigen Änderung, die $\ln v_{\beta'}$ erfährt, wenn $\mathfrak{R}_1$ von $z$ in positivem Sinne (in der Figur durch einen Pfeil angemerkt) durchlaufen wird,

oder

$$(7)\quad N_{\beta'} = \frac{1}{2\pi i}\{D_{\varrho_c} \ln v_{\beta'} + D_{c-0}^{b+0} \ln v_{\beta'} + D_{\varrho_b} \ln v_{\beta'} + D_{b-0}^{0+0} \ln v_{\beta'} + D_{\varrho_0} \ln v_{\beta'} + D_{0-0}^{c+0} \ln v_{\beta'}\},$$

wo die auf der rechten Seite gebrauchten Symbole in leicht verständlicher Weise die stetigen Änderungen bedeuten, die der Logarithmus bei Durchlaufung der infinitesimalen Konturen bzw. bei Durchlaufung der betreffenden Teile der imaginären Achse erfährt.

In der Umgebung der Stelle $ib$ können wir $v_{\beta'} = (z - ib)^{\beta'} \cdot \mathfrak{P}(z - ib)$ schreiben, wobei $\mathfrak{P}$ eine Potenzreihe mit dem konstanten Gliede 1 bedeutet. Denken wir uns ferner die Kontur $\varrho_b$ als Halbkreis um $ib$, so wird für genügend kleine $\varrho$

$$D_{\varrho_b} \ln v_{\beta'} = [\ln(\varrho \cdot e^{i\pi\beta'} \cdot \mathfrak{P}(\varrho \cdot e^{i\varphi}))]_{\varphi=+\frac{\pi}{2}}^{\varphi=-\frac{\pi}{2}}$$

$$= [\ln \varrho + i\varphi\beta' + \ln \mathfrak{P}(\varrho \cdot e^{i\varphi})]_{\varphi=+\frac{\pi}{2}}^{\varphi=-\frac{\pi}{2}} = -i\pi\beta',$$

also

$$\frac{1}{2\pi i} D_{\varrho_b} \ln v_{\beta'} = -\frac{\beta'}{2}.$$

Wir bezeichnen die zu den kleineren Exponenten der singulären Stellen $ib$ und $ic$ gehörigen Fundamentallösungen mit $v_\beta$ und $v_\gamma$, die zur Stelle 0 gehörenden nennen wir $v_{+\nu}$ bzw. $v_{-\nu}$. $v_{\beta'}$ und $v_{\gamma'}$ lassen sich durch die anderen Fundamentallösungen folgendermaßen darstellen[9]):

$$(8)\quad \begin{aligned}
v_{\beta'} &= \frac{\pi}{\sin \psi\pi}\left\{f\left(\tfrac{1}{2}+\nu+\psi\right) f\left(\tfrac{1}{2}-\nu+\psi\right) e^{-i\pi\gamma} v_\gamma - f\left(\tfrac{1}{2}-\nu\right) f\left(\tfrac{1}{2}+\nu\right) e^{-i\pi\gamma'} v_{\gamma'}\right\}\\
v_{\beta'} &= \frac{\pi e^{i\pi\beta'}}{\sin 2\nu\pi}\left\{f\left(\tfrac{1}{2}+\nu+\psi\right) f\left(\tfrac{1}{2}+\nu\right) v_{-\nu} - f\left(\tfrac{1}{2}-\nu\right) f\left(\tfrac{1}{2}-\nu+\psi\right) v_{+\nu}\right\},\\
v_{\gamma'} &= \frac{\pi}{\sin 2\nu\pi}\left\{f\left(\tfrac{1}{2}+\nu+\psi\right) f\left(\tfrac{1}{2}-\nu\right) e^{i\pi\nu} v_{-\nu} - f\left(\tfrac{1}{2}-\nu\right) f\left(\tfrac{1}{2}-\nu+\psi\right) e^{-i\pi\nu} v_{+\nu}\right.\\
v_{\gamma'} &= \frac{\pi e^{i\pi\gamma'}}{\sin\psi\pi}\left\{f\left(\tfrac{1}{2}+\nu+\psi\right) f\left(\tfrac{1}{2}-\nu+\psi\right) v_\beta - f\left(\tfrac{1}{2}-\nu\right) f\left(\tfrac{1}{2}+\nu\right) v_{\beta'}\right\},
\end{aligned}$$

[9]) Siehe etwa H., S. 520.

dabei soll für *reelle* $x$ die Funktion $f(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}$ sein, so daß $f(x)$ gerade für $x = 0, -1, -2, -3, \ldots$ den Wert 0 annehmen wird und auf der rechten Seite von (8) mit Rücksicht darauf, daß $\psi > \nu - \frac{1}{2}$ ist und der Sonderfall $\nu = k + \frac{1}{2}$ ausgeschlossen war, niemals eine der Funktionen $f$ verschwinden kann.

In der Umgebung der Stelle $ic$ verhält sich also $v_{\beta'}$ wie $(z - ic)^{\gamma}$ und in der Umgebung der Stelle 0 wie $z^{-\gamma}$; es ist also

$$\frac{1}{2\pi i} D_{\varrho_c} \ln v_{\beta'} = -\frac{\gamma}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi i} D_{\varrho_0} \ln v_{\beta'} = \frac{\nu}{2},$$

und wir erhalten, weil wegen (3) $\beta' + \gamma = \frac{1}{2}$ ist, aus (7)

$$N_{\beta'} + \frac{\frac{1}{2} - \nu}{2} = \frac{1}{2\pi i} \left( D_{c-0}^{b+0} \ln v_{\beta'} + D_{b-0}^{0+0} \ln v_{\beta'} + D_{0-0}^{c+0} \ln v_{\beta'} \right), \tag{9}$$

und es wären nun noch die rechts stehenden Symbole auszuwerten.

Die Festsetzungen über die Normierung der Fundamentallösungen können und sollen so getroffen werden, daß $v_{+\nu}$ und $v_{-\nu}$ längs des Stückes $ib \ldots 0$, $v_{\beta'}$ und $v_{\beta}$ längs des Stückes $ic \ldots ib$, $v_{\gamma'}$ und $v_{\gamma}$ längs des Stückes $0 \ldots ic$ der imaginären Achse reell ausfallen. Die Gleichungen (8) zeigen dann, daß $v_{\beta'}$ bis auf einen konstanten Faktor auch längs des Stückes $ib \ldots 0$ und $v_{\gamma'}$ bis auf einen konstanten Faktor auch längs des Stückes $ic \ldots ib$ der imaginären Achse reell ist.

Auf Grund einer Rechnung mit Cauchyschen Indizes beweist Hurwitz[10]) aus diesen Realitätsverhältnissen, daß $D_{c-0}^{b+0} \ln v_{\beta'}$ und $D_{b-0}^{0+0} \ln v_{\beta'}$ gleich 0 werden und, wenn wir gleich unsere speziellen Exponentenwerte aus (3) in die Hurwitzsche Formel einsetzen, daß

$$\frac{1}{2\pi i} D_{0-0}^{c+0} \ln v_{\beta'} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} - \nu - \left[ \frac{1}{2} - \nu \right] - \frac{1}{2} \left( 1 - (-1)^{\left[\frac{1}{2} - \nu\right]} \right) \right\}^{11})$$

wird; aus (8) folgt dann

$$\begin{aligned} N_{\beta'} &= -\frac{\frac{1}{2} - \nu}{2} + \frac{\frac{1}{2} - \nu}{2} - \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} - \nu \right] + \left( 1 - (-1)^{\left[\frac{1}{2} - \nu\right]} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ - \left[ \frac{1}{2} - \nu \right] + 1 - (-1)^{\left[\frac{1}{2} - \nu\right]} \right\}. \end{aligned}$$

Nun ist aber $-\left[\frac{1}{2} - \nu\right] = 1 + \left[\nu - \frac{1}{2}\right] = \left[\nu + \frac{1}{2}\right]$, und wir erhalten unter Berücksichtigung der Tatsache, daß für die singuläre Stelle $ic$ die Rechnung analog verläuft, im allgemeinen Falle $(\nu \neq k + \frac{1}{2})$

$$N_{\beta'} = N_{\gamma'} = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \nu + \frac{1}{2} \right] + 1 - (-1)^{\left[\nu + \frac{1}{2}\right]} \right\}. \tag{10}$$

---

[10]) H., S. 537 und S. 549.

[11]) Dabei bedeutet $[x]$ die größte positive oder negative ganze Zahl (einschließlich der Zahl 0), die kleiner als die reelle Zahl $x$ ist.

4. *Diese Zahl ist* ebenso wie die Zahlen, die wir für die Anzahl der rein imaginären Nullstellen angegeben hatten, *von den Größen, die beim Grenzübergang* zur Besselschen Gleichung *variiert werden, unabhängig*, gibt also schon direkt die Anzahl der in der rechten Halbebene gelegenen reellen oder komplexen Nullstellen der Hankelschen Funktionen an. Die Unabhängigkeit vom Grenzübergang ist nur dadurch zustande gekommen, daß in der zu Gleichung (9) führenden Beziehung die zu den singulären Stellen $ib$ und $ic$ gehörenden Exponenten nur in der Kombination $\beta' + \gamma$ (bzw. $\gamma' + \beta$) auftreten, was ausschließlich bei der Fundamentallösung $v_{\beta'}$ (bzw. $v_{\gamma'}$) der Fall ist. Eine einfache Überlegung zeigt, daß sonach, wenn $\nu \neq k + \frac{1}{2}$ ist, die Hankelschen Funktionen die einzigen Lösungen der Differentialgleichung (8) sein werden, die *nur eine endliche Anzahl* von Nullstellen haben.

Die Anzahl der in der linken Halbebene gelegenen Nullstellen ist ebenso groß wie die der in der rechten gelegenen, die Anzahl der rein imaginären aber, da wir den Sonderfall $\nu = k + \frac{1}{2}$ ausschließen wollten, nach (6), gleich 0, und wir erhalten als Gesamtzahl der Nullstellen der Hankelschen Funktionen aus (10) im *allgemeinen* Fall ($\nu \neq k + \frac{1}{2}$) die *gerade* Zahl

$$N = \nu + \frac{1}{2} + 1 - (-1)^{[\nu + \frac{1}{2}]}. \tag{11}$$

5. Im *Sonderfall*, in dem $\nu = k + \frac{1}{2}$ ist, sehen wir, daß in der Gleichung (8) überall die zweiten Glieder in der geschweiften Klammer der rechten Seite 0 werden, und also die beiden Fundamentallösungen $v_{\beta'}$ und $v_{\gamma'}$ in jedem der drei Abschnitte der imaginären Achse durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor reell gemacht werden können. Daraus folgt nach der erwähnten Rechnung von Hurwitz[10], daß jetzt alle drei Größen $D_{c-0}^{b+0} \ln v_{\beta'}$, $D_{b-0}^{0+0} \ln v_{\beta'}$, $D_{0-0}^{c+0} \ln v_{\beta'}$ gleich 0 werden.

Ist nun $k$ eine gerade Zahl, so ist nach (6b) auch hier auf $\mathfrak{R}_1$, abgesehen von den singulären Stellen, keine Nullstelle vorhanden; die Gleichungen (7) und (9) bleiben gültig, und aus der durch das Verschwinden sämtlicher Glieder der rechten Seite von (9) wesentlich vereinfachten Gestalt dieser Gleichung ergibt sich als Gesamtzahl der Nullstellen die gerade Zahl

$$N = \nu - \frac{1}{2} = k. \tag{11'}$$

Ist aber $k$ ungerade, so ist nach (6b) in dem Abschnitt $0 \ldots ic$ bzw. $ib \ldots 0$ gerade noch eine Nullstelle $iz_0$ von $v_{\beta'}$ bzw. $v_{\gamma'}$ vorhanden. Um jetzt die Anzahl der Nullstellen von $v_{\beta'}$ zu bekommen, hat man auch diese letzte Nullstelle auf dem Rande des Gebietes $\mathfrak{B}_1$ zu berücksichtigen und durch eine infinitesimale Kreisbogenkontur $\varrho_{z_0}$ auszuschließen. D. h. man muß in (7) das Glied $D_{\varrho_{z_0}} \ln v_{\beta'}$ neu hinzufügen und an Stelle von

$D_{0-0}^{c+0} \ln v_{\beta'}$ setzen $D_{0-0}^{z_0+0} \ln v_{\beta'} + D_{z_0-0}^{c+0} \ln v_{\beta'}$. Weil sich $v_{\beta'}$ an der Stelle $iz_0$ wie $(z - iz_0)^{\frac{1}{2}\nu+1}$ verhält und $\ln v_{\beta'}$ in den Abschnitten $0 \ldots iz_0$ und $iz_0 \ldots ic$ reell ist, so erhält man an Stelle von (7) die Gleichung

$$N_{\beta'} + \frac{\frac{1}{2}\nu+1}{2} = 0. \tag{7''}$$

Als Gesamtzahl der Nullstellen der Hankelschen Funktionen erhält man sonach in diesem Fall die ungerade Zahl

$$N = 1 + \nu - \frac{1}{2} - 1 = \nu - \frac{1}{2} = k. \tag{11''}$$

Die zuletzt behandelten Sonderfälle ($\nu = k + \frac{1}{2}$), in denen also die gesuchte Anzahl der Nullstellen stets $k$ ist, sind diejenigen Fälle, in denen die Fundamentallösungen $v_{\beta'}$ bzw. $v_{\gamma'}$ der hypergeometrischen Funktion mit den zu den kleineren Exponenten der beiden anderen singulären Stellen gehörigen Fundamentallösungen zusammenfallen und in denen sich $v_{\beta'}$ bzw. $v_{\gamma'}$ durch Multiplikation mit Potenzen von $(z - ib)$ bzw. $(z - ic)$ in eindeutige Funktionen verwandeln lassen.

**6.** Die Resultate (11), (11′) und (11″) lassen sich in folgendem Satz zusammenfassen:

*Die Anzahl der Nullstellen der Hankelschen Funktionen ist*

$$\begin{aligned} &\textit{für } 0 \leqq \nu < \frac{3}{2} \textit{ gleich } 0, \\ &\textit{für } \nu = \frac{4k+3}{2} \textit{ gleich } 2k+1, \\ &\textit{für } \frac{4k+3}{2} < \nu < \frac{4k+7}{2} \textit{ gleich } 2(k+1) \end{aligned} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Er stimmt mit den von Falckenberg und Hilb gefundenen Ergebnissen wörtlich überein und schließt das schon bekannte Resultat für den Fall $\nu = k + \frac{1}{2}$ als Spezialfall ein.

(Eingegangen am 9. Januar 1931.)

# Zur Theorie der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen vom parabolischen Typus.*)

Von

M. R. Siddiqi in Hyderabad Deccan.

## Einleitung.

Die Methode des Fourierschen Ansatzes ist vor einiger Zeit von Herrn Lichtenstein, auf dessen Anregung auch die vorliegende Arbeit entstand, zur Auflösung einiger Randwertaufgaben in der Theorie der nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus angewandt worden[1]). Eine analoge Methode kann man auch für die nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen vom parabolischen Typus entwickeln. Es besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Typen von Gleichungen. Während nämlich die Variable $t$ bei den hyperbolischen Gleichungen auf hinreichend kleine Werte beschränkt bleiben muß, damit die Existenz und Unität der Lösung bewiesen werden kann, kann $t$ bei den parabolischen Gleichungen beliebige Werte haben. Demgegenüber werden bezüglich der Randwerte bei den parabolischen Gleichungen weitergehende einschränkende Annahmen gemacht.

Es sei an dieser Stelle auf die bekannten Arbeiten von Herrn Gevrey über die parabolischen Differentialgleichungen hingewiesen[2]). Herr Gevrey behandelt a. a. O. gewisse nichtlineare Gleichungen mit Hilfe der Greenschen

*) Als Inaugural-Dissertation von der philosophischen Fakultät der Universität Leipzig zugelassen.

[1]) Vgl. L. Lichtenstein, Zur Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus, Journal für die reine und angewandte Mathematik **158** (1927), S. 80—91.

[2]) M. Gevrey, Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique. Journal de Mathématique pure et appliquée. VI. Série. **9** (1913), p. 305—471; **10** (1914), p. 105—148.

Funktion des linearen homogenen Problems. In der vorliegenden Arbeit wird von der Greenschen Funktion kein Gebrauch gemacht.

Wir gehen von der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = P(x, t; u)$$

aus und beweisen, daß eine und nur eine nebst ihren partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ im Bereiche $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq t$ stetige Lösung $u(x, t)$ existiert, die für $x = 0$ und $x = \pi$ verschwindet, und für $t = 0$ vorgegebene Randwerte $f(x)$ annimmt. Die Funktion $P(x, t; u)$ läßt sich dabei in eine Potenzreihe von der Form $\sum_{\nu=2}^{\infty} p_\nu(x, t)\, u^\nu$ entwickeln, und die Funktionen $p_\nu(x, t)$ sind nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen nach $x$ in dem ganzen in Frage kommenden Bereiche stetig und gleichmäßig beschränkt. Bezüglich der Funktion $f(x)$ wird vorausgesetzt, daß sie sich in der Form $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n x$ mit konvergentem $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |c_n| = c$ entwickeln läßt.

Für die Lösung machen wir den Fourierschen Ansatz

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin n x;$$

zur Bestimmung von $v_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gewinnen wir dann ein System von unendlichvielen nichtlinearen Integralgleichungen, das wir durch sukzessive Approximationen auflösen. Dabei erweisen sich die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |v_n(t)|$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{dv_n}{dt}\right|$ als gleichmäßig konvergent, vorausgesetzt, daß $c$ hinreichend klein ist. Es wird dann gezeigt, daß diese Lösung $u(x, t)$ die einzige ihrer Art ist.

Im zweiten Teil wird der analoge Satz für die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = P\left(x, t; u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

bewiesen. Bezüglich der Funktion $P\left(x, t; u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ wird angenommen, daß sie sich in eine Potenzreihe von der Form $\sum_{r,s}^{1\ldots\infty} p_{r,s}(x, t)\, u^r \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^s$ entwickeln läßt. Die Funktionen $p_{r,s}(x, t)$ sind jetzt nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen nach $x$ in dem ganzen in Frage kommenden Bereiche stetig und gleichmäßig beschränkt. Diesmal muß angenommen werden, daß $\sum_n n^3 |c_n|$ konvergiert.

Es sei zum Schluß bemerkt, daß die Ergebnisse in verschiedenen Richtungen verallgemeinert werden können.

## Erster Teil.

## Die Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = P(x, t; u)$.

### § 1.

### Problemstellung.

Es sei diejenige nebst ihren partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ in dem Bereiche

$$0 \leqq x \leqq \pi, \quad 0 \leqq t$$

stetige, oder, wie wir kürzer sagen wollen, reguläre Lösung $u(x, t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = P(x, t; u) \tag{1}$$

zu bestimmen, die den Randbedingungen

$$u = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{sowie} \quad x = \pi \quad \text{und} \quad 0 \leqq t, \tag{2}$$

$$u = f(x) \quad \text{für} \quad t = 0 \quad \text{und} \quad 0 \leqq x \leqq \pi \tag{3}$$

genügt, unter $f(x)$ eine Funktion verstanden, die sich in der Form

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n x \tag{4}$$

mit konvergentem $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |c_n|$ darstellen läßt. Es sind dann $f'(x)$ und $f''(x)$ in $\langle 0, \pi \rangle$ vorhanden und stetig. Ferner ist

$$f(0) = f(\pi) = f''(0) = f''(\pi) = 0. \tag{5}$$

Auch setzen wir voraus, daß die Funktion $P(x, t; u)$ sich in eine Potenzreihe von der Form

$$P(x, t; u) = \sum_{\nu=2}^{\infty} p_\nu(x, t)\, u^\nu \tag{6}$$

entwickeln läßt, wo die Koeffizienten $p_\nu(x; t)$ nebst ihren partiellen Ableitungen $\frac{\partial p_\nu}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 p_\nu}{\partial x^2}$ in $0 \leqq x \leqq \pi$, $t \geqq 0$ stetig sind und daselbst für alle $\nu$ den Beziehungen

$$|p_\nu(x, t)|, \quad \left|\frac{\partial p_\nu}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 p_\nu}{\partial x^2}\right| \leqq M \tag{7}$$

genügen, wo $M$ eine feste positive Zahl bedeutet. Die Reihe für $P(x, t; u)$ konvergiert gewiß für $|u \leqq q < 1$ unbedingt und gleichmäßig.

Wir machen den Fourierschen Ansatz

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin n x \tag{8}$$

und nehmen an, daß die Reihe rechter Hand in dem Bereiche $0 \leqq x \leqq \pi$, $t \geqq 0$ unbedingt und gleichmäßig konvergiert. Ist

$$v_n(0) = c_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

so ist die Randbedingung (3) erfüllt. Es ist weiter

$$p_\nu(x,t)\,u^\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n x \frac{2}{\pi} \int_0^\pi p_\nu(\beta,t) \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} v_j(t) \sin j\beta \right\}^\nu \sin n\beta\, d\beta,$$

darum für $\nu \geqq 2$,

$$p_\nu(x,t)\,u^\nu = \sum_{n=1}^{\infty} z_n^{(\nu)}(t) \sin n x, \tag{10}$$

wo

$$z_n^{(\nu)}(t) = \sum_{l_1,l_2,\ldots,l_\nu}^{1\ldots\infty} a_{l_1,l_2,\ldots,l_\nu}^{(n)}(t)\, v_{l_1}(t)\, v_{l_2}(t) \ldots v_{l_\nu}(t) \tag{11}$$

ist mit

$$a_{l_1,l_2,\ldots,l_\nu}^{(n)}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi p_\nu(\beta,t) \sin l_1\beta \sin l_2\beta \ldots \sin l_\nu\beta \sin n\beta\, d\beta. \tag{12}$$

## § 2.
## Hilfssatz.

Für alle $\nu \geqq 2$ und $l_1, l_2, \ldots, l_\nu \geqq 1$ und $n \geqq 1$ ist

$$\frac{\left| a_{l_1,\ldots,l_\nu}^{(n)} \right|}{l_1^2 \ldots l_\nu^2} \leqq \frac{2M(\nu+1)^2}{n^2}.$$

In der Tat erhalten wir aus (12) nach einer zweimaligen teilweisen Integration[3])

$$a_{l_1,\ldots,l_\nu}^{(n)} = -\frac{2}{n^2\pi} \int_0^\pi \sin n\beta \frac{d^2}{d\beta^2} \{ p_\nu(\beta,t) \sin l_1\beta \ldots \sin l_\nu\beta \}\, d\beta \tag{13}$$

$$= -\frac{2}{n^2\pi} \int_0^\pi \sin n\beta \left\{ p_\nu(\beta,t) \frac{d^2}{d\beta^2} (\sin l_1\beta \ldots \sin l_\nu\beta) \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial p_\nu}{\partial \beta} \frac{d}{d\beta} (\sin l_1\beta \ldots \sin l_\nu\beta) + \frac{\partial^2 p_\nu}{\partial \beta^2} (\sin l_1\beta \ldots \sin l_\nu\beta) \right\} d\beta$$

$$= -\frac{2}{n^2\pi} \int_0^\pi \sin n\beta \left\{ -(l_1^2 + \ldots + l_\nu^2)\, p_\nu(\beta,t) \sin l_1\beta \ldots \sin l_\nu\beta \right. \tag{14}$$

$$+ 2\, p_\nu(\beta,t) \sum_{j<k}^{1\ldots\nu} l_j l_k \sin l_1\beta \ldots \cos l_j\beta \ldots \cos l_k\beta \ldots \sin l_\nu\beta$$

$$\left. + 2\frac{\partial p_\nu}{\partial \beta} \sum_{k=1}^{\nu} l_k \sin l_1\beta \ldots \cos l_k\beta \ldots \sin l_\nu\beta + \frac{\partial^2 p_\nu}{\partial \beta^2} \sin l_1\beta \ldots \sin l_\nu\beta \right\} d\beta.$$

[3]) Im folgenden lassen wir die unabhängige Veränderliche $t$ in $a_{l_1,l_2,\ldots l_\nu}^{(n)}$ fort und verstehen unter $a_{l_1,\ldots,l_\nu}^{(n)}$ immer eine Funktion von $t$.

Es ist dabei zu beachten, daß rechter Hand im zweiten Summanden jedes Glied zwei Cos-Faktoren und sonst nur Sin-Faktoren enthält, im dritten in jedem Glied nur ein Cos-Faktor und sonst nur Sin-Faktoren vorkommen.

Es ist also, da $l_1, l_2, \ldots, l_\nu \geqq 1$ und

$$\frac{l_1^2+l_2^2+\ldots+l_\nu^2}{l_1^2 l_2^2 \ldots l_\nu^2} = \frac{1}{l_2^2 \ldots l_\nu^2} + \frac{1}{l_1^2 l_3^2 \ldots l_\nu^2} + \ldots + \frac{1}{l_1^2 \ldots l_{\nu-1}^2} \leqq \nu$$

ist,

$$(15) \qquad \frac{\left|a^{(n)}_{l_1,\ldots,l_\nu}\right|}{l_1^2 \ldots l_\nu^2} \leqq \frac{2\nu}{n^2\pi}\int_0^\pi \left| p_\nu(\beta, t) \sin l_1\beta \ldots \sin l_\nu\beta \sin n\beta \right| d\beta$$

$$+ \frac{4}{n^2\pi}\sum_{j<k}^{1\ldots\nu}\int_0^\pi \left| p_\nu(\beta, t) \sin l_1\beta \ldots \cos l_j\beta \ldots \cos l_k\beta \ldots \sin n\beta \right| d\beta$$

$$+ \frac{4}{n^2\pi}\sum_{k=1}^{\nu}\int_0^\pi \left| \frac{\partial p_\nu}{c\beta} \sin l_1\beta \ldots \cos l_k\beta \ldots \sin l_\nu\beta \sin n\beta \right| d\beta$$

$$+ \frac{2}{n^2\pi}\int_0^\pi \left| \frac{\partial^2 p_\nu}{\partial\beta^2} \sin l_1\beta \ldots \sin l_\nu\beta \sin n\beta \right| d\beta,$$

und wir erhalten schließlich wegen (7) für alle $\beta$ in $\langle 0, \pi\rangle$ und alle $t$:

$$(16) \qquad \frac{\left|a^{(n)}_{l_1,\ldots,l_\nu}\right|}{l_1^2 \ldots l_\nu^2} \leqq \frac{2M}{n^2}\left\{\nu + 2\frac{\nu(\nu-1)}{2} + 2\nu + 1\right\} = \frac{2M(\nu+1)^2}{n^2}.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

## § 3.

## Zurückführung auf ein System von Integralgleichungen.

Wir kehren jetzt zu unserer Aufgabe zurück und setzen voraus, daß die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 v_n(t) \sin nx \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dv_n}{dt} \sin nx$$

für alle $x$ in $\langle 0, \pi\rangle$ und alle $t$ gleichmäßig konvergieren. Aus (1), (6), (8) und (10) erhalten wir dann

$$(17) \qquad -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 v_n(t) \sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dv_n}{dt} \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=2}^{\infty} z_n^{(\nu)}(t) \sin nx,$$

darum für alle ganzzahligen positiven $n$

$$(18) \qquad \frac{dv_n}{dt} + n^2 v_n(t) = -\sum_{\nu=2}^{\infty} z_n^{(\nu)}(t).$$

Eine Lösung dieser Gleichung, die der Anfangsbedingung $v_n(0) = c_n$ genügt, ist

$$(19) \qquad v_n(t) = c_n e^{-n^2 t} - \int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\, d\delta \sum_{\nu=2}^{\infty} z_n^{(\nu)}(\delta)$$

$$= c_n e^{-n^2 t} - \int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\, d\delta \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{l_1, \ldots, l_\nu}^{1 \ldots \infty} a_{l_1, \ldots, l_\nu}^{(n)} v_{l_1}(\delta) \ldots v_{l_\nu}(\delta).$$

Es sei

$$(20) \qquad \omega_n(t) = n^2 v_n(t), \qquad n^2 c_n = \gamma_n$$

gesetzt, dann ist

$$(21) \quad \omega_n(t) = \gamma_n e^{-n^2 t} - n^2 \int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\, d\delta \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{l_1, \ldots, l_\nu}^{1 \ldots \infty} \frac{a_{l_1, \ldots, l_\nu}^{(n)}}{l_1^2 \ldots l_\nu^2} \omega_{l_1}(\delta) \ldots \omega_{l_\nu}(\delta).$$

Wir lösen dieses System von Integralgleichungen durch sukzessive Approximationen auf, indem wir setzen

$$(22) \qquad \omega_n^{(0)}(t) = \gamma_n e^{-n^2 t}$$

und für $m \geqq 1$

$$\omega_n^{(m)}(t) = \gamma_n e^{-n^2 t} - n^2 \int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\, d\delta \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{l_1, \ldots, l_\nu}^{1 \ldots \infty} \frac{a_{l_1, \ldots, l_\nu}^{(n)}}{l_1^2 \ldots l_\nu^2} \omega_{l_1}^{(m-1)}(\delta) \ldots \omega_{l_\nu}^{(m-1)}(\delta).$$

Nun ist aber für alle $t > 0$ und alle $n \geqq 1$

$$(24) \qquad \left| \int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\, d\delta \right| = \left| e^{-n^2 t} \int_0^t e^{n^2 \delta}\, d\delta \right| = \left| \frac{1}{n^2} \frac{e^{n^2 t} - 1}{e^{n^2 t}} \right| \leqq \frac{1}{n^2}.$$

Aus (23) erhalten wir also wegen (16) und (24) für alle $t$, falls $\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(m-1)}(\delta)|$ für alle $\delta$ konvergiert:

$$|\omega_n^{(m)}(t)| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{1}{n^2} \frac{2M}{n^2} \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu+1)^2 \left\{ \max \sum_{l_1, \ldots, l_\nu}^{1 \ldots \infty} |\omega_{l_1}^{(m-1)}(\delta)| \ldots |\omega_{l_\nu}^{(m-1)}(\delta)| \right\}$$

und, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ und $\sum_n |\gamma_n| = \sum_n n^2 |c_n| = c$ ist,

$$(25) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(m)}(t)| \leqq c + \frac{M\pi^2}{3} \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu+1)^2 \left\{ \max \sum_{n}^{1 \ldots \infty} |\omega_n^{(m-1)}(t)| \right\}^{\nu}.$$

Aus (22) erhalten wir für alle $t$:

$$(26) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(0)}(t)| \leqq \sum_n |\gamma_n| = c.$$

Dieser Wert, in (25) eingesetzt, ergibt für $m = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(1)}(t)| = c + \frac{M\pi^2}{3} \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu+1)^2 c^{\nu}.$$

Nun ist, wie man leicht nachprüft, $(\nu+1)^2 \leqq 3^\nu$ für alle $\nu \geqq 2$, darum gilt für $3c<1$, d. h. $c<\frac{1}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(1)}(t)| < c + \frac{M\pi^2}{3}\sum_{\nu=2}^{\infty}(3c)^\nu = c + \frac{M\pi^2}{3}\frac{9c^2}{1-3c}.$$

Wir nehmen weiter an, daß auch

$$\frac{3M\pi^2c^2}{1-3c} < c, \quad \text{d. h.} \quad c < \frac{1}{3(M\pi^2+1)} \tag{27}$$

ist, dann haben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(1)}(t)| < c + c = 2c < 1.$$

Diesen Wert setzen wir wiederum in (25) für $m=2$ ein und erhalten für $6c<1$, d. h. $c<\frac{1}{6}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(2)}(t)| < c + \frac{M\pi^2}{3}\sum_{\nu=2}^{\infty}(\nu+1)^2(2c)^\nu < c + \frac{M\pi^2}{3}\sum_{\nu=2}^{\infty}(6c)^\nu = c + \frac{M\pi^2}{3}\frac{36c^2}{1-6c}$$

Wir nehmen weiter an, daß sogar

$$\frac{12M\pi^2c^2}{1-6c} < c, \quad \text{d. h.} \quad c < \frac{1}{12M\pi^2+6} \tag{28}$$

ist, und erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(2)}(t)| < c + c = 2c < 1.$$

Ganz allgemein finden wir also für alle $m \geqq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(m)}(t)| < 2c < 1, \tag{29}$$

sofern $c$ der Ungleichheit (28) genügt.

Wir beweisen jetzt, daß die Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(m+1)} - \omega_n^{(m)}(t)| \tag{30}$$

für alle $t$ gleichmäßig konvergiert. In der Tat ist

$$\omega_n^{(m+1)}(t) - \omega_n^{(m)}(t) = -n^2\int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\,d\delta \sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{l_1,\ldots,l_\nu}^{1\ldots\infty} \frac{a_{l_1,\ldots,l_\nu}^{(n)}}{l_1^2\ldots l_\nu^2} \tag{31}$$

$$\times\{\omega_{l_1}^{(m)}(\delta)\ldots\omega_{l_\nu}^{(m)}(\delta) - \omega_{l_1}^{(m-1)}(\delta)\ldots\omega_{l_\nu}^{(m-1)}(\delta)\}$$

$$= -n^2\int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\,d\delta \sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{l_1,\ldots,l_\nu}^{1\ldots\infty} \frac{a_{l_1,\ldots,l_\nu}^{(n)}}{l_1^2\ldots l_\nu^2}\{\omega_{l_1}^{(m)}(\delta)\ldots\omega_{l_{\nu-1}}^{(m)}(\delta)(\omega_{l_\nu}^{(m)}(\delta) - \omega_{l_\nu}^{(m-1)}$$

$$+ \omega_{l_\nu}^{(m-1)}(\delta)\,\omega_{l_1}^{(m)}(\delta)\ldots\omega_{l_{\nu-2}}^{(m)}(\delta)(\omega_{l_{\nu-1}}^{(m)}(\delta) - \omega_{l_{\nu-1}}^{(m-1)}(\delta))$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \omega_{l_\nu}^{(m-1)}(\delta)\,\omega_{l_{\nu-1}}^{(m-1)}(\delta)\ldots\omega_{l_2}^{(m-1)}(\delta)(\omega_{l_1}^{(m)}(\delta) - \omega_{l_1}^{(m-1)}(\delta))\}.$$

Wir erhalten dann wegen (16), (29) und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(m+1)}(t) - \omega_n^{(m)}(t)| \leqq \frac{M\pi^2}{3} \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu(\nu+1)^2 (2c)^{\nu-1} \operatorname{Max} \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(m)}(t) - \omega_n^{(m-1)}(t)|.$$

Wie man leicht zeigen kann, haben wir aber $\nu(\nu+1)^2 \leqq 18^{\nu-1}$ für alle $\nu \geqq 2$, darum

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(m+1)}(t) - \omega_n^{(m)}(t)| < \frac{M\pi^2}{3} \sum_{\nu=2}^{\infty} (36c)^{\nu-1} \operatorname{Max} \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(m)}(t) - \omega_n^{(m-1)}(t)|.$$

Wir nehmen jetzt an, daß

$$36c < 1, \quad \text{d. h.} \quad c < \frac{1}{36} \tag{34}$$

ist, und erhalten aus (33)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(m+1)}(t) - \omega_n^{(m)}(t)| < \frac{M\pi^2}{3} \frac{36c}{1-36c} \operatorname{Max} \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(m)}(t) - \omega_n^{(m-1)}(t)|. \tag{35}$$

Es sei auch

$$\frac{12 M\pi^2 c}{1-36c} < 1, \quad \text{d. h.} \quad c < \frac{1}{12M\pi^2 + 36}. \tag{36}$$

Aus (35) erhalten wir, indem wir dasselbe Verfahren $m$-mal wiederholen,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(m+1)}(t) - \omega_n^{(m)}(t)| < \left(\frac{12 M\pi^2 c}{1-36c}\right)^m \operatorname{Max} \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(1)}(t) - \omega_n^{(0)}(t)|,$$

mithin

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(m+1)}(t) - \omega_n^{(m)}(t)| < \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{12 M\pi^2 c}{1-36c}\right)^m \operatorname{Max} \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(1)}(t) - \omega_n^{(0)}(t)|.$$

Wegen (36) haben wir

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{12 M\pi^2 c}{1-36c}\right)^m = \frac{1-36c}{1-c(12M\pi^2+36)}; \tag{38}$$

ferner ist

$$\omega_n^{(1)}(t) - \omega_n^{(0)}(t) = -n^2 \int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\, d\delta \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{l_1, \ldots, l_\nu}^{1 \ldots \infty} \frac{a_{l_1, \ldots, l_\nu}^{(n)}}{l_1^2 \cdots l_\nu^2} \omega_{l_1}^{(0)}(\delta) \cdots \omega_{l_\nu}^{(0)}(\delta),$$

darum wegen (16), (24) und (26) für alle $t$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(1)}(t) - \omega_{n_i}^{(0)}(t)| \leqq \frac{M\pi^2}{3} \sum_{\nu=2}^{\infty} (\nu+1)^2 c^\nu < \frac{M\pi^2}{3} \sum_{\nu=2}^{\infty} (3c)^\nu = \frac{3 M\pi^2 c^2}{1-3c}.$$

Wenn wir (38) und (39) in (37) einsetzen, erhalten wir

$$(40)\qquad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\omega_n^{(m+1)}(t)-\omega_n^{(m)}(t)|<\frac{3M\pi^2c^2}{1-3c}\,\frac{1-36c}{1-c(12\pi^2M+36)},$$

und die Reihe (30) konvergiert, wie behauptet, gleichmäßig.

Hieraus ersehen wir, daß alle Grenzwerte

$$(41)\qquad \omega_n(t)=\lim_{m\to\infty}\omega_n^{(m)}(t)\qquad (n=1,2,\ldots)$$

existieren und stetige Funktionen von $t$ darstellen. Es ist außerdem für alle $t$

$$(42)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}|\omega_n(t)|<1.$$

Aus der Konvergenz von (30) folgt weiter, daß

$$(43)\qquad \omega(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^{(m)}(t)$$

ist. Aus der Gleichung (19) erhalten wir für $m\to\infty$:

$$(44)\qquad \omega_n(t)=\gamma_n e^{-n^2t}-n^2\int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\,d\delta\sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{l_1,\ldots,l_\nu}^{1\ldots\infty}\frac{a_{l_1,\ldots,l_\nu}^{(n)}}{l_1^2\cdots l_\nu^2}\,\omega_{l_1}(\delta)\ldots\omega_{l_\nu}(\delta).$$

Es sei jetzt wieder $n^2c_n=\gamma_n$ und

$$(45)\qquad v_n(t)=\frac{1}{n^2}\omega_n(t)\qquad (n=1,2,\ldots)$$

gesetzt. Aus (44) erhalten wir dann

$$(46)\qquad v_n(t)=c_n e^{-n^2t}-\int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\,d\delta\sum_{\nu=2}^{\infty}\sum_{l_1,\ldots,l_\nu}^{1\ldots\infty}a_{l_1,\ldots,l_\nu}^{(n)}\,v_{l_1}(\delta)\ldots v_{l_\nu}(\delta).$$

$v_n(t)$ genügt also für $n\geqq 1$ der Integralgleichung (19), somit der Differentialgleichung (18). Setzt man hier für $v_{l_1}(t),\ldots,v_{l_\nu}(t)$ ihre Werte aus (45) ein, so sieht man, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=2}^{\infty}|z_n^{(\nu)}(t)|$ gleichmäßig konvergiert. Auch konvergiert wegen (42) die Reihe $\sum_n|n^2v_n(t)|=\sum_n|\omega_n(t)|$. Es ist also wegen (17) auch $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{dv_n}{dt}\right|$ gleichmäßig konvergent.

Führt man jetzt die Überlegungen schrittweise rückwärts aus, so sieht man, daß

$$(47)\qquad u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)\sin nx$$

den Randbedingungen (2) und (3) und der Differentialgleichung (1) genügt und somit die gesuchte Lösung ist.

## § 4.

## Unität der Lösung.

Wir zeigen jetzt, daß die soeben gefundene Lösung (47) die einzige ist, die sich als eine gleichmäßig konvergente Reihe von der Form $\sum_n v_n(t) \sin nx$ darstellen läßt, und die so beschaffen ist, daß auch die Reihen $\sum_n n^2 v_n(t)$ und $\sum_n \frac{dv_n}{dt}$ gleichmäßig konvergieren.

Der Beweis hängt von der Tatsache ab, daß die Differentialgleichung (21) keine anderen Lösungen $\omega_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ hat, welche so beschaffen sind, daß die Reihe $\sum_n \omega_n(t)$ konvergiert. Man sieht dies folgendermaßen ein.

Wir haben

$$\omega_n(t) - \omega_n^{(m)}(t) = -n^2 \int_0^t e^{-n^2(t-\delta)} d\delta \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{l_1, \ldots, l_\nu}^{1 \ldots \infty} \frac{a_{l_1, \ldots, l_\nu}^{(n)}}{l_1^2 \ldots l_\nu^2} \{\bar{\omega}_{l_1}(\delta) \ldots \bar{\omega}_{l_\nu}(\delta) - \omega_{l_1}^{(m-1)}(\delta) \ldots \omega_{l_\nu}^{(m-1)}(\delta)$$

$$= -n^2 \int_0^t e^{-n^2(t-\delta)} d\delta \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{l_1 \ldots l_\nu}^{1 \ldots \infty} \frac{a_{l_1, \ldots, l_\nu}^{(n)}}{l_1^2 \ldots l_\nu^2} \{\bar{\omega}_{l_1}(\delta) \ldots \bar{\omega}_{l_{\nu-1}}(\delta) (\bar{\omega}_{l_\nu}(\delta) - \omega_{l_\nu}^{(m-1)}(\delta)) + \ldots$$

$$+ \omega_{l_\nu}^{(m-1)}(\delta) \ldots \omega_{l_2}^{(m-1)}(\delta) (\bar{\omega}_{l_1}(\delta) - \omega_{l_1}^{(m-1)}(\delta))\}.$$

Hieraus folgt, wenn etwa

$$\sum_n |\bar{\omega}_n(t)| \leqq \bar{c} < 2c \tag{49}$$

angenommen wird, wegen $\sum_n |\omega_n^{(m-1)}(t)| < 2c < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\omega}_n(t) - \omega_n^{(m)}(t)| < \frac{M\pi^2}{3} \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu(\nu+1)^2 (2c)^\nu \operatorname{Max} \sum_n |\omega_n(t) - \omega_n^{(m-1)}(t)| \tag{50}$$

$$< \frac{12 M \pi^2 c}{1 - 36c} \operatorname{Max} \sum_n |\bar{\omega}_n(t) - \omega_n^{(m-1)}(t)|.$$

Nach einer $m$-maligen Wiederholung erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\omega}_n(t) - \omega_n^{(m)}(t)| < \left(\frac{12 M \pi^2 c}{1 - 36c}\right)^m \operatorname{Max} \sum_n |\omega_n(t) < \omega_n^{(0)}(t)|. \tag{51}$$

Da wegen (36) $\frac{12 M \pi^2 c}{1 - 36c} < 1$ ist, so ergibt sich

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\omega}_n(t) - \omega_n^{(m)}(t)| = 0, \tag{52}$$

mithin

$$\bar{\omega}_n(t) = \lim_{m \to \infty} \omega_n^{(m)}(t) = \omega_n(t), \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{53}$$

Dies besagt aber, daß für alle $t$ die beiden Lösungen $\omega_n(t)$ und $\bar{\omega}_n(t)$ zusammenfallen; damit ist der Unitätsbeweis erledigt.

## Zweiter Teil.

## Die Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = P\left(x, t; u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$.

### § 1.

### Problemstellung.

Wir gehen jetzt zu der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = P\left(x, t; u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{1}$$

über und suchen die reguläre Lösung $u(x, t)$ unter den Randbedingungen

$$u = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = \pi, \quad 0 \leqq t, \tag{2}$$

$$u = f(x) \quad \text{für} \quad t = 0 \quad \text{und} \quad 0 \leqq x \leqq \pi, \tag{3}$$

wo $f(x)$ sich in der Form

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n x \tag{4}$$

mit konvergentem $\sum_n n^3 |c_n|$ darstellen läßt. Über die Funktion $P\left(x, t; u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ wird vorausgesetzt, daß sie sich in eine Potenzreihe

$$P\left(x, t; u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \sum_{r,s}^{1\ldots\infty} p_{r,s}(x, t)\, u^r \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^s \tag{5}$$

entwickeln läßt. Dabei sind die Funktionen $p_{r,s}(x, t)$ nebst ihren Ableitungen $\frac{\partial p_{r,s}}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 p_{r,s}}{\partial x^2}$ in $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq t$ stetig, und es gilt daselbst für alle $r, s$

$$|p_{r,s}|, \quad \left|\frac{\partial p_{r,s}}{\partial x}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 p_{r,s}}{\partial x^2}\right| \leqq M, \tag{6}$$

wo $M$ eine feste Zahl bedeutet. Die Reihe (5) konvergiert alsdann für $|u|, \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqq q < 1$ im ganzen Bereiche unbedingt und gleichmäßig.

Es sei noch besonders darauf hingewiesen, daß in (5) $r$ den Wert Null nicht annehmen darf. Andernfalls wird nämlich die Funktion $P$ den Randbedingungen (2) nicht genügen und folglich sich in die Sinus-Reihe nicht entwickeln lassen.

Für die Lösung von (1) machen wir den Ansatz

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin n x, \quad v_n(0) = c_n \tag{7}$$

und erhalten zunächst rein formal

$$p_{r,s}(x, t)\, u^r \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^s = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n x \, \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} p_{r,s}(\beta, t)\, u^r(\beta, t) \left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^s \sin n\beta \, d\beta = \sum_{n=1}^{\infty} z_n^{(r,s)}(t) \sin \tag{8}$$

wobei

$$(9)\qquad z_n^{(r,s)}(t) = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_r \\ l_1,\ldots,l_s}}^{1\ldots\infty} a_{k,l}^{(n)} v_{k_1}(t)\ldots v_{k_r}(t)\, v_{l_1}(t)\ldots v_{l_s}(t)$$

ist, mit

$$(10)\quad a_{k,l}^{(n)} = \frac{2}{\pi} l_1 l_2 \ldots l_s \int_0^\pi p_{r,s}(\beta, t) \sin k_1\beta \ldots \sin k_r\beta \cos l_1\beta \ldots \cos l_s\beta \sin n\beta\, d\beta.$$

Um den Gedankengang der weiteren Untersuchung nicht zu unterbrechen, schicken wir hier einen Hilfssatz voraus.

## § 2.

## Hilfssatz.

Für alle $r, s \geqq 1$ und alle $k_1, \ldots, l_s \geqq 1$ ist

$$(11)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,|\,a_{k,l}^{(n)}\,|}{k_1^2 \ldots k_r^2\, l_1^3 \ldots l_s^3} < \pi M \alpha_{r,s},$$

wobei

$$\alpha_{r,s}^2 = \frac{1}{3}\{(r+s)(r+s+2)+1\}^2$$

ist. In der Tat folgt aus (10) nach zweimaliger Teilintegration

$$(12)\quad \frac{a_{k,l}^{(n)}}{l_1 \ldots l_s} = -\frac{2}{n^2\pi} \int_0^\pi \sin n\beta \frac{d^2}{d\beta^2}\{p_{r,s}(\beta, t) \sin k_1\beta \ldots \sin k_r\beta \cos l_1\beta \ldots \cos l_s\beta\}\, d\beta.$$

Wir setzen jetzt zur Abkürzung

$$b_{k,l}^{(n)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi p_{r,s}(\beta, t) \sin k_1\beta \ldots \sin k_r\beta \cos l_1\beta \ldots \cos l_s\beta \sin n\beta\, d\beta;$$

$$c_{l_j,l_h}^{(n)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi p_{r,s}(\beta, t) \sin k_1\beta \ldots \sin k_r\beta \cos l_1\beta \ldots \sin l_j\beta \ldots \sin l_h\beta \ldots \cos l_s\beta \sin n\beta\, d\beta;$$

$$d_{k_j,k_h}^{(n)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi p_{r,s}(\beta, t) \sin k_1\beta \ldots \cos k_j\beta \ldots \cos k_h\beta \ldots \sin k_r\beta \cos l_1\beta \ldots \cos l_s\beta \sin n\beta\, d\beta;$$

$$e_{k_j,l_h}^{(n)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi p_{r,s}(\beta, t) \sin k_1\beta \ldots \cos k_j\beta \ldots \sin k_r\beta \cos l_1\beta \ldots \sin l_h\beta \ldots \cos l_s\beta \sin n\beta\, d\beta;$$

$$x_{k_j,l}^{(n)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial p_{r,s}}{\partial\beta} \sin k_1\beta \ldots \cos k_j\beta \ldots \sin k_r\beta \cos l_1\beta \ldots \cos l_s\beta \sin n\beta\, d\beta;$$

$$y_{k,l_h}^{(n)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial p_{r,s}}{\partial\beta} \sin k_1\beta \ldots \sin k_r\beta \cos l_1\beta \ldots \sin l_h\beta \ldots \cos l_s\beta \sin n\beta\, d\beta;$$

$$z_{k,l}^{(n)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial^2 p_{r,s}}{\partial\beta} \sin k_1\beta \ldots \sin k_r\beta \cos l_1\beta \ldots \cos l_s\beta \sin n\beta\, d\beta.$$

Dann erhalten wir aus (12) nach einer leichten Ausrechnung

$$(14)\quad \frac{a_{k,l}^{(n)}}{l_1 \dots l_s} = \frac{1}{n^2}\Big\{(k_1^2 + \dots + k_r^2 + l_1^2 + \dots + l_s^2)\, b_{k,l}^{(n)} - 2 \sum_{j<h}^{1\dots s} l_j l_h c_{l_j, l_h}^{(n)} - 2 \sum_{j<h}^{1\dots r} k_j k_h d_{k_j, k_h}^{(n)}$$
$$+ 2 \sum_{j=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} k_j l_h e_{k_j, l_h}^{(n)} - 2 \sum_{j=1}^{r} k_j x_{k_j, l}^{(n)} + 2 \sum_{h=1}^{s} l_h y_{k, l_h}^{(n)} - z_{k,l}^{(n)}\Big\},$$

mithin wegen $k_1, \dots, k_r,\ l_1, \dots, l_s \geqq 1$

$$(15)\quad \frac{a_{k,l}^{(n)}}{k_1^2 \dots k_r^2\, l_1^3 \dots l_s^3} \leqq \frac{1}{n^2}\Big\{(r+s)\, b_{k,l}^{(n)} - 2 \sum_{j<h}^{1\dots s} c_{l_j, l_h}^{(n)} - 2 \sum_{j<h}^{1\dots s} d_{k_j, k_h}^{(n)}$$
$$+ 2 \sum_{j=1}^{r} \sum_{h=1}^{s} e_{k_j, l_h}^{(n)} - 2 \sum_{j=1}^{r} x_{k_j, l}^{(n)} + 2 \sum_{h=1}^{s} y_{k, l_h}^{(n)} - z_{k,l}^{(n)}\Big\}.$$

Nun gilt aber

$$(b_{k,l}^{(n)})^2 = \frac{4}{\pi^2}\Big\{\int_0^{\pi} p_{r,s}(\beta, t) \sin k_1 \beta \dots \cos l_s \beta \sin n\beta\, d\beta\Big\}^2,$$

darum wegen (6)

$$(16)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_{k,l}^{(n)})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2}\Big\{\int_0^{\pi} p_{r,s}(\beta, t) \sin k_1 \beta \dots \cos l_s \beta \sin n\beta\, d\beta\Big\}^2$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} p_{r,s}^2(\beta, t) \sin^2 k_1 \beta \dots \cos^2 l_s \beta\, d\beta \leqq 2 M^2.$$

Wir sehen ferner leicht ein, daß für alle $j, h$ die Funktionen $c_{j,l_h}^{(n)}, d_{k_j,k_h}^{(n)}, \dots, z_{k,l}^{(n)}$ derselben Ungleichheitsbeziehung (16) genügen. Im folgenden schreiben wir einfachheitshalber für $|b_{k,l}^{(n)}|, |c_{l_j,l_h}^{(n)}|, \dots, |z_{k,l}^{(n)}|$ kürzer $b, c, \dots, z$.

Unter Benutzung der Schwarzschen Ungleichheit ergibt sich dann

$$\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, a_{k,l}^{(n)}}{k_1^2 \dots k_r^2\, l_1^3 \dots l_s^3}\Big\}^2$$
$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{n}\Big\{(r+s)\, b + 2 \sum_{\sigma=1}^{\frac{s(s-1)}{2}} c_\sigma + 2 \sum_{\sigma=1}^{\frac{r(r-1)}{2}} d_\sigma + 2 \sum_{\sigma=1}^{rs} e_\sigma + 2 \sum_{\sigma=1}^{r} x_\sigma + 2 \sum_{\sigma=1}^{s} y_\sigma + z\Big\}^2.$$

Wenn wir hier die rechte Seite entwickeln und darin wieder die Ungleichheitsbeziehungen $2bc < b^2 + c^2$ usw. anwenden, erhalten wir

$$\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, |a_{k,l}^{(n)}|}{k_1^2 \dots k_r^2\, l_1^3 \dots l_s^3}\Big\}^2 \leqq \frac{\pi^2}{6}\{(r+s)(r+s+2)+1\}$$
$$\times \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{(r+s)\, b^2 + 2 \sum_{\sigma=1}^{\frac{s(s-1)}{2}} c_\sigma^2 + 2 \sum_{\sigma=1}^{\frac{r(r-1)}{2}} d_\sigma^2 + 2 \sum_{\sigma=1}^{rs} e_\sigma^2 + 2 \sum_{\sigma=1}^{r} x_\sigma^2 + 2 \sum_{\sigma=1}^{s} y_\sigma^2 + z^2\Big\}.$$

Nunmehr setzen wir hierin die Abschätzungen aus (16) ein und erhalten

$$(17)\quad \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,|a_{k,l}^{(n)}|}{k_1^2\dots k_r^2\; l_1^3\dots l_s^3}\right\}^2 \leqq \frac{\pi^2}{6}\,2M^2\{(r+s)(r+s+2)+1\}$$
$$\{(r+s)+s(s-1)+r(r-1)+2rs+2r+2s+1\}$$
$$=\pi^2 M^2\,\frac{1}{3}\{(r+s)(r+s+2)+1\}^2=\pi^2 M^2\alpha_{r,s}^2$$

und damit die Behauptung.

Wird endlich noch

$$(18)\qquad A_r=(r+1)(r+2),\qquad B_s=(s+1)(s+2),$$

gesetzt, so ergibt sich

$$(19)\qquad \alpha_{r,s}<(r+s)(r+s+2)+1<A_r B_s.$$

## § 3.

## Zurückführung auf Integralgleichungen.

Wir setzen jetzt voraus, daß die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 v_n(t)\sin nx \quad\text{und}\quad \sum_n \frac{dv_n}{dt}\sin nx$$

für alle $x$ in $\langle 0,\pi\rangle$ und alle $t$ unbedingt und gleichmäßig konvergieren und erhalten aus (1), (5), (7) und (8)

$$(20)\quad -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 v_n(t)\sin nx-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dv_n}{dt}\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r,s}^{1\dots\infty} z_n^{(r,s)}(t)\sin nx,$$

darum für alle $n\geqq 1$

$$(21)\qquad \frac{dv_n}{dt}+n^2 v_n(t)=-\sum_{r,s}^{1\dots\infty} z_n^{(r,s)}(t).$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $v_n(0)=c_n$ ist

$$(22)\quad v_n(t)=c_n e^{-n^2 t}-\int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\,d\delta\sum_{r,s}^{1\dots\infty} z_n^{(r,s)}(\delta)$$
$$=c_n e^{-n^2 t}-\int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\,d\delta\sum_{r,s}^{1\dots\infty}\sum_{\substack{k_1,\dots,k_r\\ l_1,\dots,l_s}}^{1\dots\infty} a_{k,l}^{(n)}\,v_{k_1}(\delta)\dots v_{k_r}(\delta)\,v_{l_1}(\delta)\dots v_{l_s}(\delta).$$

Es sei

$$(23)\qquad \omega_n(t)=n^3 v_n(t),\qquad \gamma_n=n^3 c_n$$

gesetzt, dann erhalten wir aus (22)

$$(24)\quad \omega_n(t) = \gamma_n e^{-n^2 t} - n^3 \int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\, d\delta \sum_{r,s}^{1\ldots\infty} \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_r \\ l_1,\ldots,l_s}}^{1\ldots\infty} \frac{a_{k,l}^{(n)}}{k_1^3 \ldots k_r^3\, l_1^3 \ldots l_s^3}\, \omega_{k_1}(\delta) \ldots \omega_{k_r}(\delta)\, \omega_{l_1}(\delta) \ldots \omega$$

Dieses System von Integralgleichungen lösen wir durch sukzessive Approximationen auf und setzen für diesen Zweck

$$\omega_n^{(0)}(t) = \gamma_n e^{-n^2 t}$$

und für alle $m \geqq 1$

$$(25)\quad \omega_n^{(m)}(t) = \gamma_n e^{-n^2 t} - n^3 \int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\, d\delta \sum_{r,s}^{1\ldots\infty} \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_r \\ l_1,\ldots,l_s}}^{1\ldots\infty} \frac{a_{k,l}^{(n)}}{k_1^3 \ldots l_s^3}\, \omega_{k_1}^{(m-1)}(\delta) \ldots \omega_{l_s}^{(m-1)}(\delta)$$

Nun ist aber für $t > 0$ wegen (17)

$$(26)\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\, d\delta\, \frac{|a_{k,l}^{(n)}|}{k_1^3 \ldots l_s^3} < \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \frac{1}{n^2} \frac{|a_{k,l}^{(n)}|}{k_1^3 \ldots l_s^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,|a_{k,l}^{(n)}|}{k_1^3 \ldots l_s^3} < \pi M \alpha_{r,s}.$$

Aus (25) folgt daher, wenn wir noch

$$(27)\quad \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n| = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 |c_n| = c$$

setzen und zunächst annehmen, daß $\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(m-1)}(\delta)|$ für alle $\delta > 0$ konvergiert:

$$(28)\quad \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(m)}(t)| < c + \pi M \sum_{r,s}^{1\ldots\infty} \alpha_{r,s} \left\{ \max \sum_{n=1} |\omega_n^{(m-1)}(t)| \right\}^{r+s}.$$

Wir haben in (19) gezeigt, daß $\alpha_{r,s} < A_r B_s$ ist; darum gilt

$$(29)\quad \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(m)}(t)| < c + \pi M \sum_{r=1}^{\infty} A_r \left( \max \sum_{n} |\omega_n^{(m-1)}(t)| \right)^r \sum_{s=1}^{\infty} B_s \left( \max \sum_{n} |\omega_n^{(m-1)}(t)| \right)^s$$

Es ist jetzt für alle $t \geqq 0$

$$(30)\quad \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(0)}(t)| = \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n e^{-n^2 t}| \leqq \sum_{n} |\gamma_n| = c.$$

Wie sich leicht nachprüfen läßt, ist für $r, s \geqq 1$ $A_r < 6^r$, $B_s < 6^s$. Darum haben wir für $6c < 1$, d. h. $c < \frac{1}{6}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n^{(1)}(t)| < c + \pi M \sum_{r=1}^{\infty} (6c)^r \sum_{s=1}^{\infty} (6c)^s < c + \pi M \left( \frac{6c}{1-6c} \right)^2.$$

Wir nehmen $c$ im folgenden so klein an, daß auch

$$(31)\quad \pi M \left( \frac{6c}{1-6c} \right)^2 < c$$

ist, etwa

$$c < \frac{1}{36\pi M + 12}. \tag{32}$$

Dann haben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \omega_n^{(1)}(t) < c + c = 2c < 1.$$

Setzen wir diesen Wert in (29) für $m = 2$ ein, so ist wegen (32)

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' |\omega_n^{(2)}(t)| < c + \pi M \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} 6^r (2c)^r \right\}^2 < c + \pi M \left( \frac{12c}{1-12c} \right)^2.$$

Nehmen wir $c$ weiterhin so klein an, daß

$$c < \frac{1}{144\pi M + 24} \tag{33}$$

ist, so wird auch

$$\pi M \left( \frac{12c}{1-12c} \right)^2 < c,$$

und demzufolge

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' |\omega_n^{(2)}(t)| < c + c = 2c < 1.$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so erhalten wir für $m \geqq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' |\omega_n^{(m)}(t)| < 2c < 1. \tag{34}$$

Wir beweisen jetzt, daß die Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty}{}' |\omega_n^{(m+1)}(t) - \omega_n^{(m)}(t)| \tag{35}$$

für alle $t > 0$ gleichmäßig konvergiert.

In der Tat ist

$$\omega_n^{(m+1)}(t) - \omega_n^{(m)}(t) = -n^3 \int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\, d\delta \sum_{r,s}^{1\ldots\infty}{}' \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_r \\ l_1,\ldots,l_s}}^{1\ldots\infty}{}' \frac{a_{k,l}^{(n)}}{k_1^3 k_2^3 \ldots l_s^3}$$

$$\times \{\omega_{k_1}^{(m)}(\delta) \ldots \omega_{l_s}^{(m)}(\delta) - \omega_{k_1}^{(m-1)}(\delta) \ldots \omega_{l_s}^{(m-1)}(\delta)\}$$

$$= -n^3 \int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\, d\delta \sum_{r,s}^{1\ldots\infty}{}' \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_r \\ l_1,\ldots,l_s}}^{1\ldots\infty}{}' \frac{a_{k,l}^{(n)}}{k_1^3 \ldots l_s^3} \{\omega_{k_1}^{(m)}(\delta) \ldots \omega_{l_{s-1}}(\delta)(\omega_{l_s}^{(m)}(\delta) - \omega_{l_s}^{(m-1)}(\delta)) + \ldots$$

$$+ \omega_{l_s}^{(m-1)}(\delta)\, \omega_{l_{s-1}}^{(m-1)}(\delta) \ldots \omega_{k_2}^{(m-1)}(\delta)(\omega_{k_1}^{(m)}(\delta) - \omega_{k_1}^{(m-1)}(\delta))\}.$$

Wegen (26) und (34) gewinnen wir hieraus für alle $t$, falls $\sum_{n=1}^{\infty}{}' |\omega_n^{(m)}(\delta) - \omega_n^{(m-1)}(\delta)|$ für alle $\delta$ konvergiert,

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' |\omega_n^{(m+1)}(t) - \omega_n^{(m)}(t)| < \pi M \sum_{r,s}^{1\ldots\infty}{}' (r+s)\, \alpha_{r,s} (2c)^{r+s-1} \max \sum_{n=1}^{\infty}{}' |\omega_n^{(m)}(t) - \omega_n^{(m-1)}(t)|.$$

Da aber für alle $r, s \geqq 1$

$$r+s<(r+1)(s+1) \quad \text{und} \quad \alpha_{r,s}<A_r B_s$$

ist, erhalten wir wegen (37)

$$(38)\quad \sum_{n=1}^{\infty}|\omega_n^{(m+1)}(t)-\omega_n^{(m)}(t)|<\pi M \sum_{r=1}^{\infty}(r+1)A_r(2c)^{r-1}\sum_{s=1}^{\infty}(s+1)B_s(2c)^s \times \max \sum_{n=1}^{\infty}|\omega_n^{(m)}(t)-\omega_n^{(m-1)}(t)|.$$

Nunmehr schätzen wir die Summe der Reihen

$$\sum_{r=1}^{\infty}(r+1)A_r(2c)^{r-1}, \qquad \sum_{s=1}^{\infty}(s+1)B_s(2c)^s$$

ab. Wie man leicht nachprüft, ist

$$(r+1)A_r \leqq 36^{r-1} \qquad (r=2,3,\ldots)$$

und

$$(s+1)B_s \leqq 12^s \qquad (s=1,2,3,\ldots).$$

Demgemäß finden wir für $72c<1$, d. h. $c<\frac{1}{72}$,

$$(39)\quad \sum_{r=1}^{\infty}(r+1)A_r(2c)^{r-1}\leqq 12+\sum_{r=2}^{\infty}36^{r-1}(2c)^{r-1}<12+\frac{72c}{1-72c}=\frac{12-792c}{1-72c}$$

In ähnlicher Weise ergibt sich wegen $c<\frac{1}{72}<\frac{1}{24}$ die Ungleichheit

$$(40)\qquad \sum_{s=1}^{\infty}(s+1)B_s(2c)^s\leqq\sum_{s=1}^{\infty}12^s(2c)^s=\frac{24c}{1-24c}.$$

Unter Verwendung der Formeln (39) und (40) folgt aus (38)

$$(41)\quad \sum_{n=1}^{\infty}|\omega_n^{(m+1)}(t)-\omega_n^{(m)}(t)|<\pi M\frac{12-792c}{1-72c}\,\frac{24c}{1-24c}\max\sum_{n=1}^{\infty}|\omega_n^{(m)}(t)-\omega_n^{(m-1)}(t)|$$

Wir machen jetzt die weitere Annahme, daß

$$(42)\qquad 24\pi M\,\frac{12-792c}{1-72c}\,\frac{c}{1-24c}<1$$

ist; es sei etwa

$$(43)\qquad (288\pi M+96)c<1, \quad \text{d. h. } c<\frac{1}{288\pi M+96}.$$

Mit dieser Abschätzung für $c$ haben wir dann

$$(44)\quad \sum_{n=1}^{\infty}|\omega_n^{(m+1)}(t)-\omega_n^{(m)}(t)|<\frac{24\pi M c(12-792c)}{(1-72c)(1-24c)}\max\sum_{n=1}^{\infty}|\omega_n^{(m)}(t)-\omega_n^{(m-1)}(t)|$$

Wenden wir diese Formel $m$-mal an, dann erhalten wir

$$(45)\quad \sum_{n=1}^{\infty}|\omega_n^{(m+1)}(t)-\omega_n^{(m)}(t)|<\left\{\frac{24\pi M c(12-792c)}{(1-72c)(1-24c)}\right\}^m\max\sum_{n=1}^{\infty}|\omega_n^{(1)}(t)-\omega_n^{(0)}(t)|$$

und finden durch Summation über $m$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\omega_n^{(m+1)}(t)-\omega_n^{(m)}(t)|<\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{24\pi Mc(12-792c)}{(1-72c)(1-24c)}\right\}^m \max\sum_{n=1}^{\infty}|\omega_n^{(1)}(t)-\omega_n^{(0)}(t)|.$$

Wegen (42) ist die Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{24\pi Mc(12-792c)}{(1-72c)(1-24c)}\right\}^m \tag{47}$$

konvergent; ferner ist

$$\omega_n^{(1)}(t)-\omega_n^{(0)}(t)=-n^3\int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\,d\delta\sum_{r,s}^{1\ldots\infty}\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_r\\ l_1,\ldots,l_s}}^{1\ldots\infty}\frac{a_{k,l}^{(n)}}{k_1^3\ldots l_s^3}\,\omega_{k_1}^{(0)}(\delta)\ldots\omega_{l_s}^{(0)}(\delta).$$

Daher und wegen (26) und (30) gilt für alle $t$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\omega_n^{(1)}(t)-\omega_n^{(0)}(t)|<\pi M\sum_{r,s}^{1\ldots\infty}\alpha_{r,s}(2c)^{r+s}$$

$$<\pi M\sum_{r=1}^{\infty}A_r(2c)^r\sum_{s=1}^{\infty}B_s(2c)^s<\pi M\sum_{r=1}^{\infty}6^r(2c)^r\sum_{s=1}^{\infty}6^s(2c)^s=\pi M\left(\frac{12c}{1-12c}\right)^2.$$

Aus (46), (47) und (48) folgt also für alle $t>0$ die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\omega_n^{(m+1)}(t)-\omega_n^{(m)}(t)|. \tag{49}$$

Es existieren alle Grenzwerte

$$\omega_n(t)=\lim_{m\to\infty}\omega_n^{(m)}(t) \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{50}$$

und stellen stetige Funktionen von $t$ dar.

Es ist außerdem für alle $t$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\omega_n(t)|<1. \tag{51}$$

Aus der Konvergenz von (49) folgt weiter, daß

$$\omega(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(t)=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^{(m)}(t) \tag{52}$$

ist. Wir erhalten jetzt aus (25) für $m\to\infty$ und für alle $n\geqq 1$

$$\omega_n(t)=\gamma_n e^{-n^2t}-n^3\int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\,d\delta\sum_{r,s}^{1\ldots\infty}\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_r\\ l_1,\ldots,l_s}}^{1\ldots\infty}\frac{a_{k,l}^{(n)}}{k_1^3\ldots l_s^3}\,\omega_{k_1}(\delta)\ldots\omega_{l_s}(\delta). \tag{53}$$

Wird jetzt wieder

$$v_n(t)=\frac{1}{n^3}\omega_n(t), \qquad n^3c_n=\gamma_n \tag{54}$$

gesetzt, so folgt aus (53)

$$(55)\quad v_n(t) = c_n e^{-n^2 t} - \int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\, d\delta \sum_{r,s}^{1\dots\infty} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_r \\ l_1,\dots,l_s}}^{1\dots\infty} a_{k,l}^{(n)} v_{k_1}(\delta)\dots v_{l_s}(\delta).$$

$v_n(t)$ genügt also der Integralgleichung (22), somit der Differentialgleichung (21). Setzt man in $z_n^{(r,s)}$ für die Funktionen $v_{k_1}(t), \dots, v_{l_s}(t)$ ihre Werte aus (54) ein, so erkennt man, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r,s}^{1\dots\infty} |z_n^{(r,s)}(t)|$ gleichmäßig konvergiert. Da ferner $\sum_n n^2 |v_n(t)| = \sum_n \frac{1}{n} |\omega_n(t)|$ gleichmäßig konvergiert, ist wegen (20) auch $\sum_n \frac{dv_n}{dt}$ konvergiert. Wenn wir jetzt die Überlegungen schrittweise rückwärts durchführen, so sehen wir, daß die Funktion

$$(56)\quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin nx$$

der Differentialgleichung (1) und den Randbedingungen (2) und (3) genügt.

## § 4.

## Unität der Lösung.

Wir beweisen jetzt, daß diese Lösung $u(x,t)$ die einzige ist, die sich in eine gleichmäßig konvergente Reihe von der Form $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin nx$ entwickeln läßt, und die so beschaffen ist, daß auch $\sum_n n^2 |v_n(t)|$ und $\sum_n \left|\frac{dv_n}{dt}\right|$ für alle $t$ gleichmäßig konvergieren.

Dazu genügt es offenbar, zu zeigen, daß die Integralgleichung (24) keine andere Lösung $\bar{\omega}_n(t)$ $(n = 1, 2, \dots)$ besitzt, so daß auch $\sum_n |\bar{\omega}_n(t)|$ gleichmäßig konvergiert. Es ist in der Tat

$$\bar{\omega}_n(t) - \omega_n^{(m)}(t) = -n^3 \int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\, d\delta \sum_{r,s}^{1\dots\infty} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_r \\ l_1,\dots,l_s}}^{1\dots\infty} \frac{a_{k,l}^{(n)}}{k_1^3 \cdots l_s^3} \{\bar{\omega}_{k_1}(\delta) \dots \bar{\omega}_{l_s}(\delta) - \omega_{k_1}^{(m-1)}(\delta) \dots \omega_{l_s}^{(m}$$

$$= -n^3 \int_0^t e^{-n^2(t-\delta)}\, d\delta \sum_{r,s}^{1\dots\infty} \sum_{\substack{k_1,\dots,k_r \\ l_1,\dots,l_s}}^{1\dots\infty} \frac{a_{k,l}^{(n)}}{k_1^3 \cdots l_s^3} \{\bar{\omega}_{k_1}(\delta) \dots \bar{\omega}_{l_{s-1}}(\delta) (\bar{\omega}_{l_s}(\delta) - \omega_{k_1}^{(m-1)}(\delta)$$

$$+ \omega_{l_s}^{(m-1)}(\delta)\, \omega_{l_{s-1}}^{(m-1)}(\delta) \dots \omega_{k_2}^{(m-1)}(\delta) (\bar{\omega}_{k_1}(\delta) - \omega_{k_1}^{(m-1}$$

Hieraus folgt, wenn etwa

$$(57)\quad \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\omega}_n(t)| = \bar{c} < 2c$$

angenommen wird, wegen $\sum_n |\omega_n^{(m-1)}(t)| < 2c$, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\omega}_n - \omega_n^{(m)}(t)| < \pi M \sum_{r,s}^{1\ldots\infty} (r+s)\,\alpha_{r,s}(2c)^{r+s-1} \max \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n(t) - \omega_n^{(m-1)}(t)|$$

$$< \pi M \sum_{r=1}^{\infty} (r+1) A_r (2c)^{r-1} \sum_{s=1}^{\infty} (s+1) B_s (2c)^s \max \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\omega}_n(t) - \omega_n^{(m-1)}(t)$$

$$= \pi M \frac{12 - 792c}{1 - 72c} \frac{24c}{1 - 24c} \max \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\omega}_n(t) - \omega_n^{(m-1)}(t)|$$

ist. Nach einer $m$-maligen Anwendung dieser Formel und nach (42) erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\omega}_n(t) - \omega_n^{(m)}(t)| < \max \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\omega}_n(t) - \omega_n^{(0)}(t)|. \tag{58}$$

Der in (48) angewandten Schlußweise entsprechend, findet man, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\omega}_n(t) - \omega_n^{(0)}(t)|$$

für alle $t$ konvergiert. Es ist also

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\bar{\omega}_n(t) - \omega_n^{(m)}(t)| = 0,$$

mithin

$$\bar{\omega}_n(t) = \lim_{m \to \infty} \omega_n^{(m)}(t) = \omega_n(t) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{59}$$

Hieraus folgt nun, daß die beiden Lösungen $\bar{\omega}_n(t)$ und $\omega_n(t)$, somit auch $\bar{v}_n(t)$ und $v_n(t)$ für alle $t$ zusammenfallen. Damit ist die Unität der Lösung (56) sichergestellt.

## § 5.

## Schlußbemerkung.

Wir wollen hier noch kurz und ohne Beweis erwähnen, daß man, wenn anstatt der Randbedingung (2) die sogenannte „gemischte Randbedingung“

$$u = 0 \quad \text{für} \quad x = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad x = \frac{\pi}{2}, \qquad t \geqq 0$$

vorliegt, die in Betracht kommenden Funktionen $f(x)$, $u(x, t)$ usw. im Intervalle $\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ durch Spiegelung an der Geraden $x = \frac{\pi}{2}$ fortsetzen kann. Damit wird die vorliegende Randwertaufgabe auf die im vorhergehenden ausführlich behandelte Aufgabe zurückgeführt.

Wir sind im § 1 von dem rechteckigen Bereich

$$0 \leqq x \leqq \pi, \qquad 0 \leqq t \leqq T \qquad (T \to \infty)$$

ausgegangen. Wir nehmen jetzt an, daß der Regularitätsbereich allgemeiner von der Strecke $\langle 0, \pi \rangle$ der $x$-Achse und den beiden Kurvenstücken $x = h_1(t)$ und $x = h_2(t)$ begrenzt ist, wo die Funktionen $h_1(t)$ und $h_2(t)$ hinreichende Stetigkeitseigenschaften haben. Es ist nicht schwer, zu sehen, daß die Bestimmung derjenigen Lösung, die in diesem Bereich regulär ist und den Randbedingungen

$$u = f(x) \quad \text{für} \quad t = 0, \qquad u = 0 \quad \text{für} \quad x = h_1(t) \quad \text{und} \quad x = h_2(t)$$

genügt, sich durch Einführung geeigneter neuer Variablen auf die Auflösung der transformierten Gleichung in einem rechteckigen Bereich unter Zugrundelegung von Randbedingungen, die zu (2) und (3) analog sind, zurückführen läßt und somit der Fourierschen Integrationsmethode zugänglich ist.

Schließlich bemerken wir, daß unsere Entwicklungen so eingerichtet sind, daß sie mit unwesentlichen Änderungen auf Differentialgleichungen höherer Ordnung, auf den Fall mehrerer unabhängiger Variablen sowie auf Systeme von Differentialgleichungen anwendbar bleiben.

(Eingegangen am 9. März 1931.)

# Weitere Beiträge zum Infinitesimalkalkul der Matrizen.

Von

Ludwig Schlesinger in Gießen.

Inhaltsübersicht.

Seite

I. Darstellungen des Produktintegrals $L$-integrierbarer Matrizen. Integralsätze . . . . . 485
II. Anwendungen der Integralformeln. Ein Reziprozitätssatz . . . . . 490
III. Das gemischte Doppelintegral. Das Analogon des Greenschen Satzes . . . . . 494
IV. Integrable Differentiale. Kurvenintegrale. Komplexe Variable . . . . . 497

## I.

## Darstellungen des Produktintegrals $L$-integrierbarer Matrizen. Integralsätze.

Es sei $A$ eine im Intervall $p \dots q$ $L$-integrierbare Matrix[1]); wir können dann die Treppenmatrizen, durch deren Folge $A$ fast überall approximiert wird, so einrichten, daß wir auf der Zählachse ein Netzwerk (vgl. Schlesinger-Pleßner, Lebesguesche Integrale, 1926, S. 17, 18) zugrunde legen und die Treppenmatrix $\Phi_\nu$ so wählen, daß sie auf den zu $p \dots q$ gehörigen Maschen $x_{i-1}^\nu \dots x_i^\nu$ des $\nu$-ten Gitters mit den daselbst konstanten Matrizen $L_i^\nu$ übereinstimmt $(i = 1, 2, \dots, m_\nu)$. Da das zu $\Phi_\nu$ gehörige Produktintegral

$$\overbrace{\int_p^q} (\Phi_\nu \, dx + I) = \prod_{i=1}^{m_\nu} e^{(x_i^\nu - x_{i-1}^\nu) L_i^\nu}$$

ist, so wird

$$(1) \qquad \overbrace{\int_p^q} (A \, dx + I) = \lim_\nu \prod_{i=1}^{m_\nu} e^{(x_i^\nu - x_{i-1}^\nu) L_i^\nu},$$

[1]) Vgl. für die angewandte Terminologie meine Note Math. Zeitschr. **33** (1931), S. 33—61, Neue Grundlagen für einen Infinitesimalkalkul der Matrizen.

eine Darstellung, die ganz ähnlich gebaut ist wie die Darstellung des Produktintegrals einer $R$-integrierbaren Matrix (vgl. etwa Math. Zeitschr. **33**, S. 43, Gleichung (18)), nur können eben für eine $R$-integrierbare Matrix die konstanten Matrizen $L_i^\nu$ gleich den Werten der zu integrierenden Matrix in einem Punkte des Intervalls genommen werden. — Um von der Darstellung (1) zu einer analogen überzugehen, wie sie für $R$-integrierbare Matrizen a. a. O., S. 41, Gleichung (14) gegeben ist, bemerken wir, daß, wenn wir $e^X = I + X + R$ setzen, für eine Matrix $X$, deren absoluter Betrag (siehe a. a. O., S. 35) kleiner als 3 ist, die Ungleichung

$$[R] \leqq \frac{[X]}{1}\left\{\frac{[X]}{2} + \frac{[X]^2}{2\cdot 3} + \cdots\right\} < \frac{[X]^2}{2}\,\frac{1}{1-\frac{[X]}{3}}$$

gilt. Da die $\Phi_\nu$ gleichmäßig beschränkt sein müssen, so gibt es ein positives $G$, für das alle $[L_i^\nu] < G$ sind, wir haben also, wenn wir $\nu$ so groß wählen, daß alle $|x_i^\nu - x_{i-1}^\nu| \leqq \delta_\nu < \frac{3}{G}$ sind, für

$$e^{(x_i^\nu - x_{i-1}^\nu) L_i^\nu} = I + (x_i^\nu - x_{i-1}^\nu) L_i^\nu + R_i^\nu, \tag{2}$$

$$[R_i^\nu] < \frac{\delta_\nu^2 G^2}{2}\,\frac{1}{1-\frac{\delta_\nu G}{3}} = \varrho_\nu. \tag{2a}$$

Denken wir uns die Ausdrücke (2) in (1) eingesetzt und ausmultipliziert, so kommt

$$\int_p^q (A\,dx + I) = \lim_\nu \left\{ \prod_{i=1}^{m_\nu} (I + (x_i^\nu - x_{i-1}^\nu) L_i^\nu + P_1 + P_2 + \cdots + P_m \right\},$$

wo $P_k$ eine Summe von $\binom{m_\nu}{k}$ Produkten bedeutet, von denen jedes genau $k$ Faktoren $R_i^\nu$ und $m_\nu - k$ Faktoren $I + (x_i^\nu - x_{i-1}^\nu) L_i^\nu$ enthält. Nach dem Hilfssatze (a. a. O., S. 37) ist also der absolute Betrag eines jeden dieser Produkte kleiner als $e^{(q-p)G}\varrho_\nu^k$, also $[P_k] < \binom{m_\nu}{k} e^{(q-p)G}\varrho_\nu^k$ und somit

$$\left[\sum_{k=1}^{m_\nu} P_k\right] < e^{(q-p)G} \sum_{k=1}^{m_\nu} \binom{m_\nu}{k} \varrho_\nu^k = e^{(q-p)G}\{(1+\varrho_\nu)^{m_\nu} - 1\}.$$

Für das zugrunde gelegte Netzwerk ist $\delta_\nu$ die Maschenlänge des $\nu$-ten Gitters, es gilt also die Ungleichung $m_\nu \delta_\nu \geqq p - q > (m_\nu - 2)\,\delta_\nu$, so daß für $\nu \to \infty$, $m_\nu \delta_\nu$ beschränkt ist, folglich $m_\nu \delta_\nu^2 \to 0$ und somit auch $m_\nu \varrho_\nu \to 0$ geht. Hieraus folgt aber $(1+\varrho_\nu)^{m_\nu} \to 1$, also $\lim_\nu \sum_{i=1}^{m_\nu} P_i = 0$ und folglich

$$\int_p^q (A\,dx + I) = \lim_\nu \prod_{i=1}^{m_\nu} (I + (x_i^\nu - x_{i-1}^\nu) L_i^\nu), \tag{1a}$$

was die gesuchte Darstellung ist. —

Wenn wir in (1a) unter dem Limeszeichen ausmultiplizieren, so kommt

$$\overset{q}{\int}(A\,dx+I)=\lim_{\nu}\Big\{I+\sum_{i=1}^{m_\nu}(x_i^\nu-x_{i-1}^\nu)\,L_i^\nu+\sum_{i<k}\sum(x_i^\nu-x_{i-1}^\nu)\,(x_k^\nu-x_{k-1}^\nu)\,L_i^\nu\,L_k^\nu+\ldots\Big\};$$

für die auftretenden Summen gilt aber nach der Friedrich Rieszschen Definition des Lebesgueschen Integrals

$$\lim_{\nu}\sum_{i=1}^{m_\nu}(x_i^\nu-x_{i-1}^\nu)\,L_i^\nu=\int_p^q A\,dx,$$

$$\lim_{\nu}\sum_{i<k}\sum(x_i^\nu-x_{i-1}^\nu)\,(x_k^\nu-x_{k-1}^\nu)\,L_i^\nu\,L_k^\nu=\int_p^q\Big(\int_p^x A\,dx\Big)A\,dx,$$

usw., wo wieder das Integral einer Matrix für die Matrix der Integrale über die einzelnen Elemente geschrieben wurde. Wir erhalten somit für das Produktintegral der $L$-integrierbaren Matrix $A$ die Caqué-Fuchssche Reihenentwicklung

$$\overset{q}{\int}(A\,dx+I)=I+\int_p^q A\,dx+\int_p^q\Big(\int_p^x A\,dx\Big)A\,dx+\ldots\text{ in inf.,}\tag{3}$$

die für Werte von $q$, für die das Produktintegral nach der oberen Grenze differenzierbar ist, aus dem Differentialsystem $D_x Y=A$ durch sukzessive Approximation hergeleitet werden kann (vgl. z. B. meine „Einführung" 3. Aufl. 1922, S. 143 und 300, siehe auch die Dissertation von G. Rasch, Om Matrixregning usw., Kopenhagen, 1930, S. 35, wo die in Rede stehende Entwicklung aus der Definition des Produktintegrals für eine $R$-integrierbare Matrix gewonnen wird).

Wir beweisen nunmehr einen für das Weitere nützlichen Hilfssatz (siehe Volterra, Memorie della Soc. dei XL, **6** (1887), Nr. 8, S. 36ff.). Es seien $A_1,\ldots,A_m$, $B_1,\ldots,B_m$ Matrizen mit nicht verschwindender Determinante, dann gilt die Identität

$$A_m^{-1}\ldots A_1^{-1}B_1\ldots B_m=T_1^{-1}A_1^{-1}B_1T_1A_m^{-1}\ldots A_2^{-1}B_2\ldots B_m,$$

worin gesetzt wurde

$$T_1=A_2\ldots A_m,\quad T_2=A_3\ldots A_m,\ldots,T_m=I,$$

und ebenso

$$A_m^{-1}\ldots A_2^{-1}B_2\ldots B_m=T_2^{-1}A_2^{-1}B_2T_2A_m^{-1}\ldots A_3^{-1}B_3\ldots B_m$$

usw. Wir finden somit die Darstellung

$$A_m^{-1}\ldots A_1^{-1}B_1\ldots B_m=\prod_{k=1}^{m}T_k^{-1}A_k^{-1}B_kT_k,\tag{4}$$

die den Hilfssatz ausspricht.

Es seien nunmehr $A, B$ zwei in dem Intervall $p \dots q$ $L$-integrierbare Matrizen, dann haben wir gemäß (1)

$$(5) \qquad \overset{q}{\underset{p}{\int}}(A\,dx + I) = \lim_{\nu} \prod_{i=1}^{m_\nu} A_i^\nu, \qquad \overset{q}{\underset{p}{\int}}(B\,dx + I) = \lim_{\nu} \prod_{i=1}^{m_\nu} B_i^\nu,$$

wenn wir setzen

$$(6) \qquad A_i^\nu = e^{(x_i^\nu - x_{i-1}^\nu) L_i^\nu}, \qquad B_i^\nu = e^{(x_i^\nu - x_{i-1}^\nu) M_i^\nu},$$

wo $L_i^\nu, M_i^\nu$ in $x_{i-1}^\nu \dots x_i^\nu$ konstante Matrizen bedeuten. Nun ist (vgl. Math. Zeitschr. **33**, S. 50, Gleichungen (34) bis (36))

$$\overset{p}{\underset{q}{\int}}(A\,dx + I) = \Big(\overset{q}{\underset{p}{\int}}(A\,dx + I)\Big)^{-1} = \lim_{\nu} \prod_{i=m_\nu}^{1} (A_i)^{-1},$$

wo die Schreibweise an dem Produktzeichen andeuten soll, daß die Faktoren in der Reihenfolge $m_\nu, \dots, 1$ der Indizes zu nehmen sind. Ist der Wert $x$ in den Intervallen $x_{\lambda_\nu - 1}^\nu \dots x_{\lambda_\nu}^\nu$ enthalten, so haben wir

$$(7) \qquad T = \overset{q}{\underset{x}{\int}}(A\,dx + I) = \lim_{\nu} \prod_{i=\lambda_\nu}^{m_\nu} A_i^\nu = \lim_{\nu} T_{\lambda_\nu}^\nu$$

und nach dem Hilfssatz, dessen Bezeichnungsweise wir sinngemäß übertragen, gilt

$$\prod_{i=m_\nu}^{1} (A_i^\nu)^{-1} \prod_{i=1}^{m_\nu} B_i^\nu = \prod_{i=1}^{m_\nu} (T_i^\nu)^{-1} e^{-(x_i^\nu - x_{i-1}^\nu) L_i^\nu} e^{(x_i^\nu - x_{i-1}^\nu) M_i^\nu} T_i^\nu.$$

Aber, wenn wir von Potenzen höherer Ordnung der $x_i^\nu - x_{i-1}^\nu$ absehen, was ja auf das Ergebnis des Grenzüberganges ohne Einfluß ist, können wir schreiben

$$e^{-(x_i^\nu - x_{i-1}^\nu) L_i^\nu} e^{(x_i^\nu - x_{i-1}^\nu) M_i^\nu} = e^{(x_i^\nu - x_{i-1}^\nu)(M_i^\nu - L_i^\nu)}$$

und folglich, mit Rücksicht auf bekannte Eigenschaften der Exponentialfunktion einer Matrix (vgl. etwa a. a. O., S. 50),

$$\prod_{i=m_\nu}^{1} (A_i)^{-1} \prod_{i=1}^{m_\nu} B_i = \prod_{i=1}^{m_\nu} e^{(x_i^\nu - x_{i-1}^\nu)(T_i^\nu)^{-1}(M_i^\nu - L_i^\nu) T_i^\nu}.$$

Vollziehen wir in dieser Gleichung den Grenzübergang, so erhalten wir mit Rücksicht auf die in (7) festgelegte Bedeutung von $T$

$$(8) \qquad \overset{p}{\underset{q}{\int}}(A\,dx + I) \overset{q}{\underset{p}{\int}}(B\,dx + I) = \overset{q}{\underset{p}{\int}}(T^{-1}(B - A)\,T\,dx + I),$$

eine Formel, die an Stellen $q$, an denen Differentiation nach der oberen Grenze gestattet ist, auch durch Differentiation nach $q$ verifiziert werden kann. Setzt man

$$(7a) \qquad S = T^{-1} = \overset{x}{\underset{q}{\int}}(A\,dx + I),$$

so ist fast überall (vgl. a. a. O., S. 61) $D_x S = A$, und die Formel (8) kann in der Gestalt

$$(9) \qquad S_p \overset{q}{\underset{p}{\int}} (B\,dx + I) = \overset{q}{\underset{p}{\int}} (S(B - D_x S) S^{-1} dx + I)$$

geschrieben werden, wenn $S_p$ die Matrix bedeutet, die aus $S$ für $x = p$ hervorgeht. Eine leichte Verallgemeinerung dieser Formel ergibt sich wie folgt:

Es sei $C$ eine konstante, d. h. von $x$ unabhängige Matrix mit nicht verschwindender Determinante und $A$ wie oben eine $L$-integrierbare Matrix, die fast überall als Grenzwert von Treppenmatrizen $A = \lim_\nu \Phi_\nu$ dargestellt ist. Dann ist offenbar

$$(10) \qquad CAC^{-1} = \lim_\nu C\Phi_\nu C^{-1}$$

und die unter dem Limeszeichen stehende Treppenmatrix hat in $x_{i-1}^\nu \dots x_i^\nu$ den konstanten Wert $CL_i^\nu C^{-1}$. Nun folgt aus (6)

$$CA_i^\nu C^{-1} = e^{(x_i^\nu - x_{i-1}^\nu) CL_i^\nu C^{-1}},$$

es ergibt sich demnach aus (5) und (10)

$$\overset{q}{\underset{p}{\int}} (CAC^{-1} dx + I) = \lim_\nu \prod_{i=1}^{m_\nu} CA_i^\nu C^{-1} = C \cdot \lim_\nu \prod_{i=1}^{m_\nu} A_i^\nu \cdot C^{-1},$$

d. h. für konstantes $C$ gilt die Regel

$$(11) \qquad \overset{q}{\underset{p}{\int}} (CAC^{-1} dx + I) = C \overset{q}{\underset{p}{\int}} (A\,dx + I) \cdot C^{-1}.$$

Nimmt man nunmehr in (9) an Stelle des Produktintegrals $S$ mit der unteren Grenze $q$, ein solches mit der unteren Grenze $r \neq q$, also $S' = \overset{x}{\underset{r}{\int}} (A\,dx + I)$, so ist offenbar $S = S_q'^{-1} S'$, $S_p = S_q'^{-1} S_p'$, $D_x S = D_x S'$ und, indem wir diese Werte in (9) einsetzen, ergibt sich mit Rücksicht auf die Regel (11)

$$(9a) \qquad S_p' \overset{q}{\underset{p}{\int}} (B\,dx + I) = \overset{q}{\underset{p}{\int}} (S'(B - D_x S') S'^{-1} dx + I) \cdot S_q'$$

(vgl. Volterra a. a. O. und meine Vorlesungen, 1908, S. 31, Gleichung (XI)). An den Stellen $q$, an denen Differentiation gestattet ist, kann diese Formel auch durch Differentiation verifiziert werden. Allgemein kann darin $S'$ irgendeine stetige Matrix bedeuten, deren Elemente in dem Intervall $p \dots q$ fast überall beschränkte Derivierte besitzen.

## II.

### Anwendungen der Integralformeln. Ein Reziprozitätssatz.

Wir geben zunächst die Anwendung der Formel (8) auf die Differentiation eines Produktintegrals nach einem unter dem Integralzeichen auftretenden Parameter. — Es sei in

$$Y = \overset{q}{\underset{p}{\int}} (A(x,t)\,dx + I)$$

$A$ in seiner Abhängigkeit von $x$ $L$-integrierbar und nach $t$ differenzierbar mit beschränkter Derivierten; wir fragen, unter der Voraussetzung, daß die Grenzen $p, q$ von $t$ unabhängig seien, nach der Derivierten von $Y$ nach $t$. Nach der Definition der derivierten Matrix (Math. Zeitschr. **33**, S. 47, Gleichung (25)) ist

$$(12)\quad D_t Y = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \left\{ \overset{p}{\underset{q}{\int}} (A(x,t)\,dx + I) \overset{q}{\underset{p}{\int}} (A(x,t+\delta)\,dx + I) - I \right\},$$

sofern der Grenzwert rechter Hand existiert. — Setzen wir

$$(13)\qquad U = \overset{x}{\underset{p}{\int}} (A\,dx + I), \qquad T = \overset{q}{\underset{x}{\int}} (A\,dx + I) = U^{-1} Y,$$

$$\Delta A = A(x, t+\delta) - A(x,t),$$

so folgt aus (8) mit Rücksicht auf (11)

$$\overset{p}{\underset{q}{\int}} (A\,dx + I) \overset{q}{\underset{p}{\int}} (A(x,t+\delta)\,dx + I) = \overset{q}{\underset{p}{\int}} (T^{-1} \cdot \Delta A \cdot T\,dx + I)$$

$$= Y^{-1} \overset{q}{\underset{p}{\int}} (U \cdot \Delta A \cdot U^{-1}\,dx + I)\, Y$$

und, indem wir dies in (12) einsetzen,

$$(12\,\mathrm{a})\qquad D_t Y = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \left\{ Y^{-1} \overset{q}{\underset{p}{\int}} (U \cdot \Delta A \cdot U^{-1}\,dx + I)\, Y - I \right\}.$$

Nun folgt, wenn wir gemäß (3) entwickeln,

$$\overset{q}{\underset{p}{\int}} \left( U \frac{\Delta A}{\delta} \delta U^{-1}\,dx + I \right) = I + \delta \int_p^q U \frac{\Delta A}{\delta} U^{-1}\,dx + (\delta^2),$$

wo $(\delta^2)$ Glieder andeutet, die mit der zweiten und mit höheren Potenzen von $\delta$ multipliziert sind. — Dies in (12 a) eingesetzt, ergibt

$$(12\,\mathrm{b})\qquad D_t Y = \lim_{\delta \to 0} Y^{-1} \int_p^q U \frac{\Delta A}{\delta} U^{-1}\,dx \cdot Y,$$

und wenn wir $\delta$ in einer Folge von Zahlen gegen Null konvergieren lassen, so folgt mit Rücksicht auf einen bekannten Satz von Lebesgue (vgl. a. a. O., S. 58)

$$D_t Y = Y^{-1} \int_p^q U \lim_{\delta \to 0} \frac{\Delta A}{\delta} U^{-1} dx \cdot Y.$$

Da nun nach Voraussetzung der Grenzwert

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\Delta A}{\delta} = \frac{\partial A(x,t)}{\partial t}$$

existiert und beschränkt ist, also als Funktion der zweiten Baireschen Klasse Borel-meßbar und daher $L$-integrierbar ist, so erhalten wir die Gleichung

$$(14) \qquad D_t Y = Y^{-1} \int_p^q U \frac{\partial A(x,t)}{\partial t} U^{-1} dx \cdot Y,$$

wo $U$ durch die Gleichung (13) gegeben ist. — Für Stellen $q$, an denen Differentiation von $Y$ nach der oberen Grenze gestattet ist, kann diese Formel für die Differentiation eines Produktintegrals „unter dem Integralzeichen" wie folgt verifiziert werden: Wir betrachten gleich $U$ an einer Stelle $x$, für die Differentiation gestattet ist, so daß also $D_x U = A$; dann befriedigt die Matrix $V = \frac{\partial U}{\partial t}$ das komplette lineare Differentialsystem

$$\frac{\partial V}{\partial x} = VA + U \frac{\partial A}{\partial t}$$

mit der Anfangsbedingung $V_p = 0$. Nach sehr bekannten Formeln (vgl. z. B. meine „Einführung", 1922, S. 295) hat man also

$$V = \int_p^x U(z) \frac{\partial A(z,t)}{\partial t} U(z)^{-1} \cdot U(x)\, dz,$$

also in Übereinstimmung mit (14)

$$(14\text{b}) \quad D_t \int_p^x (A(x,t)\, dx + I) = U^{-1} V = U^{-1} \int_p^x U \frac{\partial A(x,t)}{\partial t} U^{-1} dx \cdot U.$$

Wir bemerken noch, daß für konstante (von $x$ unabhängige) Grenzen $p, q$ die Form $D_t Y = \int_p^q T^{-1} \frac{\partial A}{\partial t} T dx$ der Gleichung (14), oder ausführlich geschrieben

$$(14\text{a}) \quad D_t \int_p^q (A(x,t)\, dx + I) = \int_p^q \left( \int_q^x (A\, dx + I) \frac{\partial A}{\partial t} \int_x^q (A\, dx + I) \right) dx$$

meist bequemer erscheint. —

Ihrer häufigen Anwendbarkeit wegen heben wir noch zwei spezielle Fälle der Formel (8) oder der damit äquivalenten

$$(8\,a)\qquad \overset{p}{\underset{q}{\int}}(A\,dx+I)\overset{q}{\underset{p}{\int}}(B\,dx+I)=\overset{q}{\underset{p}{\int}}(S(B-A)S^{-1}dx+I),$$

$$S=\overset{x}{\underset{q}{\int}}(A\,dt+I)\qquad (p\leqq x\leqq q)$$

hervor. Erstens sei $A=If(x)$, wo $f(x)$ eine $L$-integrierbare skalare Funktion bedeutet, so daß

$$\overset{q}{\underset{p}{\int}}(A\,dx+I)=I\cdot e^{\int_p^q f(x)\,dx}$$

ist; dann lautet (8a)

$$(8\,b)\qquad e^{-\int_p^q f(x)\,dx}\overset{q}{\underset{p}{\int}}(B\,dx+I)=\overset{q}{\underset{p}{\int}}((B-If(x))dx+I).$$

Zweitens werde in (8a) $B=0$ genommen, dann ergibt sich

$$(8\,c)\qquad \overset{p}{\underset{q}{\int}}(A\,dx+I)=\overset{q}{\underset{p}{\int}}(I-SAS^{-1}dx),$$

eine Formel, die für Werte von $p$, für die Differentiation nach der obern Grenze gestattet ist, aus der Differentiationsformel $D_x S^{-1}=-S\cdot D_x S\cdot S^{-1}$ unmittelbar folgt.

Setzt man $C=SAS^{-1}$ und denkt sich $C$ als in dem Intervall $p\ldots q$ $L$-integrierbare Matrix gegeben, so kann man sich die Aufgabe stellen, aus dieser Gleichung, d. h. also aus

$$(a)\qquad C(x)=\overset{x}{\underset{q}{\int}}(A\,dt+I)\,A(x)\overset{q}{\underset{x}{\int}}(A\,dt+I),$$

die Matrix $A$ zu bestimmen. — Die Lösung dieser „Produktintegralgleichung“ ergibt sich außerordentlich einfach. Es ist nämlich unmittelbar

$$(a')\qquad A=S^{-1}CS,$$

und da nach (8c)

$$S(x)=\overset{x}{\underset{q}{\int}}(A\,dt+I)=\overset{q}{\underset{x}{\int}}\Big(I-\overset{t}{\underset{q}{\int}}(A\,dt+I)\,A(t)\overset{q}{\underset{t}{\int}}(A\,dt+I)\,dt\Big)$$

gefunden wird, so folgt mit Rücksicht auf (a), wo man nur $x$ durch $t$ zu ersetzen hat, $S(x)=\overset{q}{\underset{x}{\int}}(I-C(t)\,dt)$. — Setzt man also

$$T(x)=S^{-1}=\overset{x}{\underset{q}{\int}}(I-C(t)\,dt),$$

so ergibt sich aus (a)

$$(b) \qquad A(x) = \overset{x}{\underset{q}{\int}} (I - C(t)\,dt)\, C(x) \overset{q}{\underset{x}{\int}} (I - C(t)\,dt)$$

als die Auflösung von (a). — Fast überall folgt dieser „Reziprozitätssatz“ aus der (8c) entsprechenden Differentiationsformel $D_x S^{-1} = -S \cdot D_x S \cdot S^{-1}$; diese liefert nämlich $D_x S^{-1} = -C$, und, da auch $D_x T = -C$ ist und da $S$, $T$ beide für $x = q$ gleich $I$ werden, haben wir $S^{-1} = T$ oder $S = T^{-1}$, also $D_x S = D_x T^{-1} = -T \cdot D_x T \cdot T^{-1}$ oder $A = TCT^{-1}$.

Denken wir uns die $L$-integrierbaren Matrizen $A$ und $C$ durch Treppenmatrizen approximiert und setzen ähnlich wie oben

$$A_i^\nu = e^{(x_i^\nu - x_{i-1}^\nu) L_i^\nu}, \qquad C_i^\nu = e^{(x_i^\nu - x_{i-1}^\nu) N_i^\nu},$$

wo die $L_i^\nu$, $N_i^\nu$ in $x_{i-1}^\nu \dots x_i^\nu$ konstante Matrizen bedeuten, so wird, wenn man sich $x$ in dem Intervall $x_{\lambda_\nu - 1}^\nu \dots x_{\lambda_\nu}^\nu$ des $\nu$-ten Gitters gelegen denkt, die Gleichung (a) durch das „dreieckige Gleichungssystem“ [2])

$$(a_\nu) \qquad N_i = A_1 A_2 \dots A_i L_i A_i^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1} \qquad (i = 1, 2, \dots, \lambda_\nu)$$

approximiert, in dem sich noch in jeder Gleichung, der Vertauschbarkeit wegen, die dem $L_i$ links und rechts benachbarten Matrizen wegheben. Die Auflösung dieser Gleichungen nach den $L_i$ läßt sich nun sukzessive bewirken. Aus der ersten Gleichung $N_1 = L_1$ folgt nämlich $A_1^{-1} = C_1^{-1}$, die zweite Gleichung gibt daher $L_2 = C_1^{-1} N_2 C_1$, und hieraus folgt wiederum $A_2^{-1} = C_1^{-1} C_2^{-1} C_1$, so daß die dritte Gleichung $L_3 = C_1^{-1} C_2^{-1} N_3 C_2 C_1$ ergibt, und so fortfahrend erhält man als Auflösung von $(a_\nu)$ das ähnlich gebaute System

$$(b_\nu) \qquad L_i = C_1^{-1} C_2^{-1} \dots C_i^{-1} N_i C_i \dots C_2 C_1 \qquad (i = 1, 2, \dots, \lambda_\nu),$$

aus dem durch Grenzübergang wieder die Lösungsgleichung (b) hervorgeht. Natürlich ist diese Betrachtung völlig gleichwertig mit der oben gegebenen Ableitung der Gleichung (8) aus dem Volterraschen Hilfssatz, wir erkennen aber in der Auflösung des dreieckigen Systems $(a_\nu)$ das Analogon der Lösung des dreieckigen Systems linearer Gleichungen, aus dem sich die Lösung einer gewöhnlichen Integralgleichung vom Volterratyp durch Grenzübergang gewinnen läßt (vgl. Volterra, Leçons sur les équations intégrales etc., 1913, Kap. II, § 2). Es ist dies darum von Interesse, weil, wenn allgemeiner unter dem Produktintegralzeichen noch ein skalarer Faktor als

[2]) Der einfacheren Schreibweise wegen unterdrücken wir im folgenden bei den Matrizen den oberen Index $\nu$.

„Kern“ auftritt, also eine Gleichung der Form

$$(\mathrm{A}) \qquad C(x) = \overset{x}{\underset{a}{\int}} (A(t)\, k(x,t)\, dt + I)\, A(x) \overset{a}{\underset{x}{\int}} (A(t)\, k(x,t)\, dt + I)$$

vorliegt, wo $k(x,t)$ eine $L$-integrierbare Funktion der beiden Veränderlichen $x, t$ bedeutet, auch diese Gleichung durch ein dreieckiges Gleichungssystem approximiert wird, dessen Lösung somit sukzessive bewirkt werden kann, allerdings nicht mehr in der einfachen Form wie im Falle $k = 1$. Auf die Bedeutung der Gleichungen von der Form (A) sowie auf die Frage ihrer Auflösung nach der Matrix $A(x)$ soll an anderer Stelle eingegangen werden.

## III.

### Das gemischte Doppelintegral. Das Analogon des Greenschen Satzes.

Die Definition der $L$-integrierbaren Matrizen, wie sie im Anschluß an Friedrich Riesz für den Fall gegeben wurde (s. Math. Zeitschr. **33**, S. 54 ff.), wo die Elemente der Matrix nur von einer Veränderlichen abhängen, läßt sich ohne weiteres auf Matrizen übertragen, deren Elemente Funktionen von beliebig vielen Variablen sind. — Wir betrachten hier Matrizen $P(x,y)$, die von zwei reellen Veränderlichen abhängen, und die innerhalb eines einfachzusammenhängenden Bereichs der $x, y$-Ebene fast überall als Grenzwert einer gleichmäßig beschränkten Folge von Treppenmatrizen $P(x,y) = \lim\limits_{\mu,\nu} \Phi_{\mu\nu}$ dargestellt werden können. Dabei hat man in der $x, y$-Ebene ein Netzwerk (s. Schlesinger-Pleßner, Lebesguesche Integrale, S. 17, 18) zugrunde zu legen, und die Treppenmatrix $\Phi_{\mu\nu}$ ist dann innerhalb der Masche $x_{i-1}^{\mu} \leqq x \leqq x_i^{\mu}$, $y_{k-1}^{\nu} \leqq y \leqq y_k^{\nu}$ des durch die Zahlen $\mu, \nu$ charakterisierten Gitters $G_{\mu\nu}$ mit der konstanten Matrix $L_{ik}^{\mu\nu}$ identisch. Der Einfachheit wegen nehmen wir als Definitionsbereich das durch die Ungleichungen $x_0 \leqq x \leqq x_1$, $y_0 \leqq y \leqq y_1$ erklärte Rechteck $R$, das durch die Maschen des Gitters $G_{\mu\nu}$ in $m_\mu \cdot n_\nu$ Rechtecke zerlegt erscheint, so daß

$$x_0 = x_0^{\mu}, \quad x_1 = x_{m_\mu}^{\mu}, \quad y_0 = y_0^{\nu}, \quad y_1 = y_{n_\nu}^{\nu}$$

ist. — Als Funktion von $x$ allein ist dann $P(x,y)$ fast überall als Grenzwert von Treppenmatrizen $P(x,y) = \lim\limits_{\mu} \Psi_\mu(y)$ dargestellt, wo in der Masche $x_{i-1}^{\mu} \ldots x_i^{\mu}$ des $\mu$-ten linearen Gitters der $x$-Achse $\Psi_\mu(y) = M_i^{\mu}(y)$, ferner $M_i^{\mu}(y) = \lim\limits_{\nu} \Phi_{i\mu}^{\nu}$ und in der Masche $y_{k-1}^{\nu} \ldots y_k^{\nu}$ des $\nu$-ten linearen Gitters der $y$-Achse $\Phi_{i\mu}^{\nu} = L_{ik}^{\mu\nu}$ ist. Dann sind also die Elemente von $P$ als Funktionen von $x$ in dem Intervall $x_0 \ldots x_1$ $L$-integrierbar. Wir setzen

nunmehr

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} A(y) &= \int_{x_0}^{x_1} P(x,y)\,dx = \lim_{\mu} \sum_{i=1}^{m_\mu} (x_i^\mu - x_{i-1}^\mu)\, M_i^\mu(y) \\ &= \lim_{\mu,\nu} \sum_{i} (x_i^\mu - x_{i-1}^\mu)\, \Phi_{i\mu}^\nu , \end{aligned}\right.$$

wobei es auf die Reihenfolge der Grenzübergänge in bezug auf $\mu, \nu$ nicht ankommt. — Es ist somit $A(y)$ für $y_0 \leqq y \leqq y_1$ fast überall als Grenzwert von Treppenmatrizen dargestellt und daher $L$-integrierbar; wir setzen (vgl. meine Note Math. Annalen **99** (1928), S. 416 und die daselbst zitierte ältere Arbeit von Volterra)

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y_1} (A\,dx + I) &= \lim_{\nu} \prod_{k=1}^{m_\nu} e^{(y_k^\nu - y_{k-1}^\nu) \lim_{\mu} \sum_{i=1}^{m_\mu} (x_i^\mu - x_{i-1}^\mu) L_{ik}^{\mu\nu}} \\ &= \lim_{\mu,\nu} \prod_{k} e^{(y_k^\nu - y_{k-1}^\nu) \sum_{i} (x_i^\mu - x_{i-1}^\mu) L_{ik}^{\mu\nu}} \\ &= \int_{y_0}^{y_1} \Big( \int_{x_0}^{x_1} P(x,y)\,dx\,dy + I \Big) = \int\!\!\int_R (P(x,y)\,dx\,dy + I) \end{aligned}$$

und bezeichnen diesen Ausdruck als das über das Rechteck $R$ erstreckte gemischte Doppelintegral der $L$-integrierbaren Matrix $P$, wobei aber zu bemerken ist, daß der Wert dieses Doppelintegrals im allgemeinen wesentlich von dem Ausgangspunkte der Integration $(x_0, y_0)$ abhängt. Für dieses Gebilde gilt nun offenbar ebenso wie für das einfache Produktintegral (vgl. Math. Zeitschr. **33**, S. 58) der dem Lebesgueschen analoge Satz:

Wenn eine gleichmäßig beschränkte Folge $L$-integrierbarer Matrizen $P_k(x,y)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ fast überall nach dem Grenzwerte $P(x,y)$ konvergiert, so ist $P(x,y)$ selbst $L$-integrierbar, und das zu $P$ gehörige gemischte Doppelintegral ist der Grenzwert der zu den $P_k(x,y)$ gehörigen gemischten Doppelintegrale.

Wir stellen nunmehr (vgl. Math. Annalen **99**, S. 417 ff.) das Analogon des Greenschen Satzes der gewöhnlichen Integralrechnung auf und betrachten zu dem Ende zwei Matrizen $P(x,y)$, $Q(x,y)$, die in dem Rechteck $R$ stetig sind und daselbst fast überall die beschränkten partiellen Derivierten $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ besitzen[3]).

[3]) Diese Voraussetzungen entsprechen denen, auf die Montel in seiner Thèse (Annales de l'École Normale (3) **24** (1907), S. 233 ff., insbesondere S. 283–293) den Beweis der gewöhnlichen Greenschen Formel gegründet hat; weitere Literatur siehe bei Lichtenstein, Enzyklopädie, II C 3, Nr. 10, Fußnote [103]), der noch hinzuzufügen wäre: A. Pringsheim, Münchener Berichte 1929, S. 281 ff., und G. Chisholm Young, Fundamenta Mathematicae **15** (1930), S. 61 ff. Vgl. auch die Fußnote [5]) weiter unten.

Für einen Punkt $(x, y)$, der dem Innern des Rechtecks $R$ angehört, bilden wir die Ausdrücke (vgl. die nebenstehende Figur)

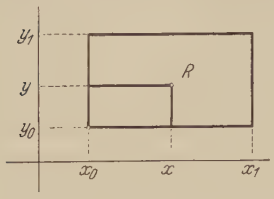


Fig. 1.

$$U(x,y) = \overset{x}{\underset{x_0}{\widehat{\int}}}(P(x,y_0)\,dx + I)\overset{y}{\underset{y_0}{\widehat{\int}}}(Q(x,y)\,dy + I),$$

$$T(x,y) = \overset{y}{\underset{y_0}{\widehat{\int}}}(Q(x_0,y)\,dy + I)\overset{x}{\underset{x_0}{\widehat{\int}}}(P(x,y)\,dx + I)$$

und sagen von $U$, es sei über die die Punkte $(x_0, y_0)$, $(x, y)$ verbindende *untere* Stufe, von $T$, es sei über die dieselben Punkte verbindende *obere* Stufe erstreckt. Es möge dann das über die Begrenzung des Rechtecks $R$ von dem Anfangspunkte $(x_0, y_0)$ ausgehend im positiven Sinne erstreckte Produktintegral durch den Ausdruck definiert werden:

$$(17) \qquad \overset{}{\underset{R}{\widehat{\int}}}(P\,dx + Q\,dy + I) = U(x_1, y_1)\,T(x_1, y_1)^{-1}.$$

Es handelt sich darum, dieses Randintegral in ein über die Fläche von $R$ erstrecktes gemischtes Doppelintegral zu verwandeln. — Nach unseren Voraussetzungen existieren jedenfalls fast überall in $R$ die derivierten Matrizen $D_x T$, $D_y T$, $\frac{\partial}{\partial x} D_y T$, $\frac{\partial}{\partial y} D_x T$, von denen $D_y T$ mit Benutzung der Differentialformel (14) zu bilden ist.

Wir betrachten nunmehr[4]) die Differenz $Q - D_y T$; dann ist nach bekannten Derivationsregeln (vgl. Math. Zeitschr. **33**, S. 48)

$$\frac{\partial}{\partial x}(T(Q - D_y T)\,T^{-1}) = T P_{12}\,T^{-1},$$

wo $P_{12} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} + PQ - QP$ die linke Seite der Integrabilitätsbedingung oder der sogenannte Riemannsche Krümmungstensor ist. Wir haben also

$$T(Q - D_y T)\,T^{-1} = \int T P_{12}\,T^{-1}\,dx$$

und folglich

$$(18) \qquad \overset{}{\underset{(R)}{\widehat{\iint}}}(T P_{12}\,T^{-1}\,dx\,dy + I) = \overset{y_1}{\underset{y_0}{\widehat{\int}}}([T(Q - D_y T)\,T^{-1}]_{x_0}^{x_1}\,dy + I).$$

Nun ist

$$D_y T = \overset{x_0}{\underset{x}{\widehat{\int}}}(P\,dx + I)\cdot Q(x_0, y)\cdot\overset{x}{\underset{x_0}{\widehat{\int}}}(P\,dx + I) + D_y\overset{x}{\underset{x_0}{\widehat{\int}}}(P\,dx + I);$$

bildet man aber nach der Formel (14) $D_y\overset{x}{\underset{x_0}{\widehat{\int}}}(P\,dx + I)$, so ergibt sich, daß der Wert dieser Matrix für $x = x_0$ gleich Null ist; wir erhalten

[4]) Das Folgende ist eine den hier gemachten Voraussetzungen angepaßte, etwas vereinfachte Darstellung der in den Math. Annalen **99**, S. 418 ff. angegebenen Rechnung.

folglich $\lim_{x \to x_0} D_y T = Q(x_0, y)$, so daß auf der rechten Seite der Gleichung (18) der Ausdruck unter dem Produktintegralzeichen für $x = x_0$ verschwindet. Wir finden somit für das gemischte Doppelintegral den Ausdruck

$$(19) \qquad \widehat{\int\int}_{(R)} (T P_{12} T^{-1} dx\, dy + I) = \widehat{\int_{y_0}^{y_1}} (\lim_{x \to x_1} T(Q - D_y T) T^{-1} dy + I).$$

Nehmen wir nun in der Formel (9a) $p = y_0$, $q = y$, $S' = T$, $B = Q$, so wird

$$\widehat{\int_{y_0}^{y}} (T(Q - D_y T) T^{-1} dy + I) = T(x, y_0) \cdot \widehat{\int_{y_0}^{y}} (Q\, dy + I) \cdot T(x, y)^{-1}.$$

Beachten wir, daß $T(x, y_0) = \widehat{\int_{x_0}^{x}} (P(x, y_0)\, dx + I)$ ist, so ergibt sich, zufolge des Analogons des Lebesgueschen Satzes für das Produktintegral (vgl. Math. Zeitschr. **33**, S. 58), für $x = x_1$, $y = y_1$

$$\widehat{\int_{y_0}^{y_1}} (\lim_{x \to x_1} T(Q - D_y T) T^{-1} dy + I) = U(x_1, y_1)\, T(x_1, y_1)^{-1},$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen (17) und (18)

$$(20) \qquad \widehat{\int\int}_{(R)} (T P_{12} T^{-1} dx\, dy + I) = \widehat{\int_{R}} (P dx + Q dy + I),$$

was die zu beweisende Gleichung ist.

## IV.

## Integrable Differentiale. Kurvenintegrale. Komplexe Variable.

Aus der Gleichung (20), die wir kurz als Greensche Formel bezeichnen, folgt, daß für den Fall, wo die Integrabilitätsbedingung $P_{12} = 0$ erfüllt ist, das über die Begrenzung des Rechtecks $R$ erstreckte Produktintegral

$$(21) \qquad \widehat{\int_{R}} (P dx + Q dy + I) = I$$

wird[5]). Wir können das auch so formulieren, daß wir sagen: Wenn in $R$

[5]) Durch eine etwas weitläufige, aber keineswegs schwierige Rechnung läßt sich zeigen, daß die Bedingung $P_{12} = 0$ durch die Forderung ersetzt werden kann, daß der Ausdruck

$$\frac{1}{h}(Q(x+h, y) - Q(x, y)) - \frac{1}{h}(P(x, y+h) - P(x, y)) + PQ - QP$$

für positive $h$ beschränkt bleibt und daß sein Limes für $h \to 0$ verschwindet. Dabei braucht also die Differenzierbarkeit von $P$ nach $y$ und die von $Q$ nach $x$ überhaupt nicht vorausgesetzt zu werden. Vgl. hierzu die oben unter [3]) zitierte Note von Pringsheim sowie die in dieser Note angegebenen älteren Arbeiten von G. Mittag-Leffler und L. Lichtenstein, ferner die Note von L. Heffter, Math. Zeitschr. **32** (1930), S. 476 nebst Nachtrag ebenda **34** (1931), S. 473.

1. die Matrizen $P$ und $Q$ stetig sind, die partiellen Derivierten $\frac{\partial P}{\partial y}$ und $\frac{\partial Q}{\partial x}$ fast überall existieren und beschränkt sind,

2. die Integrabilitätsbedingung $P_{12} = 0$ besteht,

so stimmen die Produktintegrale von $Pdy + Qdy + I$ erstreckt über die den Punkt $(x_0, y_0)$ mit irgendeinem in $R$ gelegenen Punkte $(x, y)$ verbindende untere und obere Stufe überein, so daß

$$U = T = \overset{(x,y)}{\underset{(x_0,y_0)}{\int}} (Pdx + Qdy + I) \tag{22}$$

eine Matrix darstellt, die nur von den Grenzen $(x_0, y_0)$, $(x, y)$ abhängt. Berechnen wir für die oben gegebenen Ausdrücke von $U$ oder $T$ nach der Jacobischen Formel (Math. Zeitschr. **33**, S. 44, Gl. (20)) die Determinante, so finden wir mit Rücksicht darauf, daß offenbar Sp. $Pdx$ + Sp. $Qdy$ [6]) ein totales Differential ist und mit Beachtung der bekannten Eigenschaften der Integrale von totalen Differentialen

$$\text{Det. } U = \text{Det. } T = \text{Det.} \overset{(x,y)}{\underset{(x_0,y_0)}{\int}} (Pdx + Qdy + I) = e^{\overset{(x,y)}{\underset{(x_0,y_0)}{\int}} (\text{Sp. } Pdx + \text{Sp. } Qdy)}.$$

Diese Determinante hat also in $R$ einen von Null verschiedenen Wert. Daraus folgt, daß die Matrix (22) in dem Rechteck $R$ eine Lösungsmatrix der simultanen partiellen linearen Differentialsysteme

$$D_x U = P, \qquad D_y U = Q \tag{23}$$

darstellt. — Es macht nun keine Schwierigkeiten, hieraus die folgenden Sätze abzuleiten (vgl. etwa meine „Vorlesungen" 1908, 4. und 5. Vorlesung).

I. Wenn in einem einfachzusammenhängenden Bereich $B$ der $(x, y)$-Ebene die Bedingungen 1. und 2. erfüllt sind, und es bedeuten $(x_0, y_0)$, $(x, y)$ zwei beliebige in $B$ gelegene Punkte, so denke man sich zwischen diesen eine endliche Anzahl von Zwischenpunkten $(x_1, y_1), \ldots, (x_p, y_p)$ so eingeschaltet, daß die je zwei aufeinanderfolgende dieser $p + 2$ Punkte verbindende obere oder untere Stufe (oder beide) ganz in $B$ verläuft; dann wird

$$V = \overset{(x,y)}{\underset{(x_0,y_0)}{\int}} (Pdx + Qdy + I) = \prod_{i=0}^{p} \overset{(x_{i+1}, y_{i+1})}{\underset{(x_i, y_i)}{\int}} (Pdx + Qdy + I), \quad (x_{p+1} = x,\ y_{p+1} = y),$$

eine in $B$ eindeutig definierte Matrix, die die simultanen Differentialsysteme (23) befriedigt und auch so erklärt werden kann, daß man die Punkte $(x_0, y_0)$ und $(x, y)$ durch eine ganz in $B$ verlaufende, rektifizierbare Jordankurve $C$ verbindet, diese durch auf ihr gelegene Punkte

---

[6]) Sp. $P$ bedeutet die *Spur* der Matrix $P$, d. h. die Summe der in der Hauptdiagonale stehenden Glieder.

$(x_1, y_1), \ldots, (x_p, y_p)$ irgendwie teilt und

$$V = \lim_{p} \prod_{i=1,2,\ldots,p} (P(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i) + Q(x_i, y_i)(y_{i+1} - y_i) + I)$$
$$= \int_C (P dx + Q dy + I)$$

setzt, wo der Limes sich auf eine unbegrenzte Verfeinerung der Teilung von $C$ bezieht[7]). — Für eine geschlossene Kurve $C$ wird

$$\int_C (P dx + Q dy + I) = I.$$

II. Ist $B$ ein zweifachzusammenhängender Bereich, der durch den Querschnitt $L$ in einen einfachzusammenhängenden $\bar{B}$ verwandelt wird, und bedeutet $C$ eine die Punkte $(x_0, y_0)$, $(x, y)$ von $B$ verbindende rektifizierbare Jordankurve, die ganz innerhalb $B$ verläuft und den Schnitt $L$ einmal im positiven Sinne durchquert, so hat man zuvörderst das über $C$ erstreckte Produktintegral folgendermaßen zu definieren: Sind $x', y'$ die Koordinaten des Schnittpunktes von $C$ mit $L$, so verlaufen die Kurvenstücke zwischen $(x_0, y_0)$ und dem Punkte $(x', y')$ des rechten Ufers von $L$ einerseits, zwischen $(x, y)$ und dem Punkte $(x', y')$ des linken Ufers von $L$ andererseits in dem einfachzusammenhängenden Bereich $\bar{B}$, so daß die längs dieser Kurvenstücke genommenen Produktintegrale über $P dx + Q dy + I$ gemäß I. wohldefiniert sind. Wir setzen dann

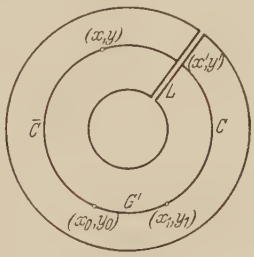


Fig. 2.

$$\int_C (P dx + Q dy + I) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x', y')} \cdot \int_{(x', y')}^{(x, y)}.$$

Wenn insbesondere die beiden Punkte $(x_0, y_0)$, $(x, y)$ identisch sind, die Kurve also eine geschlossene $G$ ist, so wird im allgemeinen das Produktintegral

$$S = \int_G (P dx + Q dy + I)$$

von $I$ verschieden sein. — Es ist jedoch, wenn $G'$ eine andere von $(x_0, y_0)$ ausgehende, sonst wie $G$ beschaffene Kurve bedeutet, der zwischen $G$ und $G'$ befindliche Raum einfachzusammenhängend und daher auch

$$\int_{G'} (P dx + Q dy + I) = S.$$

---

[7]) Für diese längs Kurven erstreckten Produktintegrale von integrierbaren Differentialen gelten natürlich die formalen Integrationsregeln (vgl. Math. Zeitschr. **33**, S. 41, Gl. (14a), S. 50, Gl. (36)) cum grano salis; ferner gilt

$$\text{Det.} \int_C (P dx + Q dy + I) = e^{\int_C (\text{Sp. } P dx + \text{Sp. } Q dy)}.$$

Dagegen hängt der Wert von $S$ wesentlich von dem Ausgangspunkte $(x_0, y_0)$ ab. Bedeutet nämlich $(x_1, y_1)$ einen zweiten, auf der geschlossenen Kurve $G$ gelegenen Punkt und sind $G', G''$ die Stücke, in die $G$ durch diese beiden Punkte zerfällt, so zwar, daß beim Durchlaufen von $G$ von $(x_0, y_0)$ aus in dem Sinne, daß dabei $L$ in positivem Sinne überschritten wird, zuerst $G'$ und dann $G''$ durchlaufen wird, und bezeichnet man das über $G$ erstreckte Produktintegral, wenn $(x_0, y_0)$ den Ausgangspunkt bildet, mit $S_0$, wenn dagegen $(x_1, y_1)$ der Ausgangspunkt ist, mit $S_1$, ferner die Produktintegrale über die Stücke $G', G''$ beziehungsweise mit $V', V''$, so ist offenbar $S_0 = V'V''$, $S_1 = V''V'$, und demnach $S_1 = V''S_0(V'')^{-1}$, d. h. das Produktintegral über eine geschlossene Kurve erfährt bei Änderung des Ausgangspunktes eine Transformation, geht also in eine ähnliche Matrix über.

Bedeutet nun $C$ eine die Punkte $(x_0, y_0)$, $(x, y)$ verbindende Kurve, die ganz in dem einfachzusammenhängenden Bereiche $B$ verläuft, $C$ wie oben eine ebensolche Kurve, die aber den Querschnitt $L$ einmal im positiven Sinne überschreitet, so folgt aus den gemachten Bemerkungen unmittelbar, daß

$$\int_C (P\,dx + Q\,dy + I) = S_0 \int_C (P\,dx + Q\,dy + I)$$

ist. — Die Verallgemeinerung dieser Sätze auf Bereiche von beliebig hohem Zusammenhang liegt auf der Hand.

Eine wichtige Anwendung finden die Betrachtungen, die wir eben angestellt haben, auf den Infinitesimalkalkul der Matrizen im Gebiete einer komplexen Veränderlichen. Da wir damit in die klassische Theorie der linearen Differentialsysteme einlenken, können wir uns darauf beschränken, hier einige der gewählten Darstellungsform eigentümliche Gesichtspunkte hervorzuheben.

Der Übergang zu den Matrizen, die von einer komplexen Variablen abhängen, kann in zweifacher Weise vorgenommen werden; entweder durch Zerfällung einer komplexen Matrix in reellen und imaginären Teil, wie es in den „Vorlesungen“ von 1908 (S. 50 und 73 ff.) geschehen ist, oder aber (vgl. Volterra, Memorie della Società dei XL, **12** (1899), S. 15) in folgender Weise: Es sei $A$ eine Matrix, deren Elemente Funktionen der beiden reellen Veränderlichen $x, y$ sind, von der Beschaffenheit, daß, wenn man $P = A$ und $Q = Ai$ setzt, die Bedingungen 1. und 2. für diese $P, Q$ erfüllt sind. Aus der Integrabilitätsbedingung $P_{12} = 0$ folgt dann $\frac{\partial A}{\partial y} = i\frac{\partial A}{\partial x}$, so daß die Elemente von $A$ als monogene Funktionen der komplexen Variablen $z = x + yi$ erscheinen. Wir setzen dann

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -i\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{dA}{dz},$$

nennen $A$ eine monogene Matrix von $z$ und betrachten nunmehr einen einfachzusammenhängenden Bereich $B$, in dem die Bedingungen 1. und 2. erfüllt sind. Die Matrix $A$ ist dann in $B$ holomorph, d. h. ihre Elemente sind holomorphe Funktionen von $z$, und wir können, indem wir die Bezeichnungen des Satzes I. beibehalten, das zwischen den Punkten $z = x + yi$ und $z_0 = x_0 + y_0 i$ längs der Kurve $C$ erstreckte komplexe Produktintegral durch die Formel

$$\overset{z}{\underset{z_0}{\widehat{\int}}}(A\,dz + I) = \overset{(x,\,y)}{\underset{(x_0,\,y_0)}{\widehat{\int}}}(A\,dx + i\,A\,dy + I) = \lim_{p} \prod_{k=1,2,\ldots,p} (A(z_k)\,(z_{k+1} - z_k) + I)$$

definieren, wo $z_k = x_k + i\,y_k$ gesetzt wurde. Dieses Integral hängt nur von den Grenzen ab, und es ist

$$\text{Det.} \overset{z}{\underset{z_0}{\widehat{\int}}}(A\,dz + I) = e^{\int_{z_0}^{z} \text{Sp.}\,A\,dz},$$

$$D_z \overset{z}{\underset{z_0}{\widehat{\int}}}(A\,dz + I) = D_x \overset{z}{\underset{z_0}{\widehat{\int}}}(A\,dz + I) = A,$$

so daß also die Matrix $Y = \overset{z}{\underset{z_0}{\widehat{\int}}}(A\,dz + I)$ in ihrer Abhängigkeit von $z$ in $B$ holomorph ist und das lineare Differentialsystem $D_z Y = A$ befriedigt. Das ist der Existenzsatz der klassischen Theorie. — Mutatis mutandis gelten für das komplexe Produktintegral in dem einfachzusammenhängenden Bereich, in dem die Matrix $A$ holomorph ist, einerseits die formalen Differentiations- und Integrationsregeln sowie die Abschätzungsformeln, die Math. Zeitschrift **33** in den Nummern V, VI, VII (S. 44—54) entwickelt sind, andererseits die oben in den Nummern I, II enthaltene Reihenentwicklung (3) nebst den Gleichungen (8), (9) und (14). — Wir heben nur noch hervor, daß für eine in $B$ verlaufende geschlossene Kurve $C$

$$\overset{}{\underset{C}{\widehat{\int}}}(A\,dz + I) = I$$

ist, was dem Cauchyschen Satze für das gewöhnliche Integral entspricht, und daß die unter II. in bezug auf einen zweifachzusammenhängenden Bereich $B$ ausgesprochenen Sätze und Definitionen ebenfalls ohne weiteres auf den komplexen Fall übertragbar sind. —

Anwendungen auf die Behandlung spezieller Probleme bleiben späteren Publikationen vorbehalten.

Gießen, den 6. März 1931.

(Eingegangen am 13. März 1931.)

# Zur algebraisch-axiomatischen Begründung der Topologie*).

Von

Gustav Bergmann in Wien.

## I. Allgemeine Dualitätsformeln.

In die axiomatische Darstellung der kombinatorischen Topologie, wie sie von W. Mayer[1]) in Angriff genommen worden ist, läßt sich auch der kombinatorische Inhalt der sogenannten Dualitätssätze[2]) einordnen. Für die kombinatorische Sphäre hat dies Mayer mit Hilfe der regulären Unterteilung und der modifizierten Randoperation — die, geometrisch gesprochen, die Behandlung offener Mengen durch finite Komplexringe ermöglicht — durchgeführt. Nimmt man zu diesen Hilfsmitteln noch die von J. Rybarz[3]) in abstrakten Ringen bereitgestellten, so gelingt es, auch die Verhältnisse in allgemeineren Mannigfaltigkeiten rein kombinatorisch zu erfassen.

$S^n$ sei eine $n$-dimensionale, simpliziale, reguläre Mannigfaltigkeit (mod 2), die wir der Einfachheit halber als randlos voraussetzen. Von einer regulären Mannigfaltigkeit sprechen wir, wenn das Polyeder um jedes Simplex Sphärenrand hat[4]). Dann ist jeder Stern der regulären Unterteilung eine Zelle mit Sphärenrand, und wir können, im Bereich der Homologiegruppe, statt in $S^n$ ebensogut im „dualen Sternring $\overline{S}^n$“ arbeiten.

---

*) Zusatz während der Korrektur. Die Darstellung im 3. Kapitel der jüngst erschienenen Topology von Lefschetz, mit der sich die vorliegende ihrem Aufbau und Ziel nach — Entwicklung der behandelten Fragen aus dem verallgemeinerten Poincaréschen Satz — aufs engste berührt, war mir bei ihrer Fertigstellung nicht bekannt. Methodisch liegt eine abstrakte Darstellung meines Wissens noch nicht vor.

[1]) W. Mayer, Abstrakte Topologie und Abstrakte Topologie II, Monatshefte **36**; Terminologie und Bezeichnungsweise nach Mayer.

[2]) Vgl. den Bericht von v. d. Waerden, Jahresberichte **39**.

[3]) J. Rybarz, Drei Fragen der abstrakten Topologie, Monatshefte **38**.

[4]) Zwei Beiträge zur abstrakten und kombinatorischen Topologie, Monatshefte **38**.

$\mathfrak{M}^t$ sei ein $t$-dimensionaler, homogener Unterring ($t \leqq n$) von $S^n$. Über $\mathfrak{M}^t$ setzen wir voraus:

V. Gehören die Punkte $P_{\alpha_i}$ ($i = 0, 1, \ldots, j$) zu $\mathfrak{M}^t$, und gibt es in $S^n$ ein Simplex $T^j = (P_{\alpha_0}, \ldots, P_{\alpha j})$, dann ist auch $T_j \subset \mathfrak{M}$.

Diese Voraussetzung ist keine wesentliche Einschränkung, denn sie ist immer durch reguläre Unterteilung zu erfüllen.

Ein für allemal setzen wir fest, daß alle Punkte, die nicht zu $\mathfrak{M}^t$ gehören, mit überstrichenen Indizes bezeichnet werden:

$$P_\alpha \subset \mathfrak{M}^t, \quad P_{\bar{\alpha}} \not\subset \mathfrak{M}^t.$$

Durch $\mathfrak{M}^t$ zerfallen die Sterne $\mathfrak{S}^{n-j}(P^j_{\alpha_1 \ldots \alpha_{j+1}})$ des Sternrings $\overline{S}^{(n)}$ in drei Klassen:

1. Die Gesamtheit $\dot{\mathfrak{U}}$ der Sterne, die nur ungestrichene Punkte führen,
2. „ „ $\dot{\mathfrak{B}}$ „ „ „ „ gestrichene „ „
3. „ „ $\mathfrak{R}$ „ „ „ „ Indizes beider Art führen.

$\dot{\mathfrak{U}}$ und $\dot{\mathfrak{B}}$ sind $n$-dimensional, $\mathfrak{R}$ ist $n-1$-dimensional. Man sieht ferner: $\mathfrak{U} = \dot{\mathfrak{U}} + \mathfrak{R}$ ist ein Ring, den wir als die „Sternumgebung“ von $\mathfrak{M}^t$ auch mit $\mathfrak{U}(\mathfrak{M}^t)$ bezeichnen wollen. $\mathfrak{U}$ ist der Ring über den $\mathfrak{S}^n(P_{\alpha_i})$, wo $P_{\alpha_i}$ alle Punkte von $\mathfrak{M}^t$ durchläuft.

$\mathfrak{B} = \dot{\mathfrak{B}} + \mathfrak{R}$ ist der Ring über den Sternen $\mathfrak{S}^n(P_{\bar{\alpha}})$ der gestrichenen Punkte.

Den Gegenstand der Untersuchung bilden die Zusammenhangszahlen von $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}, \mathfrak{R}$ und die zwischen ihnen und den Zahlen von $\mathfrak{M}$ und $S$ bestehenden Relationen.

## § 1.

Als charakteristische Eigenschaften, die von einem Umgebungsring $\mathfrak{U}(\mathfrak{M}^t)$ eines Unterringes $\mathfrak{M}^t$ zu verlangen sein werden, heben wir hervor:

$U_1$. $h^\varrho_{\mathfrak{U}(\mathfrak{M})} = h^\varrho_{\mathfrak{M}}$, insbesondere $h^\varrho_{\mathfrak{U}} = 0$ für $\varrho > t$.

$U_2$. Es gibt ein Basissystem der Zyklenklassen von $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$, dessen Individuen sämtlich Elemente von $\mathfrak{M}$ selbst sind.

Bevor wir beweisen, daß beide Forderungen auch in allgemeinen (nicht regulären) Mannigfaltigkeiten für $\mathfrak{U}(\mathfrak{M}^t)$ erfüllt sind, skizzieren wir einen sehr durchsichtigen Beweis von $U_1$ in regulären Mannigfaltigkeiten.

a) $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ ist selbst immer eine reguläre Mannigfaltigkeit. $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ ist der Ring über den $\mathfrak{S}^n(P_{\alpha_i})$. Jeder dieser $n$-dimensionalen Sterne ist selbst eine reguläre (berandete) Mannigfaltigkeit, und es gilt:

Die Vereinigung zweier regulärer $n$-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, die eine reguläre $n-1$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit ihres Randes gemein haben, ist selbst eine reguläre Mannigfaltigkeit[5]).

Ferner ist eine unmittelbare Folge aus dem Mechanismus der Indizes: Zwei $n$-dimensionale Sterne haben entweder einen $n-1$-dimensionalen Stern gemeinsam, oder sie sind fremd.

Ebenso: Zwei $n-1$-dimensionale Sterne mit einem gleichen Index haben entweder einen $n-2$-dimensionalen Stern gemeinsam, oder sie sind fremd.

Die Summe zweier $n$-dimensionaler Sterne einer $n$-dimensionalen regulären Mannigfaltigkeit ist also nach dem bisherigen selbst eine solche. Nehmen wir nun an, wir hätten dies bereits für den Summenring $\mathfrak{S}^n_{(k)}$ über den $k$ Sternen $\mathfrak{S}^n(P_{\alpha_1}), \ldots, \mathfrak{S}^n(P_{\alpha_k})$ bewiesen. $R(\mathfrak{S}^n(P_{\alpha_{k+1}}))$ hat mit $\mathfrak{S}^n_{(k)}$ höchstens $k$ $n-1$-dimensionale Sterne (mit einem festen Index) gemeinsam, deren Summenring $\mathfrak{S}^{n-1}_{(k)}$ ist aber nach unserer induktiven Annahme in $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}^n(P_{\alpha_{k+1}}))$ selbst eine reguläre Mannigfaltigkeit; also ist auch $\mathfrak{S}^n_{(k+1)}$ eine reguläre Mannigfaltigkeit, und wir gewinnen allgemein das Lemma:

L. In einer regulären $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist ein Ring über $n$-dimensionalen Sternen der regulären Unterteilung selbst eine reguläre Mannigfaltigkeit.

b) Es gilt demnach für $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ die bekannte Verallgemeinerung des Poincaréschen Dualitätssatzes, daß die Bettizahlen einer regulären Mannigfaltigkeit denen der in bezug auf ihren Rand geöffneten Mannigfaltigkeit dual sind[6]):

$$h^{\varrho}_{\mathfrak{U}} = h^{n-\varrho}_{\mathfrak{U}}. \tag{1}$$

c) Zwischen den Bettizahlen von $\dot{\mathfrak{U}}$ und denen von

$$\mathfrak{M}^t(h^0, h^1, \ldots, h^t, h^{t+1} = \ldots = h^n = 0)$$

besteht nach bekannten Schlüssen infolge V. die Relation

$$h^{\varrho}_{\dot{\mathfrak{U}}} = h^{n-\varrho}. \tag{2}$$

(1) und (2) gibt $U_1$.

Der nun folgende direkte Beweis, daß $\mathfrak{U} = \dot{\mathfrak{U}} + \mathfrak{R}$ sowohl $U_1$ wie $U_2$ genügt, operiert wieder in der Unterteilung, beruft sich jedoch nirgends auf die Regularität der Gesamtmannigfaltigkeit. Er bedient sich im wesentlichen der Methode der „elementaren Abänderung", deren Verwendung hier schon durch die Anschauung nahegelegt wird.

---

[5]) Wir unterdrücken die mit geläufigen Mitteln arbeitenden ausführlichen Beweise.

[6]) Vgl. Mayer, Abstr. Top. II.

## § 2.

a) Normalisierte Komplexe.

Ein Komplex $K^h$ der regulären Unterteilung ist von der Gestalt

$$K^h = \sum(P^{\nu_1-1}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{\nu_1}}, P^{\nu_2-1}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{\nu_1},\ldots,\gamma_{\nu_2}}, \ldots, P^{\nu_{h+1}-1}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{\nu_1},\ldots,\gamma_{\nu_{h+1}}}).$$

Dabei sind die Punkte hier und im folgenden immer in der Reihenfolge ihrer Ordnung hingeschrieben, wenn wir auch den oberen Ordnungsindex meist unterdrücken. $K^h$ gehört zu $\mathfrak{U}$, wenn sämtliche Punkte mindestens einen ungestrichenen Index führen und wenn sie nur solche führen nach V. zu $\mathfrak{M}$ selbst. Wir zerlegen nun $K^h$ so in Summanden, daß im ersten Summanden $S^h_1$ alle Simplizes zusammengefaßt sind, deren sämtliche Punkte nur ungestrichene Indizes führen, im zweiten Summanden $S^h_2$ alle Simplizes, in denen nur der letzte Punkt gestrichene Indizes führt, usw. Der letzte nicht verschwindende Summand $S^h_j$ führe noch $l$ „ungestrichene" Punkte.

$$K^{(h)} = S^h_1 + S^h_2 + \ldots + S^h_j .$$

Sei zunächst $l > 0$, also

$$(3) \qquad S^h_j = \sum(P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\nu_1}}, P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\nu_1},\ldots,\alpha_{\nu_2}}, \ldots, P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\nu_l}}, P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\nu_l}\beta\bar{\alpha}}, \ldots).$$

Wenn nun in keinem Simplex von $S^h_j$ die Indexgruppe $\beta$ auftritt, d. h. wenn in sämtlichen Simplizes von $S^h_j$ der erste Punkt mit gestrichenen Indizes nur die ungestrichenen Indizes seiner Vorgänger führt, nennen wir $S^h_j$ normalisiert. Entsprechendes gilt für die übrigen Summanden. Sind diese sämtlich normalisiert, dann sprechen wir von einem normalisierten Komplex $K^h_{(n)}$. Es gilt nun:

N. Zu jedem Komplex $K^h \subset \mathfrak{U}$ gibt es einen normalisierten $K^h_{(n)}$, so daß

$$R(K^h) = R(K^h_{(n)}),$$
$$K^h - K^h_{(n)} \sim 0\,(\mathfrak{U}).$$

Das in (3) angeschriebene Simplex liegt auf dem Rande des $h+1$-dimensionalen, zu $\mathfrak{U}$ gehörigen Simplex

$$T^{h+1} = (P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\nu_1}}, P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\nu_2}}, \ldots, P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\nu_l}}, \underline{P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\nu_l}\beta}}, P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\nu_l}\beta\bar{\alpha}}, \ldots).$$

Ersetzt man nun $T^h$ in $K^h$ durch $R(T^{h+1}) - T^h$, so sind die Bedingungen von N erfüllt. $T^h$ fällt weg, die neu hinzukommenden Simplizes gehören teils zu $S^h_j$, teils zu $S^h_{j-1}$; soweit sie zu $S^h_j$ gehören, enthalten sie keine kritische Indexgruppe mehr. Durch eine entsprechende Anzahl solcher Abänderungen erreicht man, immer in Übereinstimmung mit den Bedingungen N, die Normalisierung des letzten Summanden. Das Verfahren zeigt, daß, wenn man nun an die Normalisierung des vorletzten Summanden geht, der letzte

dabei nicht verändert wird. So erhalten wir schließlich einen normalisierten Komplex $K^h_{(n)}$.

Um nun noch den Fall $l = 0$ (die Tetraeder $\bar{T}^h$ des Randes) zu erledigen, beachten wir, daß kein Punkt von $\mathfrak{U}$ lauter ungestrichene Indizes führen kann. Wir ersetzen also

$$\bar{T}^h = (P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu\bar{\alpha}_{\nu_1}}, P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu\bar{\alpha}_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\bar{\alpha}_{\nu_3}}, \ldots)$$

durch $R(T^{h+1}) - \bar{T}^h$, wo

$$\bar{T}^{h+1} = (P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu}, P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu\bar{\alpha}_{\nu_1}}, P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu\bar{\alpha}_{\nu_1}\alpha_{\nu_2}\bar{\alpha}_{\nu_3}}, \ldots).$$

Damit ist die Behauptung für $h \leqq n-1$ bewiesen; ein $n$-dimensionaler Komplex ist immer normalisiert. Insbesondere gibt es zu jedem Zyklus $C^h < \mathfrak{U}$, $h \leqq n-1$, einen normalisierten $(l > 0)$ $C^h_{(n)}$, so daß $C^h \sim C^h_{(n)}(\mathfrak{U})$. Bleiben noch zu erledigen die $n$-dimensionalen Zykeln. Enthält ein $n$-dimensionaler Zyklus der Unterteilung $< \mathfrak{U}$ ein $n$-dimensionales Simplex der Unterteilung eines Grundsimplex, so enthält er das ganze Grundsimplex. Führt nun ein Grundsimplex auch gestrichene Punkte, so liegt es nicht ganz in $\mathfrak{U}$, führt es aber nur ungestrichene, so liegt es nach V. schon in $\mathfrak{M}$; also gehört jeder $n$-dimensionale Zyklus von $\mathfrak{U}$ bereits zu $\mathfrak{M}$.

b) Wir beweisen nun, daß jeder Zyklus von $\mathfrak{U}$ einem Zyklus von $\mathfrak{M}^t$ homolog ist, indem wir zeigen: jeder normalisierte Zyklus $(l > 0)$ liegt in $\mathfrak{M}^t$ selbst. Sei also

$$C^h_{(n)} = S^h_1 + S^h_2 + \ldots + S^h_j \qquad (1 \leqq h \leqq n-1)$$
$$R(C^h_{(n)}) = R(S^h_1) + R(S^h_2) + \ldots + R(S^h_j) = 0$$

ein normalisierter Zyklus von $\mathfrak{U}$. Nun greifen wir in $S^h_j$ alle Tetraeder heraus, die ein bestimmtes Simplex $\Delta^{l-1}$

$$\Delta^{l-1} = (P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\nu_1}}, P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\nu_1},\ldots,\alpha_{\nu_2}}, \ldots, P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\nu_1},\ldots,\alpha_{\nu_2},\ldots,\alpha_{\nu_l}})$$

enthalten, und schreiben ihre Summe in Produktform

$$(\Delta^{l-1} \cdot \bar{\Theta}^{h-l}).$$

Dabei ist also $\bar{\Theta}^{h-l}$ eine Summe $h-l$-dimensionaler Simplizes $\Theta^{h-l}$, die sämtlich mit Punkten $P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\nu_l}\bar{\alpha}}$ beginnen. D. h.

$$S^h_j = \sum_i (\Delta^{l-1}_i \cdot \Theta^{h-l}_i).$$

Der Teil von $R(S^h_j)$, der nur $l-1$ ungestrichene Punkte enthält, muß verschwinden. Daraus läßt sich nun $\bar{\Theta}^{h-l}_i = 0$ und also $S^h_j = 0$ schließen. In der Tat kann sich infolge der Normalisierung der Summand

$$(P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\nu_1}}, \ldots, P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\nu_{l-1}}}) \cdot \bar{\Theta}^{h-l}$$

gegen keinen von einem andern $\Delta$ herrührenden Summanden heben. Analog für $l=1$. Nun schließt man weiter $S_{j-1}^h=0$ bis $S_2^h=0$, d. h.

$$C_{(n)}^h = S_1^h < \mathfrak{M}^t,$$

w. z. b. w.

c) Jede Zyklenklasse von $\mathfrak{U}$ enthält Zyklen von $\mathfrak{M}^t$. Also ist zunächst

$$h_{\mathfrak{U}}^\varrho = h_{\mathfrak{M}}^\varrho = 0 \quad \text{für} \quad \varrho > t \quad \text{bzw.} \quad h_{\mathfrak{U}}^\varrho = h_{\mathfrak{M}}^\varrho \quad \text{für} \quad \varrho = t = n.$$

Um auch für die übrigen Dimensionen unsere Behauptungen zu beweisen, haben wir zu zeigen:

1. Ein Zyklus von $\mathfrak{M}^t \sim 0\,(\mathfrak{M}^t)$, ist auch $\sim 0\,(\mathfrak{U})$.
2. „ „ „ $\mathfrak{M}^t \not\sim 0\,(\mathfrak{M}^t)$, ist auch $\not\sim 0\,(\mathfrak{U})$.

1. ist evident, weil ja $\mathfrak{M}^t < \mathfrak{U}$.

Um 2. zu beweisen, sei $C^h < \mathfrak{M}^t$; die Simplizes von $C^h$ enthalten lauter ungestrichene Punkte. Sei ferner

$$C^h = R(K^{h+1}), \qquad K^{h+1} < \mathfrak{U}.$$

Nach b) kann $K^{h+1}$ immer als normalisiert vorausgesetzt werden. Setzt man

$$K^{h+1} = S_1^{h+1} + S_2^{h+1} + \ldots + S_j^{h+1},$$

so führt, da $R(K^{h+1})$ nur ungestrichene Punkte enthält, derselbe Schluß wie in b) zu $K^{h+1} = S_1^{h+1}$; d. h. aber $C^h \sim 0\,(\mathfrak{M}^t)$.

## § 3.

Um zu den Zusammenhangszahlen von $\mathfrak{V}$ zu gelangen, stellen wir zunächst fest, daß $\mathfrak{V}$ nach dem Lemma L. eine reguläre Mannigfaltigkeit ist mit dem Rande $\mathfrak{R}$. Also gilt nach dem verallgemeinerten Poincaréschen Dualitätssatz

$$h_{\dot{\mathfrak{V}}}^\varrho = h_{\mathfrak{V}}^{n-\varrho}.$$

Zur Bestimmung der Bettizahlen von $\dot{\mathfrak{V}}$ benutzen wir nunmehr die gleichfalls rein kombinatorisch in abstrakten Ringen $\mathfrak{R}$ für die Bettizahl $\dot{h}^\varrho$ des offenen Komplements eines Unterrings $\mathfrak{R}_1$ abgeleitete Formel von Rybarz:

$$\dot{h}^\varrho = H^\varrho - h^\varrho + t_{\mathfrak{R}_1,\mathfrak{R}}^\varrho + t_{\mathfrak{R}_1,\mathfrak{R}}^{\varrho-1}$$

Dabei sind $H^\varrho$ bzw. $h^\varrho$ die Bettizahlen von $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{R}_1$, und $t_{\mathfrak{R}_1,\mathfrak{R}}^\varrho$ ist die Basiszahl der $\varrho$-dimensionalen Zyklenklassen von $\mathfrak{R}_1$: $\sim 0\,(\mathfrak{R})$, $\not\sim 0\,(\mathfrak{R}_1)$. Setzen wir $\mathfrak{R} = S^n$, $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{U}$, so wird nach § 2 $h_{\mathfrak{U}}^\varrho = h_{\mathfrak{M}}^\varrho$ und

$$t_{\mathfrak{R}_1,\mathfrak{R}}^\varrho = t_{\mathfrak{U},S}^\varrho = t_{\mathfrak{M},S}^\varrho$$

gleich der Basiszahl der $\varrho$-dimensionalen Zyklen von $\mathfrak{M}^t$: $\not\sim 0\,(\mathfrak{M}^t)$, $\sim 0\,(S^n)$.

Man erhält also

$$h^{\varrho}_{\mathfrak{B}} = H^{\varrho}_{S} - h^{\varrho}_{\mathfrak{M}} + t^{\varrho}_{\mathfrak{M},S} + t^{\varrho-1}_{\mathfrak{M},S}$$

bzw. die sogenannte Dualitätsformel

$$h^{n-\varrho}_{\mathfrak{B}} = H^{\varrho}_{S} - h^{\varrho} + t^{\varrho}_{\mathfrak{M},S} + t^{\varrho-1}_{\mathfrak{M},S}.$$

Ist $S$ ein Nullring ($H^1 = \ldots = H^{n-1} = 0$), dann ist $t^{\varrho}_{\mathfrak{M},S} = h^{\varrho}$ ($\varrho = 1, \ldots, n-1$), man erhält die klassischen Formeln

$$h^{n-\varrho}_{\mathfrak{B}} = h^{\varrho-1}_{\mathfrak{M}} \qquad (\varrho = 2, \ldots, n-1).$$

## II. Ein Satz über die Ränder regulärer Mannigfaltigkeiten.

### § 4.

Während die Zusammenhangszahlen von $\mathfrak{U}$ durch $\mathfrak{M}$ selbst unabhängig von der einbettenden Mannigfaltigkeit festgelegt sind, ist das für $\mathfrak{R}$ nicht der Fall. Hingegen gilt[7]):

Ist $\mathfrak{R}^n$ eine $n$-dimensionale reguläre Mannigfaltigkeit mit den Zahlen $h^{\varrho}$ in einem $n$-dimensionalen regulären Nullring $\mathfrak{N}^n$, dann sind die Zusammenhangszahlen ihres $n-1$-dimensionalen Randes $\mathfrak{R}$

$$h^{\varrho}_{\mathfrak{R}} = h^{\varrho} + h^{n-\varrho-1} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n-2). \tag{4}$$

Man überzeugt sich leicht, daß in einer Sphäre diese Formel auch noch für $\varrho = 0$ und $\varrho = n-1$ gilt.

Wir untersuchen nun, welche Beziehung im allgemeinen, ohne Rücksicht auf eine eventuelle Einbettbarkeit zwischen den Zahlen von $\mathfrak{R}^n$ und $\mathfrak{R}^{n-1}$ statthat, bzw. die internen scharfen Bedingungen für die Gültigkeit von (4).

Wir öffnen die Mannigfaltigkeit in bezug auf ihren Rand und bezeichnen die Komplexe des Randes mit einem Querstrich; insbesondere ist $\bar{N}^{\varrho}$ ein $\varrho$-dimensionaler Zyklus von $\mathfrak{R}$ nullhomolog in $\mathfrak{R}$. Wir notieren die beiden Formeln

$$\dot{R}(K^{\varrho}) = \dot{R}(\dot{K}^{\varrho}) \tag{5}$$

und

$$R\,\dot{R}(K^{\varrho}) = \bar{N}^{\varrho-2}. \tag{6}$$

Beweis. Aus $K^{\varrho} = \bar{K}^{\varrho} + \dot{K}^{\varrho}$ folgt durch „Ableitung“

$$R(K^{\varrho}) = R(\bar{K}^{\varrho}) + R(\dot{K}^{\varrho}) \tag{7}$$

und daraus durch „Punktieren“ (5), setzt man jedoch in (7)

$$R(\dot{K}^{\varrho}) = \dot{R}(\dot{K}^{\varrho}) + \bar{L}^{\varrho-1},$$

so folgt durch nochmalige Ableitung (6).

[7]) W. Mayer, Abstr. Top. II.

Zwischen den Bettizahlen von $\mathfrak{R}$ und denen von $\dot{\mathfrak{R}}(h^\varrho)$ besteht nach Rybarz die Beziehung

$$\dot{h}^\varrho = h^\varrho - h^\varrho_{\mathfrak{R}} + t^\varrho + t^{\varrho-1}. \tag{8}$$

Dabei ist $t^\varrho$ die Basiszahl der $\varrho$-dimensionalen Zyklen $C^\varrho$ von $\mathfrak{R}$ $\sim 0(\mathfrak{R})$, $\nsim 0(\mathfrak{R})$. Wir konstruieren nun eine Zuordnung zwischen den $C^\varrho \sim 0(\mathfrak{R})$ und den $\varrho+1$-dimensionalen Zyklen von $\dot{\mathfrak{R}}$.

1. Nach Voraussetzung ist $C^\varrho = R(K^{\varrho+1})$, also $0 = \dot{R}(K^{\varrho+1}) = \dot{R}(\dot{K}^{\varrho+1})$. $\dot{K}^{\varrho+1}$ ist ein $\dot{C}^{\varrho+1}$ von $\dot{\mathfrak{R}}$, den wir $\bar{C}^\varrho$ zuordnen

$$C^\varrho \to \dot{C}^{\varrho+1}.$$

Diese Zuordnung ist operationstreu.

2. Jedem $\dot{C}^{\varrho+1}$ ordnen wir zu die Gesamtheit der Komplexe $K^{\varrho+1} = \dot{C}^{\varrho+1} + \bar{K}^{\varrho+1}$, bilden

$$R(K^{\varrho+1}) = R(\dot{C}^{\varrho+1}) + \bar{N}^\varrho = \bar{C}^\varrho_0 + \bar{N}^\varrho = \bar{C}^\varrho$$

und ordnen zu

$$\dot{C}^{\varrho+1} \to \bar{C}^\varrho.$$

Diese Zuordnung ist operationstreu.

Aus $\bar{C}^\varrho \to \dot{C}^{\varrho+1}$ folgt $\dot{C}^{\varrho+1} \to \bar{C}^\varrho$ und umgekehrt.

Ferner: Die Zyklen $\bar{C}^\varrho$, die einem $\dot{C}^{\varrho+1}$ entsprechen, unterscheiden sich nur um $\bar{N}^\varrho$. Man kann also fragen, was den Klassen nach $\bar{N}^\varrho$ entspricht.

Wenn wir zeigen können: Zwei $\varrho+1$-dimensionale Zyklen von $\dot{\mathfrak{R}}$, die zur selben Homologieklasse von $\dot{\mathfrak{R}}$ gehören, entsprechen Zyklen, die sich nur um $\bar{N}^\varrho$ unterscheiden, dann haben wir gezeigt:

Den Klassen von $C^\varrho$ nach $N^\varrho$ entspricht eine Untergruppe der $\varrho+1$-dimensionalen Homologiegruppe von $\dot{\mathfrak{R}}$.

Sei also

$$\dot{C}_1^{\varrho+1} = \dot{C}^{\varrho+1} + \dot{R}(\dot{L}^{\varrho+2}).$$

Setzt man

$$\dot{C}_1^{\varrho+1} = K_1^{\varrho+1} + \bar{K}_1^{\varrho+1}, \quad \text{bzw.} \quad \dot{C}^{\varrho+1} = K^{\varrho+1} + \bar{K}^{\varrho+1},$$

so wird daraus

$$K_1^{\varrho+1} + \bar{K}_1^{\varrho+1} = K^{\varrho+1} + \bar{K}^{\varrho+1} + \dot{R}(L^{\varrho+2})$$

und durch Randbildung

$$\bar{C}_1^\varrho + \bar{N}_1^\varrho = C^\varrho \mid \bar{N}^\varrho + R\,\dot{R}(L^{\varrho+2}),$$

also nach (6)

$$\bar{C}_1^\varrho = \bar{C}^\varrho + \bar{N}_0^\varrho.$$

Bezeichnet man die Basiszahl der den $\bar{N}^\varrho$ entsprechenden Untergruppe der $\varrho+1$-dimensionalen Homologiegruppe von $\dot{\mathfrak{R}}$ mit $j_{\varrho+1}$, so gilt demnach

$$t^\varrho = \dot{h}^{\varrho+1} - j_{\varrho+1}.$$

Wir zeigen nun: Die in Rede stehende Untergruppe der $\varrho+1$-ten Homologiegruppe von $\dot{\mathfrak{R}}$ ist isomorph mit der Faktorgruppe

$$(\mathrm{F}) \quad \frac{\varrho+1\text{-dimensionale Zyklenklassen von } \dot{\mathfrak{R}}}{\varrho+1\text{-dimensionale Zyklenklassen von } \mathfrak{R}, \text{ die Zyklen von } \mathfrak{R} \text{ enthalten}},$$

für $\varrho = 0, 1, \ldots, n-2$.

Beweis. Einem bestimmten $\bar{C}^\varrho$ entsprechen etwa in $\dot{\mathfrak{R}}$ die Klassen mit den Repräsentanten

$$\dot{K}^{\varrho+1}, \dot{K}_1^{\varrho+1}, \ldots, \dot{K}_\nu^{\varrho+1}.$$

$\dot{C} = R(K^{\varrho+1}) = R(K_1^{\varrho+1})$, also ist $K^{\varrho+1} - K_1^{\varrho+1} = C_1^{\varrho+1}$ ein Zyklus von $\mathfrak{R}$. Wäre nun $C_1^{\varrho+1} \sim \bar{C}^{\varrho+1}(\mathfrak{R})$, wo $\bar{C}^{\varrho+1} \subset \mathfrak{R}$, so hätte man

$$K^{\varrho+1} + K_1^{\varrho+1} = R(L^{\varrho+2}) - \bar{C}^{\varrho+1}$$

und daraus durch Punktieren

$$\dot{K}^{\varrho+1} + \dot{K}_1^{\varrho+1} = \dot{R}(L^{\varrho+2}) = \dot{R}(\dot{L}^{\varrho+2}),$$

d. h. $\dot{K}^{\varrho+1} \sim \dot{K}_1^{\varrho+1}(\dot{\mathfrak{R}})$, gegen die Annahme, daß es sich um die Repräsentanten verschiedener Klassen handelt. Ebenso argumentieren wir für $K^{\varrho+1} + K_2^{\varrho+1} = C_2^{\varrho+1}$ usw. und erhalten so lauter (von 1 verschiedene) Zyklen

$$C_1^{\varrho+1}, C_2^{\varrho+1}, \ldots, C_\nu^{\varrho+1}$$

der Faktorgruppe (F). Es gehören ferner keine zwei dieser Repräsentanten derselben Klasse nach (F) an. Wäre etwa

$$C_1^{\varrho+1} - C_2^{\varrho+1} \sim \bar{C}^{\varrho+1} \subset \mathfrak{R},$$

so hätte man

$$K_1^{\varrho+1} - K_2^{\varrho+1} = R(L^{\varrho+2}) - \bar{C}^{\varrho+1}$$

und durch Punktieren denselben Widerspruch wie oben.

Bleibt noch zu zeigen, daß jede Klasse der Faktorgruppe erfüllt wird. Sei $\tilde{C}^{\varrho+1}$ ein Repräsentant einer solchen, dann gilt außer $C = R(K^{\varrho+1})$ auch $\bar{C} = R(\tilde{K}^{\varrho+1})$, wo $\tilde{K}^{\varrho+1} = \tilde{C}^{\varrho+1} - K^{\varrho+1}$. Die durch $\tilde{C}^{\varrho+1}$ repräsentierte Klasse kommt also vor!

Berücksichtigt man nun wieder $\dot{h}^{\varrho+1} = h^{n-\varrho-1}$ (reguläre Mannigfaltigkeit), so folgt aus (8)

$$(9) \qquad h_{\mathfrak{R}}^{\varrho} = h^{\varrho} + h^{n-\varrho-1} - j_\varrho - j_{\varrho-1}.$$

Dabei ist $j_{\varrho+1}$ die Basiszahl der Faktorgruppe (F) für $\varrho = 0, 1, \ldots, n-2$, $j_0 = j_n = 0$. D. h.:

(R) Ist $\mathfrak{R}^n$ eine reguläre $n$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit den Zusammenhangszahlen $h^\varrho$, so genügen die Zahlen ihres Randes $\mathfrak{R}$ dann und nur dann der Beziehung (4), wenn jeder ihrer Zyklen homolog ist einem Zyklus des Randes (bis $n-1$). Allgemein gilt (9) mit der durch (F) gegebenen Bedeutung der $j_\varrho$.

Aus der Symmetrie der Zahlen der regulären Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}$ und aus dem Umstand, daß $h^\varrho + h^{n-\varrho-1}$ durch $\varrho \to n-\varrho-1$ in sich übergeht, folgt ferner die Symmetrie der Reihe

$$j_1, j_2, \ldots, j_{n-2}, j_{n-1}.$$

Also genügt für die Gültigkeit von (9) bereits $j_x = j_{x+1} = \ldots = j_{n-1} = 0$ mit $x = \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Betrachten wir insbesondere die Sternumgebung $\mathfrak{U}$ eines $t$-dimensionalen Unterrings $\mathfrak{M}^t(h^\varrho)$ in einer $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit. Da die Bettizahlen von $\mathfrak{U}$ von der $(t+1)$-ten an verschwinden, gilt für $\mathfrak{U}$ nach der Bedeutung der Faktorgruppe (F)

$$j_{t+1} = j_{t+2} = \ldots = j_{n-1} = 0.$$

Es folgt:

(S) Der Rand $\mathfrak{R}$ der Sternumgebung eines $t$-dimensionalen Unterrings $\mathfrak{M}^t(h^\varrho)$ einer regulären $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit hat notwendig die Zusammenhangszahlen

$$h_{\mathfrak{R}}^\varrho = h^\varrho + h^{n-\varrho-1},$$

so lange $t \leqq \left[\frac{n-1}{2}\right]$.

(Eingegangen am 2. Mai 1931.)

# Über Zusammenhänge zwischen der Differentialgeometrie im Großen und im Kleinen*).

Von

W. Rinow in Berlin.

## § 1.

### Einleitung.

Ein differentialgeometrisches Flächenelement $E$ (im folgenden auch schlechthin Element genannt) ist ein System von Funktionen

$$g_{11}(x_1, x_2),\ g_{12}(x_1, x_2) = g_{21}(x_1, x_2),\ g_{22}(x_1, x_2)$$

mit den folgenden Eigenschaften: 1. Die $g_{ik}(x_1, x_2)$ sind in einer Umgebung von $x_1^0, x_2^0$ reelle, regulär analytische Funktionen der beiden Veränderlichen $x_1, x_2$. 2. Es ist $g(x_1^0, x_2^0) = g_{11}(x_1^0, x_2^0)\, g_{22}(x_1^0, x_2^0) - g_{12}^2(x_1^0, x_2^0) > 0$ und $g_{11}(x_1^0, x_2^0) > 0$, d. h. die quadratische Form $\sum g_{ik}(x_1, x_2)\, u_i u_k$ ist in einer hinreichend kleinen Umgebung von $x_1^0, x_2^0$ positiv definit. $(x_1^0, x_2^0)$ heißt der Trägerpunkt von $E$. Zwei Elemente $g_{ik}(x_1, x_2)$ mit dem Trägerpunkt $x_1^0, x_2^0$ und $h_{ik}(y_1, y_2)$ mit dem Trägerpunkt $y_1^0, y_2^0$ heißen gleich, wenn es eine Transformation $y_i = y_i(x_1, x_2)$ gibt derart, daß $y_i^0 = y_i(x_1^0, x_2^0)$ ist, die $y_i(x_1, x_2)$ in einer Umgebung von $x_1^0, x_2^0$ reelle, regulär analytische Funktionen von $x_1$ und $x_2$ sind, deren Funktionaldeterminante $\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)}$ an der Stelle $x_1^0, x_2^0$ nicht verschwindet, und daß $\sum g_{ik}(x_1, x_2)\, \dot{x}_i \dot{x}_k = \sum h_{ik}(y_1, y_2)\, \dot{y}_i \dot{y}_k$ gilt. Die $g_{ik}$ genießen also Tensoreigenschaften. Die Länge eines in hinreichender Nähe von $x_1^0, x_2^0$ verlaufenden, stetig differenzierbaren Bogens $x_i \quad x_i(t) \quad (a \leqq t \leqq b)$ wird bekanntermaßen durch das Integral $L = \int_a^b \sqrt{\sum g_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k}\, dt$ definiert. $L$ ist nach 2. stets positiv und zufolge der Gleichheitsdefinition unabhängig vom Koordinatensystem. Es ist also durch ein Element $E$ eine Differentialgeometrie „im Kleinen“ gegeben.

*) Dissertation, Universität Berlin, 1931.

Auf einer differentialgeometrischen Fläche[1]) $F$ ist durch die auf ihr bestimmte Differentialgeometrie „im Großen" in jedem Punkt von $F$ eine Differentialgeometrie „im Kleinen" gegeben, d. h. jeder Punkt von $F$ ist Trägerpunkt eines differentialgeometrischen Elementes. Ist nun ein Punkt von $F$ Träger eines Elementes, das gleich einem gegebenen Element $E$ ist, so soll $F$ eine Fortsetzung von $E$ heißen; die Fortsetzung von $E$ zu $F$ soll vollständig heißen, wenn $F$ vollständig[1]) ist.

Es handelt sich nun darum, inwieweit Eigenschaften der Fläche $F$ (insbesondere topologische) durch eines ihrer Elemente bestimmt sind. Zunächst wird die Frage behandelt: Ist eine Fortsetzung eines Elementes $E$ zu einer Fläche $F$ durch $E$ eindeutig bestimmt? Im § 2 wird diese Frage für den wichtigsten Spezialfall dahin beantwortet, daß *zwei einfach zusammenhängende, vollständige Flächen $F$ und $F'$, die Fortsetzungen desselben Elementes $E$ sind, stets isometrisch sind* („Eindeutigkeitssatz"). Dabei ist der einfache Zusammenhang und die Vollständigkeit von $F$ durchaus wesentlich, wie folgende Betrachtungen lehren: Auf jeder unverzweigten Überlagerungsfläche $F'$ einer differentialgeometrischen Fläche $F$ kann ebenfalls eine Differentialgeometrie im Großen erklärt werden, indem man in jedem Punkte von $F'$ diejenige Differentialgeometrie im Kleinen festsetzt, die sich in dem Punkte von $F$ findet, über dem die Punkte von $F'$ liegen. $F'$ läßt sich dann eindeutig und im Kleinen längentreu auf $F$ abbilden. Ist daher $F$ Fortsetzung eines Elementes $E$, so ist offenbar auch $F'$ Fortsetzung von $E$. Ist $F$ vollständig, so ist auch $F'$ vollständig[1a]). Diese Tatsache sei formuliert als

Satz 1. *Ist die Fläche $F$ Fortsetzung des Elementes $E$, so ist $E$ auch zu jeder unverzweigten Überlagerungsfläche $F'$ von $F$ fortsetzbar. $F'$ ist eindeutig und im Kleinen längentreu auf $F$ abbildbar. Ist $F$ vollständig, so ist es auch $F'$.*

Ist daher $F$ eine nicht einfach zusammenhängende Fortsetzung von $E$, so gibt es, selbst wenn $F$ vollständig ist, stets auch eine Fortsetzung $F'$ von $E$, die nicht isometrisch $F$ ist[1b]). Auch die Forderung der Vollständigkeit ist notwendig; man kann sie nicht etwa durch Nichtfortsetzbarkeit ersetzen. Es sind nämlich die euklidische Ebene, die ja vollständig und

[1]) Wegen des Begriffs der differentialgeometrischen und der vollständigen Fläche siehe: H. Hopf und W. Rinow, Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche, Comm. Math. Helv. **3** (1931), S. 209—225.

[1a]) Das folgt unmittelbar aus dem „Abtragbarkeitspostulat" in der unter [1]) genannten Arbeit.

[1b]) Wie das Beispiel des Torus und seiner ihm homöomorphen endlichblättrigen Überlagerungsflächen lehrt, ist sogar die Homöomorphie von $F$ und $F'$ nicht für die Isometrie hinreichend.

daher auch nicht fortsetzbar ist, und das in der unter [1]) zitierten Arbeit konstruierte Beispiel einer nicht fortsetzbaren Fläche offenbar Fortsetzungen eines euklidischen Elementes. Sie sind beide einfach zusammenhängend, aber nicht isometrisch.

Der § 3 beschäftigt sich mit der Frage, ob jedes differentialgeometrische Element zu einer vollständigen Fläche fortsetzbar ist. Der Satz 7 gibt dafür eine notwendige Bedingung an, die in dem Falle, daß es keine zum Trägerpunkt eines Elementes konjugierten Punkte gibt, auch hinreichend ist. Daß im allgemeinen diese Bedingung jedoch nicht hinreichend ist, ergibt sich aus dem Satz 11, 3 des § 5.

Nach Satz 1 läßt sich ein Element $E$, falls es überhaupt vollständig fortsetzbar ist, stets zu einer vollständigen, der Ebene oder der Kugel homöomorphen Fläche $F$ fortsetzen, und zwar ist es wegen des Eindeutigkeitssatzes bereits durch differentialgeometrische Eigenschaften von $E$ eindeutig bestimmt, ob $F$ der Ebene oder der Kugel homöomorph ist. Wie muß nun $E$ beschaffen sein, damit der eine oder der andere Fall eintritt? Gewisse Bedingungen dafür sind in den Sätzen des § 4 über konjugierte Punkte enthalten. Schließlich wird im § 5 die Frage nach den sämtlichen vollständigen Fortsetzungen für spezielle Elemente, die Drehungselemente, vollständig beantwortet. Hierbei wird der Fall konstanter Krümmung, für den das Problem mit dem Clifford-Kleinschen Raumproblem identisch ist, ausgeschlossen.

## § 2.

## Eindeutigkeitssatz.

Satz 2. *Sind $F$ und $F'$ zwei einfach zusammenhängende, vollständige Flächen und Fortsetzungen desselben differentialgeometrischen Elementes $E$, so sind $F$ und $F'$ isometrisch; und zwar ist die Abbildung $F \leftrightarrow F'$ Fortsetzung der durch die Koinzidenz in $E$ gegebenen Abbildung.*

Beweis. Da $F$ und $F'$ Fortsetzungen desselben Elementes $E$ sind, so gibt es auf $F$ einen Punkt $A$ und um $A$ eine Umgebung, die sich längentreu auf eine Umgebung um einen Punkt $A'$ der Fläche $F'$ abbilden läßt. Diese Umgebungen kann man als genügend kleine geodätische Kreisscheiben $k$ um $A$ und $k'$ um $A'$ vom gleichen Radius $R$ wählen. $k' = l(k)$ sei die längentreue Abbildung von $k$ auf $k'$. Sind $r$ und $\varphi$ die geodätischen Polarkoordinaten in $A$ bzw. $A'$, bedeutet also $r$ die Bogenlänge auf den geodätischen Strahlen $\varphi =$ konst. durch $A$ bzw. $A'$ und $\varphi$ den Winkel eines solchen Strahles gegen eine feste Richtung, die in $A$ und $A'$ übereinstimmend gewählt sei, so werden durch $k' = l(k)$ diejenigen Punkte einander zugeordnet, die dieselben Koordinaten $r, \varphi$ haben; $R$ kann man

offenbar so klein wählen, daß $r, \varphi$ sowohl in $k$ als auch in $k'$ ein reguläres Koordinatensystem bilden. Wegen der Längentreue von $l(k)$ sind die Fundamentalgrößen $g'_{ik}$ in $k'$ und $g_{ik}$ in $k$ identisch, d. h. es ist für jedes $\varphi$ und für $0 \leqq r < R$

$$g'_{11}(r, \varphi) = g_{11}(r, \varphi) = 1, \quad g'_{12}(r, \varphi) = g_{12}(r, \varphi) = 0, \quad g'_{22}(r, \varphi) = g_{22}(r, \varphi).$$

Es sind nun $g_{22}$, $g'_{22}$ für alle reellen $r$, $\varphi$ regulär, und es ist $g'_{22}(r, \varphi) = g_{22}(r, \varphi)$ für jedes reelle $r$ und $\varphi$. Denn führt man auf irgendeiner geodätischen Linie einer Fläche, für die das Abtragbarkeitsaxiom (siehe [1]) gilt, die Bogenlänge $r$ von einem ihrer Punkte aus gerechnet als Parameter ein, so ist die Gaußsche Krümmung $K(r)$ auf dieser geodätischen Linie eine Funktion von $r$, die für jedes reelle $r$ regulär analytisch ist. Dasselbe gilt dann auch für jede Lösung der Jacobischen Differentialgleichung $y'' + K(r)\, y = 0$. Da $l(k)$ längentreu ist, ist die Krümmung $K'(r, \varphi)$ von $F'$ mit der Krümmung $K(r, \varphi)$ von $F$ für $0 \leqq r < R$ identisch. Weil aber $K(r, \varphi)$ und $K'(r, \varphi)$ für jedes reelle $\varphi$ an jeder reellen Stelle $r$ regulär analytische Funktionen von $r$ sind, so ist auch für jedes reelle $r$ und $\varphi$ $K(r, \varphi) = K'(r, \varphi)$. Es ist nun $K(r, \varphi) = \frac{-1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial^2 \sqrt{g_{22}}}{\partial^2 r} = \frac{-1}{\sqrt{g'_{22}}} \frac{\partial^2 \sqrt{g'_{22}}}{\partial r^2}$, mithin sind $\sqrt{g_{22}}$ und $\sqrt{g'_{22}}$ Lösungen der Differentialgleichung: $y'' + K(r, \varphi)\, y = 0$. $\sqrt{g_{22}}$ und $\sqrt{g'_{22}}$ sind also regulär analytische Funktionen von $r$ für jedes reelle $r$ und $\varphi$ und für $0 \leqq r < R$ identisch, mithin auch für jedes reelle $r$.

Durch $k' = l(k)$ sind die Strahlen des Büschels geodätischer Linien durch $A$ eineindeutig auf die des Büschels in $A'$ bezogen; es entsprechen sich nämlich immer Strahlen desselben Wertes $\varphi$. $c$ sei irgendein geodätischer Strahl durch $A$ und $c'$ der entsprechende Strahl durch $A'$. Auf beiden Strahlen sei als Parameter die Bogenlänge $r$ von $A$ bzw. $A'$ aus gerechnet gewählt und Punkte mit gleichem $r$ einander zugeordnet. Es entsprechen nun den auf $c$ zu $A$ konjugierten Punkten die auf $c'$ zu $A'$ konjugierten und umgekehrt. Denn diese sind definiert durch die Nullstellen der Lösungen der Jacobischen Differentialgleichung $y'' + K y = 0$, die für $r = 0$ verschwinden. Eine solche Lösung ist aber für $c$ $\sqrt{g_{22}}$ und für $c'$ $\sqrt{g'_{22}}$, und diese beiden Lösungen sind identisch.

Nennt man einen geodätischen Bogen schlicht, falls er doppelpunktfrei ist und auf ihm keine zu den Endpunkten konjugierten Punkte liegen, so läßt sich jeder schlichte Bogen in ein Feld von geodätischen Strahlen durch einen seiner Endpunkte einbetten. Ist $AB$ ein schlichter Bogen des Strahles $c$, so entspricht ihm eindeutig ein Bogen $A'B'$ des Strahles $c'$, und $A'B'$ kann keine konjugierten Punkte enthalten. $AB$ läßt sich in ein Feld von Strahlen durch $A$ einbetten und ebenso $A'B'$ in ein Feld von Strahlen durch $A'$, falls $A'B'$ keine Doppelpunkte besitzt. In diesen beiden

Feldern können daher noch die ursprünglichen Polarkoordinaten $r, \varphi$ verwendet werden. Ordnet man Punkte mit gleichen Koordinaten $r, \varphi$ einander zu, so ist die dadurch hergestellte Abbildung der beiden Felder aufeinander längentreu, da, wie vorher gezeigt, dann in zugeordneten Punkten die Fundamentalgrößen übereinstimmen, und es ist diese Abbildung für $r < R$ mit $k' = l(k)$ identisch. Sollte $A'B'$ Doppelpunkte haben, so kann man zwar $A'B'$ nicht mehr in ein gewöhnliches Feld einbetten, wohl aber in eine Schar von Strahlen durch $A'$, die im Kleinen ein Feld bilden, also in ein „unverzweigtes mehrblättriges Feld“ (in Analogie zu den mehrblättrigen Bereichen in der Funktionentheorie). In diesem mehrblättrigen Feld kann man $r, \varphi$ „im Kleinen“ als Koordinaten verwenden, d. h. in hinreichend kleinen Umgebungen um jeden Punkt von $A'B'$. Daher wird jetzt das Feld um $AB$ eindeutig und im Kleinen längentreu auf das mehrblättrige Feld um $A'B'$ abgebildet, wenn man Punkte mit gleichen Koordinaten $r, \varphi$ einander zuordnet. Es läßt sich also die Abbildung $l(k)$ längs jeden schlichten Bogens durch $A$ fortsetzen.

Eine Umgebung $U$ von $A$ soll schlicht heißen, wenn sie von einem geodätischen Kreise um $A$ begrenzt wird, dessen Radien sein Inneres schlicht bedecken. Da die Radien einer schlichten Umgebung um $A$ schlichte Bögen sind, so ist durch die Zuordnung von Punkten mit gleichen Koordinaten $r, \varphi$ jede schlichte Umgebung um $A$ eindeutig und im Kleinen längentreu auf ein gewisses Gebiet von $F'$ abgebildet, das $A'$ als inneren Punkt enthält.

Von jedem Punkt $P$ aus, den man durch Fortsetzung der Abbildung $l(k)$ auf diese Weise erreicht hat, kann man die Abbildung $l(k)$ offenbar wieder längs jedes schlichten Bogens durch $P$ fortsetzen. Nennt man einen Weg, der aus endlich vielen, schlichten geodätischen Bögen zusammengesetzt ist, ein ausgezeichnetes Polygon, so kann man nunmehr die Abbildung $l(k)$ längs jedes ausgezeichneten Polygons von $A$ aus fortsetzen. Da jeder geodätische Bogen nur endlich viele Doppelpunkte und nur endlich viele zu den Endpunkten konjugierte Punkte enthält, so kann man ihn in eine endliche Anzahl von schlichten Bögen zerlegen. Daher kann man $l(k)$ von $A$ aus längs jeder geodätischen Linie und damit auch längs jedes geodätischen Polygons fortsetzen.

$w = P(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ sei ein stetiger Weg, der $A$ mit einem beliebigen Punkt $C$ von $F$ verbindet. Dann gibt es um jeden Punkt $P$ von $w$ eine größte schlichte Umgebung mit dem Radius $r(P)$ ($r(P) = \infty$ stört den Beweisgang nicht), d. h. eine offene Kreisscheibe vom Radius $r(P)$ derart, daß die Umgebungen um $P$ vom Radius $r' \leqq r(P)$ schlicht sind, vom Radius $r' > r(P)$ dagegen nicht mehr. Die Menge der Zahlen $r(P)$ hat eine positive untere Grenze $d'$. Es gäbe nämlich sonst eine Folge von

Punkten $P_i$ auf $w$, die gegen einen Punkt $Q$ auf $w$ konvergierte und für die die Folge der Zahlen $r(P_i)$ gegen 0 konvergierte. Es gibt aber um $Q$ eine Umgebung $U$ derart, daß sich je zwei Punkte aus $U$ durch einen und nur einen geodätischen Bogen verbinden lassen, der kürzester Weg ist[2]). Ist $X$ ein Punkt aus $U$, so bildet daher das Büschel der geodätischen Strahlen durch $X$, soweit sie sämtlich in $U$ enthalten sind, eine schlichte Umgebung um $X$. Da fast alle $P_i$ in $U$ liegen, so kann $r(P_i)$ nicht beliebig klein werden. — Ferner gilt: Ist $M$ eine kompakte Menge, so gibt es ein $d'' > 0$ derart, daß je zwei Punkte $X$ und $Y$ aus $M$, für die $\varrho(X, Y) < d''$ ist, durch einen und nur einen kürzesten Weg verbindbar sind[2]). Da $w$ kompakt ist, kann man diesen Satz auf $w$ anwenden. Es sei $0 < d < d'$ und $d < d''$. Dann bildet die Menge der Punkte $X$ mit $\varrho(P, X) < d$ um jeden Punkt $P$ aus $w$ eine schlichte Umgebung $U(P)$, und je zwei Punkte von $w$ aus $U(P)$ sind durch genau einen kürzesten Weg verbindbar.

$U_0$ sei eine schlichte Umgebung von $A = P(0)$ vom Radius $d$. Dann muß $w$ den Kreis $k_0$ um $A$ vom Radius $\frac{d}{6}$ in einem Punkte $P(t_1)$ ein erstes Mal treffen, falls $w$ nicht ganz im Innern von $k_0$ liegt. $U_1$ sei eine schlichte Umgebung um $P(t_1)$ vom Radius $d$, dann muß der Weg $P(t_1)\,C$ den Kreis $k_1$ vom Radius $\frac{d}{6}$ um $P(t_1)$ in einem Punkte $P(t_2)$ ein erstes Mal treffen, falls $P(t_1)\,C$ nicht ganz im Innern von $k_1$ liegt, usw. Nach endlich vielen Schritten muß man zu einem Punkt $P(t_n)$ gelangen, so daß der Weg $P(t_n)\,C$ im Innern von $k_n$ läuft. Denn sonst würde man zu einer unendlichen Punktfolge $P(t_i)$ gelangen, und es wäre $0 < t_1 < t_2 < \ldots < 1$; daher wäre die Folge $P(t_i)$ konvergent. Es ist aber $\varrho(P(t_i), P(t_{i+1})) = \frac{d}{6}$.

Es sei $t_0 = 0$ und $t_{n+1} = 1$ gesetzt. $U_{n+1}$ sei die schlichte Umgebung vom Radius $d$ um $C$. Dann liegt der Weg $P(t_i)\,P(t_{i+1})$ in $k_i$, also auch in den Kreisen $\bar{k}_i$ und $\bar{k}_{i+1}$ vom Radius $\frac{d}{3}$ um $P(t_i)$ bzw. $P(t_{i+1})$. $m$ sei die Minimallänge der Teilintervalle $(t_i, t_{i+1})$. Sind dann $P(t)$ und $P(t')$ zwei Punkte von $w$, für die $0 \leqq t < t' \leqq 1$ und $t' - t < m$ ist, so liegen $P(t)$ und $P(t')$ in einem und demselben Kreise $\bar{k}_{i+1}$. Denn liegt $P(t)$ etwa auf $P(t_i)\,P(t_{i+1})$, so liegt $P(t')$ entweder auch auf diesem Teilwege oder auf $P(t_{i+1})\,P(t_{i+2})$. Diese beiden Wege liegen aber ganz in $\bar{k}_{i+1}$. Da $\bar{k}_{i+1} < U_{i+1}$ ist, so ist $P(t)$ mit $P(t')$ durch einen und nur einen kürzesten Weg $v$ verbindbar. Dieser muß in $U_{i+1}$ verlaufen; denn man hat für jeden Punkt $Q$ auf $v$

[2]) Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung (1909), § 33.

$$\varrho(P(t_{i+1}), P(t)) \leqq \frac{d}{3}; \qquad \varrho(P(t_{i+1}), P(t')) \leqq \frac{d}{3},$$

$$\varrho(P(t), Q) \leqq \varrho(P(t), P(t')) \leqq \varrho(P(t), P(t_{i+1})) - \varrho(P(t_{i+1}), P(t')) \leqq \frac{2}{3} d,$$

also $\varrho(P(t_{i+1}), Q) \leqq \varrho(P(t_{i+1}), P(t)) + \varrho(P(t), Q) \leqq d$.

Ist daher $t'_0 = 0 < t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_{m+1} = 1$ irgendeine Zerlegung von $w$ in Teilwege $P(t'_i)\,P(t'_{i+1})$ und ist $t'_{i+1} - t'_i < m$, so kann man dem Weg $w$ ein eindeutig bestimmtes geodätisches Polygon $\Sigma$ einbeschreiben mit den Ecken in $P(t'_i)$, und jede Seite des Polygons $\Sigma$ verläuft ganz in einer schlichten Umgebung $U_i$. Dasselbe gilt auch für die ursprüngliche Zerlegung von $w$ durch $P(t_i)$ und das dazugehörige Polygon $\Pi$. Nun kann man $l(k)$ längs $\Pi$ bis nach $C$ fortsetzen. Damit sind die Umgebungen $U_i$ eindeutig und im Kleinen längentreu auf gewisse Gebiete von $F'$ abgebildet. Da jede Seite von $\Sigma$ ganz in einer der Umgebungen $U_i$ verläuft, muß man bei der Fortsetzung von $l(k)$ längs $\Sigma$ zur selben Abbildung der Umgebung $U_{n+1}$ um $C$ gelangen wie bei der Fortsetzung von $l(k)$ längs $\Pi$; d. h. für jede genügend gute Approximation des Weges $w$ durch ein geodätisches Polygon $\Sigma$ ist die Fortsetzung von $l(k)$ längs $\Sigma$ unabhängig von $\Sigma$. Dadurch ist die Fortsetzung von $l(k)$ *längs jedes beliebigen Weges* definiert.

$l(k)$ ist also längs jedes Weges fortsetzbar, und man erreicht dabei offenbar jeden Punkt von $F$. Damit ist jede schlichte Umgebung eines jeden Punktes von $F$ eindeutig und im Kleinen längentreu auf ein Gebiet von $F'$ abgebildet. Da $F$ einfach zusammenhängend ist, so folgt aus dem Monodromiesatze[3]), daß die Abbildung $l(F)$ von $F$ auf $F'$ eindeutig ist. Jeder Punkt von $F'$ ist Bildpunkt von $l(F)$; denn die inverse Abbildung $k = l^{-1}(k')$ läßt sich auf $F'$ ebenfalls längs jedes Weges fortsetzen. Da nun auch $F'$ einfach zusammenhängend ist, so ist wieder wegen des Monodromiesatzes $l(F)$ eineindeutig, also sind $F$ und $F'$ isometrisch.

Satz 3. *$F'$ sei eine vollständige und $F$ eine beliebige einfach zusammenhängende Fläche. Ferner seien $F$ und $F'$ Fortsetzungen desselben Elementes $E$. Dann ist $F$ eindeutig und im Kleinen längentreu auf ein Gebiet von $F'$ abbildbar.*

Beweis. Dieser Satz ist bereits in dem Beweis des Satzes 4 enthalten. Denn dieser Beweis bleibt für $F$ und $F'$ bis zum ersten Eingreifen des Monodromiesatzes einschließlich richtig, obgleich für $F$ das Abtragbarkeitspostulat[1]) nicht zu gelten braucht. Daher ist $F$ eindeutig und im Kleinen längentreu auf ein gewisses Gebiet von $F'$ abbildbar.

[3]) Vgl. z. B. B. v. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie I (1923), Abschnitt V, § 2, S. 175.

Bemerkung. Die Sätze 1, 2 und 3 zeigen einen Weg, wie man zu sämtlichen, auch den nicht vollständigen Fortsetzungen eines zu einer vollständigen Fläche fortsetzbaren Elementes $E$ gelangen kann. Zunächst sei $F'$ die nach 1 existierende und nach 2 eindeutig bestimmte, einfach zusammenhängende, vollständige Fortsetzung von $E$. Nach Satz 3 erhält man alle anderen einfach zusammenhängenden Fortsetzungen von $E$ als die universellen Überlagerungsflächen der Gebiete von $F'$ und als die einfach zusammenhängenden Teilgebiete dieser Flächen. Dieser letzte Zusatz ist nicht entbehrlich, da der Satz 3 nicht ausschließt, daß $F$ nicht die Überlagerungsfläche $F''$ seines Bildgebietes $G$ auf $F'$ ist. In diesem Falle ist $F$ ein Teilgebiet von $F''$ ($G$ kann z. B. Selbstüberdeckungen haben). Hat man so alle einfach zusammenhängenden Fortsetzungen von $E$ ermittelt, so erhält man die mehrfach zusammenhängenden durch Aufzählung der möglichen eigentlich diskontinuierlichen Gruppen von fixpunktfreien Isometrien der ersten in sich, wie das bekanntermaßen beim Clifford-Kleinschen Raumproblem geschieht, indem man äquivalente Randpunkte von Fundamentalbereichen dieser Gruppen identifiziert.

Satz 4. *Sind zwei vollständige Flächen $F$ und $F'$ Fortsetzungen desselben Elementes $E$, so sind die universellen Überlagerungsflächen homöomorph.*

Beweis. Der Satz 4 folgt aus den Sätzen 1 und 2 (isometrische Flächen sind stets homöomorph).

Satz 5. *Ist $F$ eine vollständige Fortsetzung von $E$, und ist $F$ homöomorph der Ebene (der Kugel), so existiert keine vollständige Fortsetzung von $E$, die homöomorph der Kugel (der Ebene) ist. Man kann daher insbesondere ein beliebig kleines Stück einer Fläche vom Geschlecht $p = 0$ nicht so verbiegen, daß es auf ein Stück einer offenen vollständigen Fläche oder einer geschlossenen Fläche höheren Geschlechts paßt; höchstens kann es auf ein Stück einer der projektiven Ebene homöomorphen Fläche passen.* (Folgt aus Satz 4.)

Satz 6. *Im euklidischen Raume sei $F$ eine vollständige Fläche und $F'$ eine Eifläche ohne Singularitäten. Es sei ferner eine Umgebung eines Punktes auf $F$ längentreu auf eine Umgebung eines Punktes auf $F'$ abbildbar. Dann ist $F$ kongruent $F'$.*

Beweis. Der Satz 6 folgt aus dem Satz 5 und dem Satze über die Starrheit der Eiflächen[4]). Denn die universelle Überlagerungsfläche von $F$

[4]) Weyl, Bestimmung einer geschlossenen, konvexen Fläche durch ihr Linienelement, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Ges. in Zürich **61** (1916). — Cohn-Vossen, Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen, Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1927.

muß nach Satz 5 homöomorph der Kugel sein, und da $F$ keine Selbstdurchdringungen haben soll, muß $F$ selbst homöomorph der Kugel sein, also nach Satz 2 isometrisch zu $F'$ und nach dem „Starrheitssatz" kongruent $F'$.

## § 3.

## Über die Möglichkeit von Fortsetzungen eines Elementes.

Satz 7. *Ist $E$ ein differentialgeometrisches Element, $A$ der Trägerpunkt von $E$, und sind $r, \varphi$ die geodätischen Polarkoordinaten mit dem Punkt $A$ als Pol, hat ferner die Krümmung $K(r, \varphi)$ für irgendeinen festen Wert von $\varphi$ als analytische Funktion von $r$ betrachtet an einer reellen Stelle von $r$ eine Singularität, so ist $E$ nicht zu einer vollständigen Fläche fortsetzbar.*

Beweis. Existierte nämlich eine vollständige Fortsetzung $F$ von $E$ und sind $r, \varphi$ die geodätischen Polarkoordinaten mit irgendeinem Punkt $A$ von $F$ als Pol, so folgt aus dem Beweis des Satzes 2, daß $K(r, \varphi)$ für jeden reellen Wert eine an allen reellen Stellen von $r$ regulär analytische Funktion von $r$ ist.

Beispiel eines nicht fortsetzbaren Elementes. Es sei

$$g_{11} = 1, \quad g_{12}(r, \varphi) = 0, \quad g_{22}(r, \varphi) = (r - r^3)^2.$$

Die Nullstellen von $g_{22}$ sind unabhängig von $\varphi$, und zwar $r = 0$ und $r = \pm 1$. Diese Funktionen definieren also in einer gewissen Umgebung $r_0, \varphi_0$ ($r_0 \neq 0, \pm 1$; $\varphi_0$ beliebig) der Zahlenebene eine Differentialgeometrie im Kleinen. Es wird aber

$$K(r, \varphi) = \frac{6}{1 - r^2}$$

für $r = \pm 1$ unendlich. Daher ist diese Differentialgeometrie nicht vollständig fortsetzbar. Für $r = 0$ ist auch eine Differentialgeometrie im Kleinen definiert. Das sieht man, wenn man die Transformation $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$ macht. Es wird

$$g'_{11}(x_1, x_2) = 1 - 2x_2^2 + x_2^2(x_1^2 + x_2^2),$$
$$g'_{12}(x_1, x_2) = 2x_1x_2 - x_1x_2(x_1^2 + x_2^2), \qquad (g'(x_1, x_2) = [1 - (x_1^2 + x_2^2)]^2)$$
$$g'_{22}(x_1, x_2) = 1 - 2x_1^2 + x_1^2(x_1^2 + x_2^2),$$

also ist in einer hinreichend kleinen Umgebung von $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ (d. h. $r = 0$) eine reguläre Differentialgeometrie im Kleinen erklärt. Aus demselben Grunde wie vorher ist diese Differentialgeometrie auch nicht vollständig fortsetzbar. Dagegen kann durch Koordinatentransformation an den Stellen $r = \pm 1$ keine reguläre Differentialgeometrie im Kleinen erklärt werden, da $K$ an dieser Stelle unendlich wird.

Bemerkung. Daß die im Satz 7 ausgesprochene Bedingung der Regularität von $K$ für die vollständige Fortsetzbarkeit des Elementes im allgemeinen nicht hinreicht, zeigt Satz 11, 3.

Satz 8. *Ist $E$ ein differentialgeometrisches Element, $A$ der Trägerpunkt von $E$, sind $r, \varphi$ die geodätischen Polarkoordinaten mit $A$ als Pol, wird ferner die Fundamentalgröße $g_{22}$ in diesen Polarkoordinaten für jedes feste, reelle $\varphi$ eine an allen Stellen $r \geqq 0$ regulär analytische Funktion von $r$ und hat $g_{22}(r, \varphi)$ keine positiven Nullstellen (d. h. existieren keine zu $A$ konjugierten Punkte), so existiert eine vollständige Fläche $F$, die homöomorph der Ebene und Fortsetzung von $E$ ist.*

Beweis. $r, \varphi$ seien Polarkoordinaten in der euklidischen Zahlenebene. Dann sind die Kurven $\varphi =$ konst. die Geraden durch den Nullpunkt und die Kurven $r =$ konst. die Kreise um den Nullpunkt. $\varphi$ bedeutet den Winkel des Strahles $\varphi$ durch den Nullpunkt gegen die Nullrichtung und $r$ die Bogenlänge auf diesen Strahlen. Jedem Punkte der Ebene mit den Koordinaten $r, \varphi$ ordne man die Zahlen $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = g_{22}(r, \varphi)$ zu. Da $g_{22}(r, \varphi)$ die Voraussetzungen des Satzes 11 erfüllt, ist dadurch auf der Zahlenebene offenbar wegen $g = g_{22} \neq 0$ eine Differentialgeometrie im Großen erklärt. $r, \varphi$ sind zugleich geodätische Polarkoordinaten dieser Differentialgeometrie. Da die Länge eines Bogens $r(t), \varphi(t)$ $(t_1 \leqq t \leqq t_2)$ mindestens $r(t_2) - r(t_1)$ und da für eine „divergente Linie“ [1]) stets $\lim r(t) = \infty$ ist, ist eine solche Linie unendlich lang. Folglich [1]) macht unsere Differentialgeometrie die Zahlenebene zu einer vollständigen Fläche.

## § 4.

## Zwei Sätze über konjugierte Punkte.

Satz 9. *Ist $F$ eine differentialgeometrische Fläche, die der Kugel oder der projektiven Ebene, deren universelle Überlagerungsfläche also der Kugel homöomorph ist, so gibt es durch jeden Punkt $A$ auf $F$ wenigstens eine geodätische Linie, auf der wenigstens ein zu $A$ konjugierter Punkt liegt* [5]).

Beweis. Andernfalls gäbe es auf $F$ einen Punkt $A$ ohne konjugierte Punkte. Dann ist das Element in diesem Punkt $A$ nach Satz 8 zu einer vollständigen Fläche $F'$ fortsetzbar, die homöomorph der Ebene ist. Da $F$ geschlossen und damit auch vollständig ist, ist das aber nach Satz 4 unmöglich.

[5]) Herr Carathéodory hat, wie er Herrn H. Hopf mitteilte, diesen Satz und sogar die Existenz von zwei konjugierten Punkten bereits früher auf Grund der Überlegungen bewiesen, die in den „Vorlesungen über Differentialgeometrie I“ (1. Aufl., S. 159) von Blaschke wiedergegeben sind.

Satz 10. *Ist $F$ eine offene, vollständige, differentialgeometrische Fläche, so gibt es durch jeden Punkt $A$ auf $F$ wenigstens einen geodätischen Strahl, der für jeden seiner Punkte eine absolut kürzeste Verbindung auf $F$ mit $A$ darstellt und daher auch keine zu $A$ konjugierten Punkte enthält.*

*Ist $F$ eine geschlossene differentialgeometrische Fläche, die nicht der Kugel oder der projektiven Ebene, deren universelle Überlagerungsfläche also der Ebene homöomorph ist, so gibt es durch jeden Punkt $A$ auf $F$ wenigstens einen geodätischen Strahl ohne zu $A$ konjugierte Punkte (bezüglich dieses Strahles).*

Folgerung. *Gibt es auf einer vollständigen differentialgeometrischen Fläche $F$ einen Punkt $A$ und existieren auf allen geodätischen Strahlen von $A$ aus zu $A$ konjugierte Punkte, so ist $F$ homöomorph der Kugel oder der projektiven Ebene.*

Beweis. $F$ sei offen und vollständig und $A$ ein beliebiger Punkt auf $F$. $P_i$ sei eine Punktfolge auf $F$ ohne Häufungspunkte. Dann ist wegen der Vollständigkeit von $F$ $\varrho(A, P_i) \to \infty$, und es existiert eine kürzeste Verbindung zwischen $P_i$ und $A$.[1]) Diese ist ein geodätischer Strahl $c_i$ von $A$ aus. Ist $r_i$ die Länge der Strecke $AP_i$ auf $c_i$, so ist demnach $\varrho(A, P_i) = r_i$ und $r_i \to \infty$. $\varphi_i$ $(0 \leqq \varphi_i < 2\pi)$ sei der Polarwinkel von $c_i$ in $A$. Die Folge $\varphi_i$ besitzt dann wenigstens einen Häufungswert $\varphi'$. $c'$ sei der geodätische Strahl $\varphi = \varphi'$, $Q'$ irgendein Punkt von $c'$ und $L$ die Länge des Bogens $AQ'$ auf $c'$. Dann gibt es eine Teilfolge $\bar{\varphi}_i$ von $\varphi_i$, die gegen $\varphi'$ konvergiert und für die die zu den $\bar{P}_i$ gehörigen Werte $\bar{r}_i > L$ sind. Trägt man auf den Strahlen $\bar{c}_i$, d. h. $\varphi = \bar{\varphi}_i$ die Strecke $L$ ab, so gelangt man zu einem Punkt $\bar{Q}_i$ auf $\bar{c}_i$. Da $\bar{c}_i$ eine kürzeste Verbindung von $A$ und $\bar{P}_i$ und $\bar{r}_i > L$ ist, so ist $\bar{c}_i$ auch eine kürzeste Verbindung von $A$ und $\bar{Q}_i$; also ist $\varrho(A, \bar{Q}_i) = L$. — Nun wird folgende Tatsache gebraucht: Trägt man auf den Strahlen eines geodätischen Büschels mit dem Zentrum $A$ eine feste, beliebig große Strecke $r_0$ ab und ist $\varphi = \varphi_i$ irgendeine Folge von Strahlen mit $\varphi_i \to \varphi'$, so konvergiert die Folge der Endpunkte $P_i$ der auf den Strahlen abgetragenen Strecken mit $\varphi_i \to \varphi'$ gegen einen Grenzpunkt $P'$ auf dem Strahle $\varphi = \varphi'$, und $P'$ ist der Endpunkt der Strecke von der Länge $r_0$ auf $\varphi = \varphi'$. Das folgt aus der stetigen Abhängigkeit der geodätischen Linien von den Anfangsrichtungen, denn die geodätischen Linien sind die Lösungskurven einer auf der ganzen Fläche regulären Differentialgleichung zweiter Ordnung. Daher konvergiert die Folge $\bar{Q}_i$ gegen $Q'$. Also ist $\varrho(A, \bar{Q}_i) \to \varrho(A, Q')$ und daher $\varrho(A, Q') = L$. $L$ war aber die Länge des Bogens $AQ'$ auf $c'$, folglich ist $c'$ eine kürzeste Verbindung von $A$ und $Q'$. Das gilt für jeden Punkt von $c'$. Also kann es auf $c'$ keinen zu $A$ konjugierten Punkt geben.

Ist $F$ nun geschlossen, so ist $F$ auch vollständig. Ist die universelle Überlagerungsfläche $F'$ von $F$ homöomorph der Ebene, so ist $F'$ offen und nach Satz 1 auch vollständig. Es existiert daher durch jeden Punkt $A'$ von $F'$ ein Strahl $c'$ ohne zu $A'$ konjugierte Punkte. $F'$ ist nach Satz 1 eindeutig und im Kleinen längentreu auf $F$ abbildbar. Ist bei dieser Abbildung $A$ der Bildpunkt von $A'$ und $c$ der Bildstrahl von $c'$, so kann daher $c$ keine zu $A$ konjugierten Punkte enthalten. Jeder Punkt von $F$ ist aber Bildpunkt eines Punktes von $F'$, und $A'$ war beliebig angenommen.

## § 5.

## Über die Fortsetzungen von Drehungselementen.

Definition. Ein differentialgeometrisches Element $E$ (eine differentialgeometrische Fläche $F$) heißt ein Drehungselement (eine Drehfläche), wenn es eine stetige Schar von längentreuen Abbildungen von $E(F)$ in sich mit dem Trägerpunkt $A$ von $E$ ($A'$ aus $F$) als gemeinsamem Fixpunkt gibt. $A(A')$ heißt dann ein Drehungspol von $E(F)$. Eine Drehfläche $F$ enthält stets ein Drehungselement, nämlich das Element mit dem Drehungspol $A'$ von $F$ als Trägerpunkt.

Satz 11. *$E$ sei ein Drehungselement mit dem Drehungspol $A$. Sind dann $r, \varphi$ die geodätischen Polarkoordinaten mit $A$ als Pol, so ist $\sqrt{g_{22}} = f(r)$ für ein hinreichend kleines $r_0 > 0$ eine an allen reellen Stellen $|r| < r_0$ regulär analytische Funktion von $r$, die von $\varphi$ unabhängig ist, und es ist $f(r) > 0$ für $0 < r < r_0$.*

1. *Hat $f(r)$ an einer reellen Stelle eine Singularität, so ist $E$ nicht vollständig fortsetzbar.*

2. a) *$f(r)$ sei an jeder reellen Stelle von $r$ regulär analytisch, und es sei $f(r) > 0$ für jedes reelle $r > 0$. Dann existiert immer eine Drehfläche $F$, die eine Fortsetzung von $E$, vollständig und homöomorph der Ebene ist. Die geodätischen Strahlen durch $A'$ bedecken $F$ schlicht. ($A'$ ist der $A$ entsprechende Drehungspol.)*

b) *Ist überdies die Krümmung $K(r)$ von $E$ nicht konstant, so enthält $F$ kein weiteres Drehungselement und ist die einzige (bis auf isometrische Flächen) vollständige Fortsetzung von $E$.*

3. a) *$f(r)$ sei an jeder reellen Stelle von $r$ regulär analytisch und habe bei $r = a$ eine erste positive Nullstelle. Dann ist $E$ dann und nur dann vollständig fortsetzbar, wenn $f(r)$ eine periodische Funktion der Periode $2a$ und $f'(a) = -1$ ist. Sind diese Bedingungen erfüllt, so existiert stets eine Drehfläche $F$, die Fortsetzung von $E$, vollständig und homöomorph der Kugel ist. Die geodätischen Linien durch den $A$ ent-*

*sprechenden Drehungspol $A'$ von $F$ gehen dann alle durch einen Punkt $A''$ im Abstande $a$ von $A'$, sind einfach geschlossen und bedecken $F$ bis auf die Punkte $A'$ und $A''$ schlicht. $A''$ ist ebenfalls ein Drehungspol und Fixpunkt bei allen Drehungen um $A'$.*

b) *Ist überdies die Krümmung $K(r)$ von $E$ nicht konstant, so sind außer diesen beiden Drehungselementen in $A'$ und $A''$ keine weiteren vorhanden. $F$ ist dann, abgesehen von isometrischen und allenfalls von der projektiven Ebene homöomorphen Flächen, die einzige vollständige Fortsetzung von $E$.*

c) *$E$ ist dann und nur dann auch zu einer der projektiven Ebene homöomorphen Fläche fortsetzbar, wenn außerdem noch $f(r+a) = -f(r)$ ist.*

Beweis. Bei einer längentreuen Abbildung gehen geodätische Linien wieder in geodätische Linien über, und jeder geodätische Kreis um einen Fixpunkt geht in sich über. Ein Drehungselement $E$ soll nun eine Schar von längentreuen Abbildungen in sich mit einem gemeinsamen Fixpunkt $A$ zulassen. Wird daher bei einer Abbildung der Schar der Strahl $\varphi = \alpha$ durch $A$ in den Strahl $\varphi = \alpha'$ übergeführt, so ist der Winkel zwischen jedem Strahl durch $A$ und seinem Bildstrahl gleich $\alpha' - \alpha$, also konstant. Als Parameter der Abbildungsschar kann man daher diesen Drehungswinkel $\varphi$ wählen, und die längentreuen Abbildungen von $E$ haben den Charakter der Drehungen einer euklidischen Kreisscheibe in sich. Es muß also die Krümmung $K$ längs eines jeden geodätischen Kreises um $A$ konstant sein, mithin ist $K$ und damit auch $\sqrt{g_{22}} = f(r)$ unabhängig von $\varphi$. Zufolge der allgemeinen Eigenschaften von $\sqrt{g_{22}(r,\varphi)}$ ist $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f(r)$ für ein hinreichend kleines $r_0$ eine an allen reellen Stellen $|r| < r_0$ reguläre analytische Funktion von $r$ und $f(r) > 0$ für $0 < r < r_0$.[6])

Beweis von 1 folgt aus Satz 7 und daraus, daß $f(r)$ eine Lösung der Jacobischen Differentialgleichung $y'' + K(r)\,y = 0$ ist.

Beweis von 2a folgt aus Satz 8. Daß $F$ eine Drehfläche ist, folgt aus Satz 2.

Beweis von 3a. Zunächst werde gezeigt, daß $f(r)$ eine ungrade Funktion ist. Da $K$ längs geodätischer Kreise um den Punkt $A$ aus $E$ konstant ist, so ist $K(-r) = K(r)$,[6a]) mithin sind die Funktionen $h(r) = f(-r)$ und $f(r)$ beide Lösungen der Differentialgleichung $y'' + K(r)\,y = 0$. Es ist aber $h(0) = f(0) = 0$, also haben $h(r)$ und $f(r)$ die Nullstellen

[6]) Vgl. z. B. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I (1924), § 57, S. 97.

[6a]) Allgemein ist $K(r, \varphi + \pi) = K(-r, \varphi)$; denn $K$ ist eine reguläre Funktion der Bogenlänge einer jeden geodätischen Linie (vgl. S. 515), und die beiden Strahlen $\varphi$ und $\varphi + \pi$ vom Punkte $r = 0$ aus setzen eine geodätische Linie zusammen.

gemeinsam. Folglich ist $h(r) = c\,f(r)$ ($c =$ konst.) und, da $h'(0) = -f'(0) = -1$ ist, $c = -1$, d. h. $f(-r) = -f(r)$. — Die Bedingung $f(r + 2a) = f(r)$ ist mit der Bedingung $K(r + 2a) = K(r)$ gleichwertig. Ist nämlich $f(r + 2a) = f(r)$, so wird $K(r + 2a) = -\frac{f''(r+2a)}{f(r+2a)} = -\frac{f''(r)}{f(r)} = K(r)$. Ist $K(r + 2a) = K(r)$, so sind die Funktionen $u(r) = f(r + 2a)$ und $f(r)$ beide Lösungen der Differentialgleichung $y'' + K(r)\,y = 0$. Es ist aber $u(-a) = f(-a + 2a) = f(a) = f(-a) = 0$, also haben $u(r)$ und $f(r)$ die Nullstellen gemeinsam. Folglich ist $u(r) = c\,f(r)$ ($c =$ konst.) und, da $u'(-a) = f'(-a + 2a) = f'(a) = c\,f'(-a)$ und $f$ ungrade, also $f'$ grade ist, $c = 1$, d. h. $f(r + 2a) = f(r)$.

$E$ sei vollständig fortsetzbar. Dann existiert nach Satz 1 auch eine einfach zusammenhängende vollständige Fläche $F$, die Fortsetzung von $E$ ist. $A'$ sei der dem Drehungspol $A$ von $E$ entsprechende Punkt auf $F$. Es wird nun behauptet, daß die geodätischen Strahlen durch $A'$ jede geodätische Kreisscheibe vom Radius $r < a$ schlicht bedecken. Für hinreichend kleine $r$ ist das jedenfalls richtig. Wäre die Behauptung nicht richtig, so müßte man, wenn man $r$ monoton und stetig wachsen läßt, schließlich zu einem solchen geodätischen Kreis $k$ vom Radius $R < a$ kommen, daß das Innere dieses Kreises schlicht bedeckt würde, daß es aber auf der Peripherie von $k$ wenigstens einen Punkt $B$ gäbe, von dem aus zwei Strahlen nach $A'$ liefen. Da aber wegen $R < a$ der Punkt $B$ noch vor dem ersten konjugierten Punkt von $A'$ auf beiden Strahlen liegt, müßte $k$ dort noch regulär sein; der Kreis $k$ müßte sich in $B$ berühren. Daher bildeten die beiden Strahlen nach $B$ einen einzigen Bogen, der von $A'$ aus nach Durchlaufung der Strecke $2R$ wieder nach $A'$ zurückkehrte. Nun folgt aus dem Satz 2, daß eine einfach zusammenhängende vollständige Fläche, die zwei isometrische Elemente $E'$ und $E''$ enthält, eine eineindeutige und längentreue Abbildung in sich zuläßt, die $E'$ in $E''$ überführt. Da $F$ in $A'$ ein Drehungselement besitzt, läßt $F$ Drehungen um $A'$ zu, ist also eine Drehfläche. Folglich müßte jeder Strahl von $A'$ aus nach Durchlaufung der Strecke $2R$ nach $A'$ zurückkehren und jeder Punkt der Peripherie von $k$ ein Selbstberührungspunkt sein. Wegen $0 < R < a$ kann $k$ nicht in einen Punkt ausarten; mithin wäre $k$ eine geschlossene Kurve, bei deren Durchlaufung man von einem ihrer Ufer auf das andere gelangen könnte. Das ist aber, weil $F$ orientierbar ist, nicht möglich.

Da nun das Büschel geodätischer Strahlen durch $A'$ für $r < a$ schlicht ist, so ist jeder geodätische Kreis vom Radius $r < a$ um $A'$ eine einfach geschlossene, analytische Kurve, deren Länge $L(r) = \int_0^{2\pi} f(r)\,d\varphi = 2\pi f(r)$ ist. Da aber $f(a) = 0$ ist, so müssen sich diese geodätischen Kreise mit

$r \to a$ auf einen Punkt $A''$ zusammenziehen, d. h. die Strahlen durch $A'$ gehen nach Durchlaufung der Strecke $a$ alle durch den Punkt $A''$ von $F$. $A''$ ist sicher verschieden von $A'$ und auf allen Strahlen durch $A'$ der erste zu $A'$ konjugierte Punkt. — Da $F$ einfach zusammenhängend ist, muß $F$ homöomorph der Kugel sein. Denn eine geodätische Kreislinie $k$ vom Radius $R < a$ um $A'$ ist eine einfach geschlossene Kurve, die sich stetig auf einen von $A'$ verschiedenen Punkt $A''$ zusammenziehen läßt, ohne dabei den Punkt $A'$ zu treffen. Das ist aber auf einer der Ebene homöomorphen Fläche nicht möglich. Folglich ist $F$ homöomorph der Kugel, also geschlossen und damit auch vollständig.

Nun ist $F$, wie schon gesagt, eine Drehfläche mit dem Drehungspol $A'$. Da die Strahlen durch $A'$ alle nach Durchlaufung derselben Strecke $a$ in den Punkt $A''$ münden, so muß $A''$ bei den Drehungen um $A'$ auch Fixpunkt, also auch ein Drehungspol von $F$ sein, und, da $A'$ dann bei den Drehungen um $A''$ fest bleibt, so müssen die Strahlen durch $A''$ ebenfalls nach Durchlaufung der Strecke $a$ alle in $A'$ zusammentreffen. $A''$ soll der Gegenpol von $A'$ heißen. — Ist daher $k$ eine geodätische Kreislinie um $A'$, so ist sie auch eine geodätische Kreislinie um $A''$ und umgekehrt. Sind $c'$ und $c''$ zwei Strahlen von $A'$ bzw. $A''$ nach einem Punkte von $k$, so müssen $c'$ und $c''$ zusammen einen einzigen geodätischen Bogen bilden. $\bar{r}, \varphi$ seien die Polarkoordinaten um $A''$ und $r, \varphi$ die um $A'$. Dann besteht auf jedem Strahl von $A'$ nach $A''$ die Beziehung $r = a - \bar{r}$. Die Fundamentalgrößen in den Koordinaten $\bar{r}, \varphi$ seien $\bar{g}_{11} = 1$, $\bar{g}_{12} = 0$, $\bar{g}_{22} = \bar{f}^2(\bar{r})'$ Dann wird die Länge eines Kreisbogens von $k$ mit den Endpunkten $B$. $(\varphi = \varphi'$ bzw. $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}')$ und $B''$ $(\varphi = \varphi''$ bzw. $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}'')$

$$L = f(r)(\varphi'' - \varphi') = \bar{f}(\bar{r})(\bar{\varphi}'' - \bar{\varphi}').$$

Da aber die Gesamtlänge von $k$ gleich $2\pi f(r) = 2\pi \bar{f}(\bar{r})$ wird und da $r = a - \bar{r}$ ist, so folgt $f(r) = \bar{f}(\bar{r})$, also auch $\varphi'' - \varphi' = \bar{\varphi}'' - \bar{\varphi}'$. Weil der Winkel $\varphi'' - \varphi'$ bzw. $\bar{\varphi}'' - \bar{\varphi}'$ den Winkel zwischen den beiden Strahlen $A'B'$ und $A'B''$ bzw. $A''B'$ und $A''B''$ bedeutet und $A'B'$ und $A''B'$ bzw. $A'B''$ und $A''B''$ je einen einzigen Bogen bilden, so müssen je zwei Strahlen, die von $A'$ aus unter dem Winkel $\varphi'' - \varphi'$ gegeneinander gezogen werden, unter demselben Winkel gegeneinander in $A''$ einmünden. Für $\varphi'' - \varphi' = \pi$ folgt daher, daß jede geodätische Linie durch $A'$ einfach geschlossen und von der Länge $2a$ ist. Hieraus ergibt sich unmittelbar $K(r + 2a) = K(r)$, und aus $\bar{f}(\bar{r}) = f(r) = f(a - \bar{r})$ und $\bar{f}'(0) = 1$ folgt $f'(a) = -1$.

Ist andererseits $f(r + 2a) = f(r)$ und $f'(a) = -1$, so ist $E$ stets zu einer der Kugel homöomorphen Fläche fortsetzbar. Das ersieht man aus folgender Konstruktion: Auf einer Kugel vom Radius $R = \frac{a}{\pi}$ seien die

Polarkoordinaten $\beta$, die Breite, und $\lambda$, die Länge, eingeführt. $\beta$ sei so gerechnet, daß am Südpol $\beta = 0$, am Nordpol also $\beta = \pi$ wird. $\beta =$ konst. bedeuten die Breitenkreise und $\lambda =$ konst. die Halb-Meridiane. Man setze $r = R\beta$, mache also $r$ zur Bogenlänge auf den Meridianen, und ordne jedem Punkte der Kugel mit den Koordinaten $\beta = \frac{r}{R}$, $\lambda$ als Fundamentalgrößen $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = f^2(r)$ zu. Dann ist auf der Kugel eine Differentialgeometrie im Großen erklärt, die wegen $f(r + 2a) = f(r)$ und $f'(a) = -1$ keine Singularitäten besitzt[6b]). $E$ läßt sich also vollständig fortsetzen.

Beweis von 2b und 3b. Die nach 2a bzw. 3a vorhandene Fläche ist nach Satz 2, bis auf isometrische Flächen, die einzige einfach zusammenhängende vollständige Fortsetzung von $E$. Sie hat einen Drehungspol $A'$ bzw. noch einen Gegenpol $A''$ zu $A'$. Das sind im Falle nicht konstanter Krümmung die einzigen Drehungspole von $F$. Gäbe es nämlich noch einen weiteren Drehungspol $P$, so müßte $P$ nach 2a und 3a noch ganz im Innern eines Kreises um $A'$ liegen, das von den Strahlen durch $A'$ schlicht bedeckt wird. Ist $k$ ein hinreichend kleiner Kreis um $P$, so wäre die Krümmung längs $k$ konstant. Durch jeden Punkt im Innern von $k$ ginge ein Kreis um $A'$, längs dessen die Krümmung auch konstant wäre und der $k$ treffen müßte. Mithin wäre die Krümmung im Innern von $k$ konstant und damit auch auf der ganzen Fläche.

Ist die Krümmung von $E$ nicht konstant und existiert eine vollständige Fortsetzung $F'$ von $E$, die nicht einfach zusammenhängend ist, so müssen über jedem Punkt von $F'$ wenigstens zwei Punkte der universellen Überlagerungsfläche $F$ von $F'$ liegen; infolgedessen muß $F$ wenigstens zwei verschiedene Drehungspole enthalten. Das ist aber nur möglich, wenn $F$ homöomorph der Kugel ist. $F'$ muß daher homöomorph der projektiven Ebene sein.

Beweis von 3c. $E$ sei zu einer der projektiven Ebene homöomorphen Fläche $F'$ fortsetzbar. Auf der universellen Überlagerungsfläche $F$ von $F'$ müssen dann zwei Drehungspole vorhanden sein. Diese sind aber nach 3b $A'$ und der Gegenpol $A''$. Ferner läßt sich dann eine Umgebung von $A'$ auf eine Umgebung von $A''$ längentreu abbilden. Notwendig und hinreichend dafür ist $f(a - r) = f(r)$. Gleichwertig mit dieser Bedingung ist $f(r + a) = -f(r)$ oder auch $K(r + a) = K(r)$. Der Beweis ist ähnlich dem von 3a im ersten Abschnitt.

[6b]) Daß am Nordpol keine Singularität vorhanden ist, sieht man, wenn man z. B. die Koordinatentransformation: $x = (a - r)\cos\varphi$, $y = (a - r)\sin\varphi$ macht. $x, y$ bilden in einer Umgebung des Nordpols ($x = 0$, $y = 0$) ein reguläres Koordinatensystem. Das so transformierte Fundamentalsystem bildet ein reguläres Element mit dem Nordpol als Trägerpunkt.

$E$ sei zu einer der Kugel homöomorphen Fläche fortsetzbar, und es sei $f(a-r)=f(r)$. Diese Fortsetzung sei auf einer Kugel konstruiert, wie in 3a angegeben. Da nun $g_{22}$ nicht von $\lambda$ abhängt, so stellt jede Drehung der Kugel um ihre Achse und wegen $f(a-r)=f(r)$ die Spiegelung an der Äquatorebene eine isometrische Abbildung der Fläche in sich dar. Durch Zusammensetzung der Spiegelung mit der Drehung um $180^0$ erhält man die Inversion; diese stellt also auch eine Isometrie der Fläche in sich dar. Identifiziert man daher diametral gegenüberliegende Punkte, so erhält man eine der projektiven Ebene homöomorphe Fläche, auf der eine reguläre Differentialgeometrie im Großen erklärt ist.

(Eingegangen am 6. Juli 1931.)

# Über die Verbiegung parabolisch berandeter Flächen negativer Krümmung.

Von

Eduard Rembs in Berlin.

Eine Eilinie rotiere um eine in ihrer Ebene gelegene, die Kurve nicht treffende Gerade. Auf der entstehenden Torusfläche gibt es zwei Breitenkreise, deren Ebenen Stützebenen der Fläche sind. Sie trennen ein äußeres Flächenstück positiver und ein inneres negativer Krümmung voneinander. Je nachdem man die beiden Breitenkreise, längs deren die Flächenkrümmung verschwindet, zu dem einen oder anderen Flächenstück rechnet, hat man ein „parabolisch berandetes" Flächenstück positiver oder negativer Krümmung, dessen sphärisches Bild die ganze Kugel überdeckt. Die konvexen Flächenstücke dieser Art sind nach Liebmann[1]) unverbiegbar. Gegenstand unserer Untersuchung sind nun die negativ gekrümmten parabolisch berandeten Stücke der genannten Flächen. Dabei ergibt sich von selbst, daß man nicht ein einzelnes Flächenstück, sondern eine ganze Schar solcher Flächenstücke betrachtet. Insbesondere wollen wir diejenigen untersuchen, die denselben Meridianbogen besitzen, deren Achsen sich aber in verschiedenen Entfernungen von der Kurve befinden. Es wird sich herausstellen, daß in unserer Flächenschar eine abzählbare Menge infinitesimal verbiegbarer Flächen enthalten ist. Darüber, ob diese infinitesimal verbiegbaren Flächen auch Verbiegungen höherer Ordnung oder gar endliche Verbiegungen zulassen, wird hier nichts ausgesagt[1a]). Von Interesse ist, zu beachten, welche

[1]) Liebmann, Leipziger Berichte 1901. Wegen der Verallgemeinerung auf Flächen, die nicht Rotationsflächen sind und mehr als zwei Ränder haben, vgl. Berliner Sitzungsberichte 1930, S. 123. Literatur über Flächenverbiegung im großen: Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie **1** (1930), § 91 und § 93.

[1a]) Anm. bei der Korrektur: Die Frage wird in der demnächst in dieser Zeitschrift erscheinenden Arbeit „Verbiegungen höherer Ordnung und ebene Flächenrinnen" beantwortet.

Verhältnisse sich in einem verwandten Fall ergeben [2]). Die Arbeit schließt sich methodisch an eine von Cohn-Vossen [3]) an. Dort werden geschlossene Torusflächen untersucht und aus ihnen, ohne daß sie aufhörten, geschlossen zu sein, durch beliebig kleine geeignete Abänderungen verbiegbare Flächen gebildet. Uns dagegen kommt es hier darauf an, den Gegensatz in der Verbiegbarkeit positiv und negativ gekrümmter parabolisch berandeter Flächenstücke mit geschlossenem sphärischem Bild klarzustellen. In § 1 wird das Problem auf eine Randwertaufgabe bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückgeführt. Die Endpunkte des Intervalls, und nur diese Punkte, sind singuläre Punkte der Differentialgleichung. § 2 enthält die Lösung der Aufgabe mittels Sturmscher Sätze.

## § 1.

In einer $z, r$-Ebene sei ein Kurvenbogen mit nirgends verschwindender Krümmung

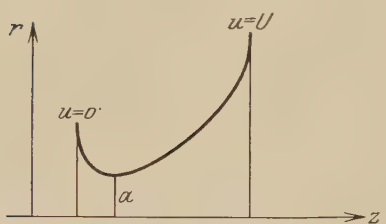


Fig. 1.

$$(1) \qquad z = z(u); \qquad r = a + r_0(u)$$

bezogen auf die Bogenlänge $u$:

$$0 \leqq u \leqq U$$

mit folgenden Eigenschaften gegeben: Das Minimum von $r_0$ ist gleich 0; $a$ ist eine positive Konstante; die Kurve kehrt ihre konvexe Seite der $z$-Achse zu und ist in den Endpunkten $0, U$ zur $r$-Achse parallel. Deuten wir also durch Striche Differentiation nach $u$ an, so ist

$$z'^2 + r'^2 = 1,$$
$$(2) \qquad z'z'' + r'r'' = 0.$$

Im ganzen Intervall $(0, U)$ [4]) ist

$$z' > 0; \qquad r'' > 0.$$

$z''$ und $r'$ haben entgegengesetzte Vorzeichen. In $\langle 0, U\rangle$ ist die Krümmung

$$(3) \qquad k = z'r'' - r'z'' > 0.$$

Nach (2) und (3) ist

$$r'' = kz'; \qquad z'' = -kr'.$$

Für die Endpunkte gilt ferner

$$(4) \qquad z'(0) = 0; \qquad z'(U) = 0.$$

---

[2]) Lagally, Math. Zeitschr. **18** (1923), S. 323.
[3]) Math. Annalen **102** (1929), S. 10–29.
[4]) Wie bei Kowalewski, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung (1909).

Die Kurve rotiere um die $z$-Achse; $v$ sei der variable Rotationswinkel. Es entsteht eine Fläche negativer Krümmung mit parabolischen Rändern. Ihr Linienelementquadrat ist

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2.$$

Bei einer infinitesimalen Verbiegung werde aus dem Punkt $z, r, v$ der Punkt

$$\left\{\begin{aligned} z_1 &= z(u) + t \cdot Z(u, v), \\ r_1 &= r(u) + t \cdot R(u, v), \\ v_1 &= v + t \cdot V(u, v). \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Man berechne nun $ds_1^2$ unter Verzicht auf Glieder, die in $t$ von höherer als erster Ordnung sind. Im Falle der Isometrie der neuen Fläche und der Ausgangsfläche muß die Differentialform $ds_1^2 - ds^2$ für alle Werte von $du : dv$ verschwinden; das ergibt für $Z$, $R$, $V$ das folgende System partieller Differentialgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} r' R_u + z' Z_u &= 0, \\ r' R_v + r^2 V_u + z' Z_v &= 0, \\ R + r V_v &= 0. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Uns interessieren nun nur solche Verbiegungen, bei denen der Zusammenhang des Flächenstücks gewahrt bleibt; dann müssen aber $Z$, $R$, $V$ periodische Funktionen von $v$ sein. Wir machen daher folgenden Ansatz

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} (Z_{n1}(u) \cos n v + Z_{n2}(u) \sin n v) \tag{7}$$

und entsprechende Ansätze für $R$ und $V$. Durch Einsetzen in (6) erhält man für jedes $n$ ein System von 6 Differentialgleichungen für die Funktionen von $u$ allein $Z_{n1}$, $Z_{n2}$, $R_{n1}$, $R_{n2}$, $V_{n1}$, $V_{n2}$. Zwei von diesen Gleichungen sind endliche Gleichungen, vermöge deren man $V_{n1}$ und $V_{n2}$ eliminiert. Von den vier übrig bleibenden Gleichungen enthalten zwei nur $R_{n1}$ und $Z_{n1}$, die beiden andern nur $R_{n2}$ und $Z_{n2}$; und die beiden ersten stimmen mit den letzten beim Vertauschen von $R_{n1}$ mit $R_{n2}$ und $Z_{n1}$ mit $Z_{n2}$ überein. Indem wir daher $Z_n$ statt $Z_{n1}$ oder $Z_{n2}$ und $R_n$ statt $R_{n1}$ oder $R_{n2}$ schreiben, erhalten wir folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} r' R_n' + z' Z_n' &= 0, \\ (n^2 - 1) r' R_n + r R_n' + n^2 z' Z_n &= 0. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Jede zu einem ganzzahligen $n$ gehörige Lösung dieses Systems, die für alle $u$ in $\langle 0, U \rangle$ sich regulär verhält, kann, indem man alle anderen $Z_n$, $R_n$, $V_n$ gleich 0 nimmt, zur Bildung einer Lösung von (6) benutzt werden. Da die Gleichungen (6) linear sind, liefert natürlich jede Summe von Lösungen wieder eine solche.

Aus (8) kann man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für $R_n$ gewinnen; sie lautet

$$z' R_n'' - z'' R_n' + \frac{(n^2-1)k}{r} R_n = 0. \tag{9}$$

Sie ist in $(0, U)$ regulär wegen $r > 0$, $z' > 0$; jedes Integral von (9) liefert daher auch ein im ganzen Innern reguläres Lösungssystem $R_n$, $Z_n$ von (8). Es fragt sich, welche Forderungen an die Integrale von (9) in den Endpunkten zu stellen sind. Für $u = 0$ z. B. soll $z'$ die Form haben $u \cdot f(u)$, wobei $f(u)$ regulär ist. Nach der ersten Gleichung (8) muß dann $R_n'$, und mithin nach der zweiten Gleichung (8) auch $R_n$ in den Randpunkten verschwinden. Es kommen also für uns nur solche Integrale von (9) in Betracht, die in beiden Endpunkten zugleich mit ihrer Ableitung verschwinden.

Darüber, wie sich die Integrale von (9) in den Punkten $u = 0$ und $u = U$, die singuläre Punkte der Differentialgleichung (9) sind, verhalten, gibt die Fuchssche Theorie[5]) Aufschluß. Für $u = 0$ z. B. (für $u = U$ sind die Verhältnisse entsprechend) sind $z''$, $k$ und $r$ alle von 0 verschieden. ($n$ ist größer als 1, da $n = 0$ und $n = 1$ nur infinitesimale Bewegungen liefern.) Versucht man daher, $R_n$ in eine Potenzreihe nach $u$ zu entwickeln mit dem ersten Glied $u^l$, so liefern nur die beiden ersten Summanden in (9) Glieder mit dem niedrigsten Exponenten $l-1$, es muß also $l \cdot (l-1) - l = 0$ sein, also $l = 2$ oder $l = 0$. Die Fuchssche Theorie lehrt nun, daß es in der Tat ein zu dem größern Exponenten 2 gehöriges Integral von (9) gibt, ein Integral also von der Form $u^2 \cdot g(u)$, wo $g(u)$ in $u = 0$ regulär ist. Heißt dies insbesondere $R_n$, so erhält man ein davon linear unabhängiges Integral, wie man leicht nachrechnet, in der Gestalt $R_n \int \frac{z'\,du}{R_n^2}$, das für $u = 0$ samt seiner Ableitung endlich und stetig ist, aber dort nicht verschwindet. Es kommt also für uns nicht in Betracht. Dagegen verschwindet das erste Integral gerade so, wie es durch das gestellte Problem gefordert wird; wohlgemerkt im allgemeinen nur in dem einen Endpunkt. Wir stellen uns nun die Aufgabe, zu zeigen, daß in unserer Flächenschar auch solche Flächen enthalten sind, für die ein an beiden Rändern verschwindendes Integral existiert.

## § 2.

Bei Ableitung der Sturmschen Sätze kann die Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Form

$$(K \cdot Y')' + G \cdot Y = 0 \tag{10}$$

[5]) Hoheisel, Gewöhnliche Differentialgleichungen (1926), S. 101–105.

zugrunde gelegt werden. Die Funktionen $K$ und $G$ werden im einfachsten Fall im Intervall $\langle 0, U\rangle$ als regulär vorausgesetzt, außerdem $K > 0$. In unserem Beispiel kann die Gleichung nicht auf eine Gestalt gebracht werden, daß diesen Forderungen überall genügt wird, aber das erweist sich auch nicht als notwendig.

Halten wir an $u$ als unabhängiger Veränderlicher fest, so kann man (9) schreiben

$$\left(\frac{1}{z'} R_n'\right)' + \frac{(n^2-1)\,k}{r\,z'^2} R_n = 0. \tag{11}$$

Für ein in dem einen Endpunkt verschwindendes Integral verhalten sich beide Summanden in (11) regulär. Der Faktor von $R_n$ ist außer von $n$, das eine ganze Zahl sein muß, nach (1) von $a$ abhängig. Wir betrachten alle zu $a > 0$ gehörigen Flächen.

Zum Vergleich werden wir, wie gebräuchlich, die Gleichung mit den Integralen $\sin(\lambda z)$ und $\cos(\lambda z)$ heranziehen, nämlich

$$\left(\frac{1}{z'} S'\right)' + \lambda^2 z' S = 0. \tag{12}$$

Sie hat dasselbe $K$ wie (11).

Die Nullstellen zweier Integrale linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die linear unabhängig sind, trennen sich bekanntlich. Sind nämlich $u_1$, $u_2$ zwei benachbarte Nullstellen von $Y_1$, und wäre $Y_2$ überall in $\langle u_1, u_2\rangle$ von 0 verschieden, so müßte $\frac{Y_1}{Y_2}$ in $(u_1, u_2)$ ein Maximum oder Minimum haben, also dort $Y_2 Y_1' - Y_1 Y_2' = 0$ sein, was an einer regulären Stelle nur eintreten kann, wenn die Integrale bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmen. Das gilt auch für (11). Betrachtet man insbesondere ein in $u = 0$ verschwindendes Integral von (11), so ergibt die obige Schlußweise, daß die kleinste positive Nullstelle größer sein muß als die kleinste Nullstelle jedes unabhängigen Integrals.

Sind $Y_1$ und $Y_2$ Integrale von (10), die zwar zu demselben $K$, aber verschiedenen Werten von $G$, nämlich $G_1$ und $G_2$, gehören, und ist für alle $u$ in dem jeweils betrachteten Intervall $G_2 > G_1$, so folgert man aus der Sturmschen Formel[6]), daß zwischen zwei Nullstellen von $Y_1$ immer mindestens eine von $Y_2$ liegen muß. Das gilt jedenfalls für die Gleichungen (11) und (12) in Anwendung auf jedes Teilintervall von $(0, U)$, wenn nur die Bedingung für die Funktionen $G$ erfüllt ist; denn in $(0, U)$ ist überall $z' > 0$. In (11) ändert sich $G$, nämlich $\frac{(n^2-1)\,k}{r\,z'^2}$, mit $a$. Betrachtet man nun zwei zu solch verschiedenen $G$ gehörige Integrale von (11), die beide in $u = 0$ verschwinden, so gilt auch hier die Sturmsche

[6]) loc. cit. 5, S. 114.

Formel, wenn eben $u = 0$ als eine der in der Formel auftretenden Nullstellen gewählt wird. Je größer daher in diesem Fall $G$ ist, desto kleiner ist die kleinste positive Nullstelle des zugehörigen Integrals, das in $u = 0$ verschwindet.

Allgemein braucht jetzt nur noch daran erinnert zu werden, daß, wenn sich $G$ stetig mit dem Parameter ändert, auch die Nullstellen stetige Funktionen des Parameters sind.

Zur Anwendung dieser Bemerkungen auf unsere Aufgabe möge zunächst ein beliebiger Wert von $a$ gewählt sein. $G$ hat in (11) den Wert $\frac{(n^2-1)k}{rz'^2}$, in (12) $\lambda^2 z'$, und die Integrale von (12) haben um so viel mehr Nullstellen, je größer $\lambda$ ist. Wählen wir nun die ganze Zahl $n$ so groß, daß das Minimum von $\frac{(n^2-1)k}{rz'^3}$ größer als $\lambda^2$ ist, so ist für jedes $u$ das $G$ von (11) größer als das von (12). Bei dieser Wahl von $n$ liegt dann zwischen zwei Nullstellen von (12) in $(0, U)$ jedenfalls immer eine von (11). Bei gegebenem $a$ kann man also $n$ so wählen, daß jedes Integral von (11) im Intervall eine Zahl von Nullstellen hat, die größer ist als jede vorgeschriebene Zahl.

$\mathsf{P}_{n1}$ sei also ein Integral von (11), das für $u = 0$ verschwindet und im Intervall mindestens drei Nullstellen hat. Würde es auch für $u = U$ verschwinden, so wäre die zu dem betreffenden Wert von $a$ gehörige, parabolisch berandete Fläche negativer Krümmung verbiegbar. Wir nehmen an, $\mathsf{P}_{n1}$ verschwinde in $u = U$ nicht. Dann gibt es ein in $u = U$ verschwindendes Integral $\mathsf{P}_{n2}$ von (11), das natürlich nicht in $u = 0$ verschwindet, und die Nullstellen beider unabhängiger Integrale trennen sich gegenseitig. $\alpha_1$ sei die kleinste positive Nullstelle von $\mathsf{P}_{n1}$; die beiden (mit wachsendem $u$) darauf folgenden Nullstellen von $\mathsf{P}_{n2}$ seien $\alpha_2$ und $\alpha_3$.

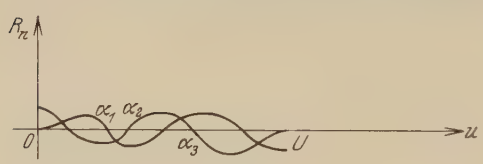


Fig. 2.

Nun möge $a$ stetig wachsen. Dann nimmt in (11) der Wert von $G$ für alle in $(0, U)$ liegenden Werte $u$ stetig ab. Zwischen zwei Nullstellen eines zum kleinern $G$ gehörigen Integrals muß aber stets eine Nullstelle jedes zum größern $G$ gehörigen Integrals liegen. Sind also nach wie vor $\mathsf{P}_{n1}$ und $\mathsf{P}_{n2}$ die in den Endpunkten verschwindenden Integrale von (11) (ein konstanter Faktor ist nebensächlich), die wir also jetzt mit $a$ veränderlich nehmen, so bleibt nur die Möglichkeit, daß die Nullstellen von $\mathsf{P}_{n1}$ (abgesehen von der im Punkt $u = 0$ liegenden) nach rechts, d. h. in Richtung wachsender $u$ wandern, und zwar stetig, ebenso die von $\mathsf{P}_{n2}$ monoton nach links, wieder natürlich mit Ausnahme der festliegenden Nullstelle $u = U$.

Wir wollen nun beweisen, daß es ein $a$ geben muß, für das die aus $\alpha_1$ und $\alpha_2$ entstehenden Nullstellen, die ja einander entgegen wandern, sich treffen. Zu dem Zweck betrachten wir das Intervall $\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle$. Wir wählen $\lambda$ in (12) gerade so groß, daß (12) ein in $\alpha_1$ und $\alpha_3$, aber nirgends in $(\alpha_1, \alpha_3)$ verschwindendes Integral besitzt. Ferner wählen wir $a$ so groß, daß das Maximum von $\frac{(n^2-1)k}{r z'^3}$ in $\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle$ kleiner als der soeben festgesetzte Wert von $\lambda^2$ ist, so daß in diesem Intervall das $G$ von (11) durchweg kleiner als das von (12) ist. Dann können die aus $\alpha_2$ und $\alpha_3$ entstandenen Nullstellen nicht beide zwischen $\alpha_1$ und $\alpha_3$ liegen, da zwischen zwei Nullstellen eines Integrals von (11) mit diesem $a$ gewiß eine Nullstelle eines jeden Integrals von (12) mit dem gewählten $\lambda$ liegen müßte. Also muß die aus $\alpha_2$ entstandene Nullstelle nunmehr schon über $\alpha_1$ nach links hinaus gewandert sein. Für einen zwischen dem ursprünglichen und dem neuen gelegenen Wert von $a$ treffen also die zwei Nullstellen von $\mathsf{P}_{n1}$ und $\mathsf{P}_{n2}$ zusammen. Zwei Integrale einer Differentialgleichung zweiter Ordnung aber, die an derselben regulären Stelle verschwinden, können sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. Für das betreffende $a$ sind also $\mathsf{P}_{n1}$ und $\mathsf{P}_{n2}$ wesentlich dasselbe Integral, oder, anders ausgedrückt, für dieses $a$ existiert ein in beiden Endpunkten verschwindendes Integral von (11); das zugehörige Flächenstück ist verbiegbar. Nunmehr macht man sich leicht klar, daß mit weiter wachsendem $a$ die Integrale $\mathsf{P}_{n1}$ und $\mathsf{P}_{n2}$ zunächst wieder linear unabhängig werden. Indessen läßt sich die eben angewandte Schlußweise nun erneut verwenden, um die Existenz eines größeren $a$ zu erweisen, für das (11) ein an beiden Rändern verschwindendes Integral mit einer um 1 niedrigern Zahl von Nullstellen im Intervall besitzt. Nur dann ist derselbe Schluß nicht mehr anwendbar, wenn man bis zu einem Integral jener Art mit nur zwei Nullstellen im Innern gelangt ist. Lassen wir von hier aus $a$ zu kleineren Werten zurückgehen, so ergibt sich schließlich für ein und denselben Wert von $n$ eine Folge von Werten $a$, die zu verbiegbaren Flächenstücken gehören. Die Gesamtheit der infinitesimal verbiegbaren Flächen unserer Schar wird nun dadurch erschöpft, daß man $n$ alle ganzen Zahlen $>1$ durchlaufen läßt und zu jedem $n$ die ausgezeichnete Folge von $a$-Werten ermittelt, für die (11) ein in beiden Endpunkten verschwindendes Integral besitzt.

(Eingegangen am 10. Juli 1931.)

# Bemerkung zu meiner Arbeit „Potentialtheoretische Untersuchungen I (Anhang)“[1]).

Von

J. Schauder in Lwów.

Die Behauptung des Hilfssatzes XX (Anhang) ist fehlerhaft[2]). Man kann nur beweisen: $|l(Q_1)-l(Q_2)| \leqq K A \operatorname{Max}|\varphi|\, r_{12}^{\lambda}|\log r_{12}|$.

Damit die beiden im Anhange vorkommenden Sätze[3]) ihre Gültigkeit behalten, muß infolgedessen die Theorie durch einen neuen Hilfssatz XXII[4]) ergänzt werden. Ich stelle die nötigen Hilfssätze samt den zu berücksichtigenden Abänderungen und Ergänzungen noch einmal zusammen.

Die Hilfssätze XVIII und XIX bleiben unverändert (S. 636).

Hilfssatz XX[5]). *Für integrables und beschränktes $\varphi(P)$ erfüllt die Funktion*

$$l(Q)=\iint_S \varphi(P)\frac{\cos(r_{PQ}, n_Q)}{r_{PQ}^2}\,d\sigma$$

*die Ungleichheit*

$$|l(Q_1)-l(Q_2)| \leqq K A \operatorname{Max}|\varphi|\, r_{12}^{\lambda}|\log r_{12}|.$$

Beweis. Es seien $Q_1$ und $Q_2$ zwei Flächenpunkte. Für den innerhalb $K_{12}$ gelegenen Teil der Fläche gilt (Hilfssatz II)

$$\left|\iint_s \varphi(P)\frac{\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})}{r_{PQ_1}^2}\,d\sigma-\iint_s \varphi(P)\frac{\cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})}{r_{PQ_2}^2}\,d\sigma\right| \leqq K A \operatorname{Max}|\varphi|\, r_{12}^{\lambda}.$$

Auf $S''$ ist (Hilfssätze II, IV)

$$\left|\iint_{S''} \varphi(P)\left[\frac{\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})}{r_{PQ_1}^2}-\frac{\cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})}{r_{PQ_2}^2}\right]d\sigma\right|$$

$$\leqq K A \operatorname{Max}|\varphi|\left\{r_{12}\iint_{S''}\frac{d\sigma}{r_{PQ_1}^{3-\lambda}}+r_{12}^{\lambda}\iint_{S''}\frac{d\sigma}{r_{PQ_1}^2}\right\} \leqq K A \operatorname{Max}|\varphi|\, r_{12}^{\lambda}|\log r_{12}|.$$

---

[1]) Math. Zeitschr. **33** (1931), S. 602–640, insb. (Anhang) S. 636.

[2]) Auf diesen Umstand wurde meine Aufmerksamkeit von Herrn Lichtenstein gelenkt.

[3]) Die Sätze V und VI.

[4]) Der mit den Methoden des Hauptteiles der Arbeit bewiesen wird.

[5]) Geändert.

Hilfssatz XXI (S. 637), Zeile 15 von oben lautet richtig: „Es ist nun (wegen des Hilfssates $I_5$)“; sonst unverändert.

Hilfssatz XXII[6]). *Genügt die Funktion $\varphi(P)$ einer Hölderschen Bedingung mit einem beliebigen Exponenten $0 < \varepsilon < 1$, d. h. ist*

$$|\varphi(Q)| \leqq C; \quad |\varphi(Q_1) - \varphi(Q_2)| \leqq C r_{12}^{\varepsilon}; \quad 0 < \varepsilon < 1,$$

*so gilt (für das im Hilfssatze XX vorkommende $l$) die schärfere Ungleichheit*

$$|l(Q_1) - l(Q_2)| \leqq K A C r_{12}^{\lambda} \quad (\lambda \text{ der Flächenexponent}).$$

Beweis. Es möge jetzt $\overline{K}_{12}$ eine Kugel bezeichnen, deren Mittelpunkt sich in $Q_1$ befindet und die den Radius $\frac{3}{2} r_{12}$ besitzt[7]). Für den innerhalb $\overline{K}_{12}$ gelegenen Teil $s$ der Fläche gilt (Hilfssatz II)

$$\left| \iint_s \varphi(P) \frac{\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})}{r_{PQ_1}^2} d\sigma - \iint_s \varphi(P) \frac{\cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})}{r_{PQ_2}^2} d\sigma \right| \leqq K A \operatorname{Max} |\varphi| r_{12}^{\lambda}.$$

Auf $S''$ ist (Hilfssätze II, IV)

$$\iint_{S''} \varphi(P) \left[ \frac{\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})}{r_{PQ_1}^2} - \frac{\cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})}{r_{PQ_2}^2} \right] d\sigma$$

$$= \iint_{S''} [\varphi(P) - \varphi(Q_1)] \left[ \frac{\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})}{r_{PQ_1}^2} - \frac{\cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})}{r_{PQ_2}^2} \right] d\sigma$$

$$+ \varphi(Q_1) \iint_{S''} \left[ \frac{\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})}{r_{PQ_1}^2} - \frac{\cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})}{r_{PQ_2}^2} \right] d\sigma = \boldsymbol{A} + \varphi(Q_1) \boldsymbol{B}.$$

Die Ungleichheitsbeziehung für $\boldsymbol{A}$ lautet

$$|\boldsymbol{A}| \leqq K A C \left\{ r_{12} \iint_{S''} \frac{d\sigma}{r_{PQ_1}^{3-(\lambda+\varepsilon)}} + r_{12}^{\lambda} \iint_{S''} \frac{d\sigma}{r_{PQ_1}^{2-\varepsilon}} \right\} \leqq K A C r_{12}^{\lambda}.$$

Das Integral $\boldsymbol{B}$ spalten wir in drei Teile:

$$\boldsymbol{B} = \iint_{S''} \left[ \frac{\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_2}) - \cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})}{r_{PQ_1}^2} \right] d\sigma$$

$$+ \iint_{S''} \left[ \frac{\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1}) - \cos(r_{PQ_1}, n_{Q_2})}{r_{PQ_1}^2} \right] d\sigma + \iint_{S''} \cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2}) \left( \frac{1}{r_{PQ_1}^2} - \frac{1}{r_{PQ_2}^2} \right) d\sigma$$

$$= I + II + III.$$

Es ist wegen Formel (34) S. 611 und nach Hilfssatz II

$$|I| \leqq 12 A r_{12} \iint_{S''} \frac{d\sigma}{r_{PQ_1}^2 r_{PQ_2}^{1-\lambda}} \leqq K A r_{12}^{\lambda}.$$

---

[6]) Kommt neu hinzu.

[7]) Es ist überhaupt besser, $\overline{K}_{12}$ statt $K_{12}$ zu benutzen.

Ähnlich wegen des Hilfssatzes II

$$|III| \leqq K A r_{12} \iint_{S''} \frac{d\sigma}{r_{PQ_1}^{3-\lambda}} \leqq K A r_{12}^{\lambda}.$$

Zur Behandlung des Integrals *II* benutzen wir das lokale Koordinatensystem $x_1, y_1, z_1$ im Punkte $Q_1$. Für „$z_1$" schreiben wir auch „$n_{Q_1}$". Bezeichnet man mit

$$a = \cos(x_1, n_{Q_2}); \quad b = \cos(y_1, n_{Q_2}); \quad c = \cos(n_{Q_1}, n_{Q_2}) - 1,$$

so gilt

$$-II = a \iint_{S''} \frac{\cos(r_{PQ_1}, x_1)}{r_{PQ_1}^2} d\sigma + b \iint_{S''} \frac{\cos(r_{PQ_1}, y_1)}{r_{PQ_1}^2} d\sigma + c \iint_{S''} \frac{\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})}{r_{PQ_1}^2} d\sigma.$$

Alle in der *letzten* Formel vorkommenden Integrale sind gleichmäßig beschränkt (vgl. die Hilfssätze II und XIX. Formel (126)). Da unsere Fläche vom Typus $Ah$ ist, so schließt man weiter aus den Formeln (2) (S. 604)

$$|a| \leqq A r_{12}^{\lambda}; \quad |b| \leqq A r_{12}^{\lambda}; \quad |c| \leqq A r_{12}^{\lambda}.$$

Man bekommt also für *II* die Abschätzung

$$|II| \leqq K A r_{12}^{\lambda} \text{ (beschränktes Integral)} \leqq K A r_{12}^{\lambda},$$

somit insgesamt

$$|\boldsymbol{B}| \leqq |I| + |II| + |III| \leqq K A r_{12}^{\lambda},$$

und endlich

$$\left| \iint_{S''} \varphi(P) \left[ \frac{\cos(r_{PQ_1}, n_{Q_1})}{r_{PQ_1}^2} - \frac{\cos(r_{PQ_2}, n_{Q_2})}{r_{PQ_2}^2} \right] d\sigma \right|$$
$$\leqq |\boldsymbol{A}| + |\varphi(Q_1)| \cdot |\boldsymbol{B}| \leqq K A C r_{12}^{\lambda}, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Aus den Hilfssätzen XX, XXI, XXII folgt, daß die Randwerte der Potentialfunktionen $\frac{\partial V}{\partial X}, \frac{\partial V}{\partial Y}, \frac{\partial V}{\partial Z}$ $H$-Bedingungen mit dem Exponenten $\lambda$ erfüllen, falls dasselbe für die Belegung $\varphi(P)$ zutrifft, und somit gilt nach Satz II auch der Satz V in *unveränderter* Fassung (S. 638).

Beachtet man den Zusammenhang zwischen der zweiten Randwertaufgabe und dem Potential der einfachen Schicht, so gelangt man endlich, indem noch die Hilfssätze XX und XXII benutzt werden, zum *ungeänderten* Satze VI (S. 638).

(Eingegangen am 26. Juli 1931.)

# Zu dem Integralsatz von Cauchy.

Von

E. Kamke in Tübingen.

Der Integralsatz von Cauchy wird gewöhnlich in folgender Fassung bewiesen[1]):

I. *Ist die Funktion $f(z)$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet regulär und ist $\mathfrak{C}$ eine diesem Gebiet angehörende geschlossene stetige und rektifizierbare Kurve, so ist*

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz = 0. \tag{1}$$

Für mancherlei Anwendungen ist folgende Formulierung recht brauchbar[2]):

II. *Ist $\mathfrak{C}$ eine geschlossene rektifizierbare Jordan-Kurve und ist die Funktion $f(z)$ innerhalb $\mathfrak{C}$ und auf $\mathfrak{C}$ regulär, so besteht wiederum die Gleichung* (1).

Allgemeiner als diese Fassung ist die folgende[3]):

III. *Ist $\mathfrak{C}$ eine geschlossene rektifizierbare Jordan-Kurve und ist die Funktion $f(z)$ innerhalb $\mathfrak{C}$ regulär und in dem aus dem Inneren von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}$ selber bestehenden abgeschlossenen Gebiet stetig, so gilt ebenfalls* (1).

Ein Beweis für den Satz III in der hier ausgesprochenen Allgemeinheit ist mir nicht bekannt[4]).

---

[1]) L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, 3. Aufl., Leipzig und Berlin 1930, S. 118. K. Knopp, Funktionentheorie, 4. Aufl., Berlin und Leipzig 1930, S. 56.

[2]) K. Knopp, a. a. O., S. 63.

[3]) W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, 1. Band, 5. Aufl., Leipzig und Berlin 1928, S. 369. A. Hurwitz-R. Courant, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 3. Aufl., Berlin 1929, S. 283. Pascals Repertorium der höheren Analysis $I_2$, 2. Aufl., Leipzig und Berlin 1927, S. 699.

[4]) Die Ausführung der in Pascals Repertorium a. a. O. erwähnten Beweisskizze scheint auf Schwierigkeiten gestoßen zu sein.

Für den Satz II findet man eine Beweisskizze bei K. Knopp [5]: „Da $f(z)$ in jedem Punkte $z$ von $\mathfrak{C}$ regulär ist, so gibt es um jeden solchen Punkt eine kreisförmige Umgebung, in der $f(z)$ regulär ist. Nach dem Heine-Borelschen Theorem genügen endlich viele von diesen Kreisen, um $\mathfrak{C}$ zu überdecken. Das von $\mathfrak{C}$ umschlossene Gebiet, vermehrt um geeignete Stücke dieser Kreisscheiben, liefert nun ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}$, in dem $\mathfrak{C}$ liegt und $f(z)$ regulär ist." Und dann folgt aus dem Satz I der Satz II. Geht man an die Einzelausführung, so zeigt sich, daß diese Beweisskizze sich jedoch nicht ganz so glatt ausführen läßt, wie es auf den ersten Blick scheinen mag. Es sei mir daher gestattet, den Beweis im Einvernehmen mit Herrn Knopp im einzelnen auszuführen. Es kommt offenbar nur darauf an, den folgenden Hilfssatz zu beweisen:

Hilfssatz 1. Ist $f(z)$ regulär innerhalb und auf einer geschlossenen Jordan-Kurve [6] $\mathfrak{C}$, so gibt es ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}$, das $\mathfrak{C}$ enthält und in dem eine reguläre Funktion $g(z)$ definiert werden kann, die innerhalb und auf $\mathfrak{C}$ mit $f(z)$ übereinstimmt.

Dem Beweise dieses Hilfssatzes wird eine Modifikation des Überdeckungssatzes von Borel vorangeschickt:

Hilfssatz 2. Es sei

$$\mathfrak{C}: \quad z = \chi(t) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

eine stetige Kurve. Jedem Wert $t$ sei ein offener Kreis $\mathfrak{K}(t)$ zugeordnet, der den Punkt $z = \chi(t)$ enthält. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ der Kreise $\mathfrak{K}(t)$ von folgender Art:

a) $\mathfrak{C}$ ist in $\mathfrak{K}_1 + \ldots + \mathfrak{K}_n$ enthalten;

b) jeder Punkt $z_0 = \chi(t_0)$ gehört einem Kreise $\mathfrak{K}_\nu$ an, der zwar nicht $t_0$ selber zugeordnet zu sein braucht, aber einem Wert $t^*$ des größten Intervalls $\alpha < t < \beta$ zugeordnet ist, das $t_0$ enthält und das nur in $\mathfrak{K}_\nu$ gelegene Punkte von $\mathfrak{C}$ liefert.

Beweis (durch vollständige Induktion). Zu a gehört ein Kreis $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}(a)$. Da $\chi(a)$ innerer Punkt von $\mathfrak{K}_1$ und da $\chi$ stetig ist, gehört auch ein gewisses Kurvenstück

$$z = \chi(t) \quad \text{mit} \quad a \leqq t \leqq a_1$$

diesem Kreis an. Es gibt also sicher ein gewisses Intervall $a \leqq t \leqq a_1$, so daß der Hilfssatz für das durch dieses Intervall bestimmte Stück von $\mathfrak{C}$ richtig ist. Es sei $b_1$ die obere Grenze dieser $a_1$. Zu $b_1$ gehört ein Kreis $\mathfrak{K}(b_1)$, und es gibt ein $\delta > 0$, so daß das durch $b_1 - \delta \leqq t \leqq \mathrm{Min}(b_1 + \delta, b)$

[5] A. a. O., S. 63.

[6] Die Rektifizierbarkeit braucht nicht vorausgesetzt zu werden.

bestimmte Stück von $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{K}(b_1)$ liegt. Daher ist der Hilfssatz auch für das durch $a \leqq t \leqq \mathrm{Min}(b_1 + \delta, b)$ bestimmte Stück von $\mathfrak{C}$ richtig. Wäre $b_1 < b$, so wäre $\mathrm{Min}(b_1 + \delta, b) > b_1$, und man hätte einen Widerspruch gegen die Definition von $b_1$. Daher ist $b_1 = b$ und der Hilfssatz in vollem Umfange richtig.

Beweis des Hilfssatzes 1. Da $f(z)$ auf $\mathfrak{C}$ regulär ist, gibt es zu jedem Punkt $C$ von $\mathfrak{C}$ einen offenen Kreis $\mathfrak{K}^*$, der den Mittelpunkt $C$ hat und in dem eine reguläre Funktion $h(z)$ existiert, die mit $f(z)$ auf dem größten in $\mathfrak{K}^*$ gelegenen Stück[7]) $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{C}$ übereinstimmt, das den Punkt $C$ enthält; dann ist $h(z) = f(z)$ auch in demjenigen Teil des Kreises $\mathfrak{K}^*$, der durch $\mathfrak{S}$ abgetrennt wird und nur Punkte aus dem Innern von $\mathfrak{C}$ enthält. Es sei $\mathfrak{K}$ ein zweiter offener, zu $\mathfrak{K}^*$ konzentrischer Kreis, dessen Radius aber nur halb so groß ist wie der Radius von $\mathfrak{K}^*$. Diesen Kreis $\mathfrak{K}$ ordnen wir dem Punkt $C$ zu. Nach dem Hilfssatz 1 gibt es unter den $\mathfrak{K}$ eine endliche Teilmenge $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$, so daß $\mathfrak{C}$ in $\sum \mathfrak{K}_\nu$ enthalten ist und jeder Kurvenpunkt $C$ mindestens einem $\mathfrak{K}_\nu$ angehört, dessen Mittelpunkt mit $C$ durch ein innerhalb $\mathfrak{K}_\nu$ verlaufendes Stück von $\mathfrak{C}$ verbunden werden kann. Das zu einem $\mathfrak{K}_\nu$ gehörige Kurvenstück $\mathfrak{S}$ sei mit $\mathfrak{S}_\nu$ bezeichnet.

Zwar ist $\sum \mathfrak{K}_\nu$ nach Hinzunahme des Inneren von $\mathfrak{C}$ ein Gebiet, das die Kurve $\mathfrak{C}$ enthält, aber dieses braucht nicht einfach zusammenzuhängen, und die Funktionselemente $h(z)$ brauchen in $\sum \mathfrak{K}_\nu$ keine eindeutige Funktion zu definieren.

Daher legen wir für $\mathfrak{C}$ einen positiven Umlaufssinn fest und greifen irgendeinen Punkt $C$ von $\mathfrak{C}$ heraus. $C$ gehört irgendeinem der Kurvenstücke $\mathfrak{S}_\nu$ an. Unter diesen endlich vielen $\mathfrak{S}_\nu$ gibt es mindestens eines — künftig $\mathfrak{S}_1$ genannt —, das in positivem Sinne von $C$ aus am weitesten führt, d. h. $\mathfrak{S}_1$ hat die Eigenschaft, daß für jedes andere den Punkt $C$ enthaltende Stück $\mathfrak{S}_\nu$ das „hinter" $C$ gelegene Stück von $\mathfrak{S}_\nu$ in $\mathfrak{S}_1$ enthalten ist. Ist $\mathfrak{S}_1 \neq \mathfrak{C}$, so hat $\mathfrak{S}_1$ einen nicht zu $\mathfrak{S}_1$ gehörigen Endpunkt $C_1$. Unter allen Kurvenstücken $\mathfrak{S}_\nu$, die $C_1$ enthalten, gibt es dann eines, das in positiver Richtung am weitesten führt; dieses heiße von jetzt ab $\mathfrak{S}_2$. Hat $\mathfrak{S}_2$ einen nicht zu $\mathfrak{S}_1$ gehörigen Endpunkt $C_2$, so gibt es wiederum unter allen Kurvenstücken, die $C_2$ enthalten, eines, das in positivem Sinne am weitesten führt. So kann man fortfahren. Das Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten ab, nämlich dann, wenn zuerst der Endpunkt eines $\mathfrak{S}_m$ zu $\mathfrak{S}_1$ gehört.

Die erhaltene Folge von Kurvenstücken $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_m$ hat die Eigenschaft, daß jedes $\mathfrak{S}_\nu$ mit $\mathfrak{S}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{S}_{\nu+1}$ ein Stück gemeinsam hat[8]), aber

[7]) „Stück" einer Kurve soll hier immer ein zusammenhängendes Stück sein.

[8]) Dabei soll $\mathfrak{K}_{m+1} = \mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{S}_{m+1} = \mathfrak{S}_1$ sein.

kein $\mathfrak{S}_\nu$ einen Punkt mit den $\mathfrak{S}_\varkappa$ gemeinsam hat, deren Indizes von $\nu-1$, $\nu$, $\nu+1$ verschieden sind. Grenzpunkte kann ein $\mathfrak{S}_\nu$ jedoch noch mit $\mathfrak{S}_{\nu-2}$ und $\mathfrak{S}_{\nu+2}$ gemeinsam haben und auch nur mit diesen Stücken. Durch Fortlassen hinreichend kleiner Stücke von den $\mathfrak{S}_\nu$ kann schließlich noch erreicht werden, daß jedes der so abgeänderten $\mathfrak{S}_\nu$ von den $\mathfrak{S}_\varkappa$ mit $\varkappa \neq \nu-1$, $\nu$, $\nu+1$ einen positiven Abstand $\sigma_\nu$ hat, mit $\mathfrak{S}_{\nu-1}$ und $\mathfrak{S}_{\nu+1}$ jedoch nach wie vor ein Stück gemeinsam hat.

Ist $\varrho_\nu$ der Radius des Kreises $\mathfrak{K}_\nu$, so werde

$$\varrho = \min_{\nu=1,\ldots,m}\left(\varrho_\nu, \frac{1}{2}\sigma_\nu\right)$$

gesetzt. Nach dem Überdeckungssatz von Borel kann jedes Kurvenstück $\mathfrak{S}_\nu$ durch endlich viele offene Kreise $\mathfrak{k}$ überdeckt werden, deren Radien $< \varrho$ sind und deren Mittelpunkte auf $\mathfrak{S}_\nu$ liegen. Bei festem $\nu$ werde $\mathfrak{g}_\nu = \sum \mathfrak{k}$ gesetzt.

Gemeinsame Punkte haben immer nur zwei aufeinander folgende $\mathfrak{g}_\mu$, $\mathfrak{g}_{\mu+1}$, während der Durchschnitt von je drei verschiedenen der $\mathfrak{g}_\nu$ leer ist. Jedes $\mathfrak{g}_\nu$ liegt in dem zugehörigen Kreis $\mathfrak{K}_\nu^*$, in dem ein Funktionselement $h_\nu(z)$ definiert ist, das auf dem in $\mathfrak{K}_\nu$ gelegenen Stück $\mathfrak{S}_\nu$ von $\mathfrak{C}$ mit $f(z)$ übereinstimmt. Da zwei aufeinander folgende $\mathfrak{S}_\nu$, $\mathfrak{S}_{\nu+1}$ ein Stück gemeinsam haben, wird durch $h_\nu$, $h_{\nu+1}$ in $\mathfrak{K}_\nu^* + \mathfrak{K}_{\nu+1}^*$ eine eindeutige Funktion definiert. Setzt man für einen zu $\mathfrak{g}_\nu$ gehörigen Punkt $z$ stets $g(z) = h_\nu(z)$, so ist hiernach $g(z)$ in $\sum \mathfrak{g}_\nu$ als eindeutige reguläre Funktion definiert, die mit $f(z)$ auf $\mathfrak{C}$ übereinstimmt. Wird mit $\Gamma$ das aus $\sum \mathfrak{g}_\nu$ und dem Innern von $\mathfrak{C}$ bestehende Gebiet bezeichnet und $g(z) = f(z)$ für die im Innern von $\mathfrak{C}$ liegenden Punkte gesetzt, so ist schließlich $g(z)$ auch in $\Gamma$ eine eindeutige reguläre Funktion, die auf und innerhalb $\mathfrak{C}$ mit $f(z)$ übereinstimmt.

Der Rand von $\Gamma$ besteht aus endlich vielen geschlossenen Randkurven, die aus endlich vielen Kreisbögen (den Rändern der $\mathfrak{k}$) zusammengesetzt sind oder isolierte Punkte sind und die alle außerhalb $\mathfrak{C}$ liegen. Daher kann $\Gamma$ durch passende Schnitte, die außerhalb $\mathfrak{C}$ verlaufen, zu einem einfach zusammenhängenden Gebiet gemacht werden. Man kann dabei etwa so vorgehen:

Da die Ränder von $\Gamma$ Jordan-Kurven sind und $\Gamma$ beschränkt ist, gibt es eine Randkurve $\mathfrak{R}$, in deren Innerem alle übrigen Randkurven von $\Gamma$ liegen. Man verbinde einen Punkt von $\mathfrak{R}$ mit einem Punkt einer anderen Randkurve durch einen außerhalb $\mathfrak{C}$ verlaufenden Polygonzug. Auf diesem Polygonzug gibt es einen letzten auf $\mathfrak{R}$ gelegenen Punkt $A$ und hinter $A$ einen ersten auf dem Rand von $\Gamma$ gelegenen Punkt $B$. Das zwischen $A$ und $B$ gelegene Stück des Polygonzugs liegt (abgesehen von den Endpunkten) in $\Gamma$. Nimmt man dieses Stück des Polygonzugs aus $\Gamma$

heraus, so ist damit ein Teilgebiet $\Gamma_1$ von $\Gamma$ entstanden, dessen Zusammenhang um 1 geringer ist als der von $\Gamma$. Wendet man dieses Verfahren von neuem auf $\Gamma_1$ statt $\Gamma$ an und fährt man in dieser Weise fort, so erhält man nach endlich vielen Schritten ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}$, das $\mathfrak{C}$ enthält und in dem $g(z)$ wiederum die analytische Fortsetzung von $f(z)$ ist.

Anmerkung. Ist $\mathfrak{R}$ wieder der äußere Rand von $\Gamma$, so kann man bei hinreichend kleinem $\varrho$ zeigen, daß jede der übrigen Randkurven von $\Gamma$ einem Gebiet $\mathfrak{R}_\nu^* + \mathfrak{R}_{\nu+1}^*$ angehört. Daraus ergibt sich, daß sich $g(z)$ sogar für das ganze Innere von $\mathfrak{R}$ als analytische Fortsetzung von $f(z)$ definieren läßt, doch erfordert das umständlichere Betrachtungen.

Tübingen, 28. August 1931.

(Eingegangen am 30. August 1931.)

# Über eine Entwicklung der Lösung der Telegraphengleichung nach Besselschen Funktionen.

Von

A. Korn in Berlin.

## § 1.

Wir denken uns eine vom Nullpunkt in der Richtung der positiven Abszissenachse $x$ ins Unendliche laufende Telegraphenleitung, die Spannung $V$ und den Strom $J$ auf der Leitung als Funktion der Abszisse $x$ und der Zeit $t$, dann bestehen die Differentialgleichungen[1]):

$$(1) \qquad \begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} &= RJ + L\frac{\partial J}{\partial t}, \\ -\frac{\partial J}{\partial x} &= C\frac{\partial V}{\partial t}, \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqq x < \infty, \\ t \geqq 0 \end{pmatrix}$$

wenn $C$, $R$, $L$ die charakteristischen Konstanten der Leitung (Kapazität, Ohmschen Widerstand und Selbstinduktion) vorstellen und wir die Leitung von irgend einem Anfangspunkte der Zeit $(t = 0)$ betrachten. Ist die Leitung bis zu diesem Zeitpunkt in Ruhe und von diesem Momente an die Spannung $V$ am Anfang der Leitung $(x = 0)$ als Funktion der Zeit

$$(2) \qquad V = \varphi(t), \qquad (x = 0)$$

gegeben, und setzen wir voraus, daß diese Funktion der Zeit mit ihren ersten Ableitungen für ein endliches Zeitintervall

$$0 \leqq t \leqq \bar{t}$$

---

[1]) Ich vernachlässige dabei die sogenannte Ableitung $G$ der Leitung, bei deren Berücksichtigung die zweite Gleichung (1) durch die folgende zu ersetzen ist:

$$(1) \qquad -\frac{\partial J}{\partial x} = GV + C\frac{\partial V}{\partial t}.$$

Dieser allgemeine Fall ist auf den obigen leicht zurückzuführen.

eindeutig und stetig ist und für $t = 0$ verschwindet, dann wissen wir, die Stromstärke wird für jede Stelle $x$ der Leitung zur Zeit $t$ durch die folgenden Formeln dargestellt:

$$J = 0, \quad (x \geqq vt),$$

$$(3) \qquad = Cv \int_0^{t-\frac{x}{v}} e^{-\varrho(t-\tau)} \varphi'(\tau) J_0\left(i\varrho\sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{x^2}{v^2}}\right) d\tau, \qquad (x \leqq vt),$$

wenn wir noch

$$(4) \qquad v^2 = \frac{1}{LC}, \qquad \varrho = \frac{R}{2L}$$

setzen und unter $J_0(z)$ die Besselsche Funktion

$$(5) \qquad J_0(z) = 1 - \left(\frac{1}{1!}\right)^2 \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2!}\right)^2 \left(\frac{z}{2}\right)^4 - \ldots,$$

verstehen.

Wenn nun auch schon diese bekannte Lösung der Telegraphengleichung dazu benutzt worden ist, in gewissen Fällen Näherungen für die Lösung anzugeben, fehlten doch bisher Methoden zu strengen Reihenentwicklungen; ich habe in einem Vortrage in der Berliner Mathematischen Gesellschaft [Sitz.-Ber. **26**, (1930), S. 71] „Über einige Integraleigenschaften der Besselschen Funktionen und eine Anwendung derselben" eine Methode für diesen Zweck skizziert, die auf gewissen Integraleigenschaften der Besselschen Funktionen beruht. Das war aber mehr ein Programm, und die Durchführung desselben mit der erforderlichen Strenge zeigte größere Schwierigkeiten, als man anfangs erwarten konnte. Unter Beibehaltung der Grundrichtung, jedoch mit einigen Modifikationen im einzelnen, ist es mir jetzt gelungen, diese Schwierigkeiten zu überwinden.

## § 2.

Ich möchte von vornherein die Lösung der Telegraphengleichung durch Einführung neuer Variablen vorübergehend auf eine für unsere Zwecke bequemere Form bringen. Ich setze:

$$(6) \qquad \varrho(t-\tau) = \xi, \qquad y = \varrho\frac{x}{v},$$

dann wird:

$$J = 0, \quad (\varrho t \leqq y),$$

$$(7) \qquad = \frac{Cv}{\varrho} \int_y^{\varrho t} \varphi'\left(t - \frac{\xi}{\varrho}\right) e^{-\xi} J_0(i\sqrt{\xi^2 - y^2})\, d\xi, \qquad (\varrho t \geqq y),$$

und wenn wir noch

$$(8) \qquad i\sqrt{\xi^2 - y^2} = \mathfrak{x}, \qquad \xi = -i\sqrt{\mathfrak{x}^2 - y^2}, \qquad d\xi = -\frac{i\mathfrak{x}}{\sqrt{\mathfrak{x}^2 - y^2}} d\mathfrak{x}$$

setzen, erhalten wir:

$$J = 0, \qquad (\varrho t \leqq y),$$

$$(9) \qquad = -\frac{Cv}{\varrho} \int_0^{i\sqrt{\varrho^2 t^2 - y^2}} \frac{i\xi^2}{\sqrt{\xi^2 - y^2}} \psi(\xi) \frac{J_0(\xi)}{\xi} d\xi, \qquad (\varrho t \geqq 0),$$

wo

$$(10) \qquad \psi(\xi) = e^{i\sqrt{\xi^2 - y^2}} \varphi'\left(t + i\frac{\sqrt{\xi^2 - y^2}}{\varrho}\right).$$

Das Grundprinzip meiner Methode besteht darin, zu versuchen, die Funktion

$$\frac{i\xi^2}{\sqrt{\xi^2 - y^2}} \psi(\xi)$$

in eine nach den graden Besselschen Funktionen

$$(11) \quad J_{2j}(\xi) = \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2j} \left\{ \frac{1}{(2j)!} - \frac{1}{1!(2j+1)!}\left(\frac{\xi}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(2j+2)!}\left(\frac{\xi}{2}\right)^4 - \cdots \right\}$$
$$(j = 1, 2, \ldots),$$

fortschreitende Reihe

$$(12) \qquad \frac{i\xi^2}{\sqrt{\xi^2 - y^2}} \psi(\xi) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j} J_{2j}(\xi)$$

zu entwickeln und dann von der folgenden Integraleigenschaft der Besselschen Funktionen Gebrauch zu machen:

I. *Die Besselschen Funktionen haben die folgende Integraleigenschaft*:

$$(13) \quad \int_0^{\xi} \frac{J_{2j}(\xi) J_0(\xi)}{\xi} d\xi = \frac{\xi}{4j^2} \{ J_0(\xi) J'_{2j}(\xi) - J'_0(\xi) J_{2j}(\xi) \} \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Man kann diese Formeln, welche übrigens nur einen Spezialfall allgemeinerer, schon früher benutzter Relationen darstellen, leicht in folgender Weise ableiten:

Die Besselschen Funktionen erfüllen die folgenden Differentialgleichungen:

$$(14) \qquad J''_{2j}(\xi) + \frac{J'_{2j}(\xi)}{\xi} + \frac{\xi^2 - 4j^2}{\xi^2} J_{2j}(\xi) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$
$$J''_0(\xi) + \frac{J'_0(\xi)}{\xi} + J_0(\xi) = 0.$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit

$$\xi J_0(\xi),$$

die zweite mit

$$\xi J_{2j}(\xi)$$

und subtrahieren, dann folgt

$$\mathfrak{x}\{J_0(\mathfrak{x})J''_{2j}(\mathfrak{x}) - J''_0(\mathfrak{x})J''_{2j}(\mathfrak{x})\} + J_0(\mathfrak{x})J'_{2j}(\mathfrak{x}) - J'_0(\mathfrak{x})J_{2j}(\mathfrak{x}) = \frac{4j^2}{\mathfrak{x}}J_{2j}(\mathfrak{x})J_0(\mathfrak{x})$$

oder

$$(15)\quad \frac{d}{d\mathfrak{x}}\{\mathfrak{x}[J_0(\mathfrak{x})J'_{2j}(\mathfrak{x}) - J'_0(\mathfrak{x})J_{2j}(\mathfrak{x})]\} = \frac{4j^2}{\mathfrak{x}}J_0(\mathfrak{x})J_{2j}(\mathfrak{x}) \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

und hieraus durch Integration zwischen den Grenzen 0 und $\mathfrak{x}$ die Behauptung.

Können wir die Entwicklung (12) beweisen, so folgt aus (9) mit Hilfe des Satzes I:

$$J = 0, \qquad (\varrho t \leqq y),$$

$$(16)\quad = -\frac{iCv}{2\varrho}\sqrt{\varrho^2 t^2 - y^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{A_{2j}}{j^2}\{J_0(i\sqrt{\varrho^2 t^2 - y^2})J'_{2j}(i\sqrt{\varrho^2 t^2 - y^2})$$

$$- J'_0(i\sqrt{\varrho^2 t^2 - y^2})J_{2j}(i\sqrt{\varrho^2 t^2 - y^2})\} \qquad (\varrho t \geqq y)$$

und damit der Satz:

II. *Können wir die Entwicklung*

$$(17)\quad F(z) \equiv \frac{iz^2}{\sqrt{z^2 - y^2}}e^{i\sqrt{z^2 - y^2}}\varphi'\left(t + \frac{i\sqrt{z^2 - y^2}}{\varrho}\right) = 2\sum_{j=1}^{\infty}A_{2j}J_{2j}(z)$$

*beweisen, dann ist die Lösung der Telegraphengleichung in der folgenden Weise darstellbar:*

$$J = 0, \qquad (x \geqq vt),$$

$$(18)\quad = -iCv\sqrt{\varrho^2 t^2 - y^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{A_{2j}}{2j^2}\left\{J_0\left(i\varrho\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v^2}}\right)J'_{2j}\left(i\varrho\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v^2}}\right)\right.$$

$$\left. - J'_0\left(i\varrho\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v^2}}\right)J_{2j}\left(i\varrho\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v^2}}\right)\right\} \qquad (x \leqq vt).$$

Es wird sich für die Verwendung des Satzes II im wesentlichen darum handeln, zu zeigen, daß wir bei sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Funktion $F(z)$ die Entwicklung

$$(19)\qquad F(z) = 2\sum_{j=1}^{\infty}A_{2j}J_{2j}(z)$$

ausführen und im besonderen für den Fall

$$(20)\quad F(z) = \frac{iz^2}{\sqrt{z^2 - y^2}}f(\sqrt{z^2 - y^2}), \quad f(\sqrt{z^2 - y^2}) = e^{i\sqrt{z^2 - y^2}}\varphi'\left(t + i\frac{\sqrt{z^2 - y^2}}{\varrho}\right)$$

die $A_{2j}$ in einfacher Weise berechnen können.

Würde eine Entwicklung

$$F(z) = 2\sum_{j=1}^{\infty}A_{2j}J_{2j}(z)$$

in der ganzen unendlichen $z$-Ebene gleichmäßig konvergieren, so könnte

man mit Hilfe der bekannten Integralformeln:

$$\int_0^\infty \frac{J_{2j}(z)\,J_{2k}(z)}{z}\,dz = 0 \qquad (j \neq k),$$

$$\int_0^\infty \frac{J_{2j}^2(z)}{z}\,dz = \frac{1}{4j} \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

sofort

$$A_{2j} = 2j \int_0^\infty \frac{F(z)\,J_{2j}(z)}{z}\,dz \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

schließen. Die von mir früher vorgeschlagene Methode setzte solche Entwicklungen voraus; bei näherem Zusehen ergibt sich indessen, daß wir zwar irgendwelche Funktionen $F(z)$ der komplexen Variablen $z$, die in einem endlichen Kreisgebiete

$$0 \leqq z \leqq \bar{z}$$

regulär sind, in diesem Kreisgebiete nach den $J(z)$ entwickeln können, bei gleichmäßiger Konvergenz der Reihen in diesem Kreisgebiete, daß wir aber den Radius des Kreises nur ins Unendliche wachsen lassen können, wenn die $F(z)$ gewisse einschränkende Bedingungen erfüllen. (Man vgl. A. Korn, „Über Reihenentwicklungen nach Besselschen Funktionen", Berl. Ber. **23** (1931), S. 474.)

Ich will meine Methode von diesen einschränkenden Bedingungen unabhängig machen und will daher nur für endliche $z$ die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$F(z) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} A_{2j}\,J_{2j}(z) \qquad (0 \leqq |z| \leqq \bar{z})$$

zugrunde legen, welche für jede beliebige grade, also der Identität

$$F(z) \equiv F(-z)$$

genügende Funktion $F(z)$ bewiesen werden kann, die in dem Kreisgebiete

$$0 \leqq |z| \leqq \bar{z}$$

regulär ist.

Wir müssen dann natürlich auf die obige einfache Integraldarstellung der Koeffizienten $A_{2j}$ verzichten und können für diese Koeffizienten zunächst nur den von C. Neumann gefundenen Ausdruck angeben[2]):

$$(21) \qquad A_{2j} = \frac{1}{2\pi i} \int F(z)\,O_{2j}(z)\,dz \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

[2]) Man vgl. Graf-Gubler, Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen, Bern 1898/1900, II, S. 11 und S. 15; man vgl. dort auch die frühere Literatur über die Funktionen $O(z)$.

wobei in der komplexen $z$-Ebene über den Kreis mit dem Radius $\bar{z}$ zu integrieren ist und die $O_{2j}(z)$ die folgenden Funktionen bedeuten:

$$(22) \qquad O_{2j}(z) = \frac{1}{z}\left\{1 + \frac{4j^2}{z^2} + \frac{4^2 j^2 (j^2-1)^2}{z^4} + \frac{4^3 j^2 (j^2-1)(j^2-4)}{z^6} + \ldots\right\}$$
$$(j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die $O_{2j}(z)$ sind Polynome von $\frac{1}{z}$; wir können nach dem Cauchyschen Residuensatz für die $A_{2j}$ also die folgenden Werte hinschreiben:

$$(23) \qquad A_{2j} = \frac{4j^2}{2!} F''(0) + \frac{4^2 j^2 (j^2-1)}{4!} F^{\mathrm{IV}}(0) + \ldots .$$

Wir können nach dieser Formel zwar z. B. leicht

$$(24) \qquad A_2 = 2 F''(0)$$

auch für die für uns in Betracht kommende Funktion

$$(25) \qquad F(z) = \frac{i z^2}{\sqrt{z^2 - y^2}} f(\sqrt{z^2 - y^2}) = \frac{i z^2}{\sqrt{z^2 - y^2}} e^{i\sqrt{z^2-y^2}} \varphi'\left(t + i\frac{\sqrt{z^2-y^2}}{\varrho}\right),$$

die in dem Kreise

$$0 \leqq |z| \leqq y$$

eindeutig und regulär ist, wenn die Anfangsfunktion $\varphi(z)$ in einem genügend großen Kreise eindeutig und regulär vorausgesetzt wird, berechnen:

$$(26) \qquad A_2 = \frac{4}{y} f(iy) = \frac{4}{y} e^{-y} \varphi'\left(t - \frac{y}{\varrho}\right) = \frac{4v}{\varrho x} e^{-\frac{\varrho x}{v}} \varphi'\left(t - \frac{x}{v}\right), \qquad (y > 0),$$

aber auf diese Weise führt doch die Formel (23) für weitere

$$A_4, A_6, \ldots$$

nur durch umständliche Rechnungen zu den gewünschten Resultaten.

Es ist daher von Interesse, daß man mit Hilfe gewisser rekurrenter Eigenschaften der Funktionen $O_{2j}(z)$ eine Formel ableiten kann, welche gestattet, in einfacher Weise

$$A_4, A_6, \ldots$$

aus $A_2$ abzuleiten.

Die geraden

$$(27^a) \qquad O_{2j}(z) = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{4j^2}{z^2} + \frac{4^2 j^2 (j^2-1)}{z^4} + \frac{4^3 j^2 (j^2-1)(j^2-4)}{z^6} + \ldots\right)$$
$$(j = 0, 1, 2, \ldots)$$

erfüllen mit den ungeraden[3])

[3]) Graf-Gubler, S. 11.

$$O_{2j+1}(z) = \frac{2j+1}{z^2}\Big(1 + \frac{4j(j+1)}{z^2} + \frac{4^2(j-1)j(j+1)(j+2)}{z^4}$$

$$(27^b) \qquad + \frac{4^3(j-2)(j-1)j(j+1)(j+2)(j+3)}{z^6} + \ldots\Big)$$

$$(j = 0, 1, 2, \ldots)$$

die Gleichungen[4]):

$$(28) \qquad O_{2j+2}(z) - O_{2j}(z) = -z\frac{dO_{2j+1}(z)}{dz} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

daher ist, wenn wir noch

$$(29) \qquad A_0 = \frac{1}{2\pi i}\int F(z)\,O_0(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int F(z)\frac{dz}{z} = 0$$

definieren:

$$A_{2j+2} - A_{2j} = -\frac{1}{\pi i}\int F(z)\frac{dO_{2j+1}(z)}{dz}\,dz = \frac{1}{\pi i}\int \frac{\partial F(z)}{\partial z}\,O_{2j+1}(z)\,dz$$

$$(j = 0, 1, 2, \ldots),$$

und mit Rücksicht darauf, daß für

$$F(z) = \frac{iz^2}{\sqrt{z^2 - y^2}}\,f(\sqrt{z^2 - y^2})$$

die Beziehung besteht:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2F}{z} - \frac{z}{y}\frac{\partial F}{\partial y},$$

auch:

$$A_{2j+2} - A_{2j} = \frac{2}{\pi i}\int F(z)\frac{O_{2j+1}(z)}{z}\,dz - \frac{1}{\pi i}\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\int z\,F(z)\,O_{2j+1}(z)\,dz$$

$$(j = 0, 1, 2, \ldots),$$

und wenn wir

$$(30) \qquad B_{2j+1} = \frac{1}{2\pi i}\int z\,F(z)\,O_{2j+1}(z)\,dz$$

setzen, ferner die rekurrenten Eigenschaften der $O_k(z)$[5])

$$(31) \qquad \frac{O_{2j+1}(z)}{z} = \frac{O_{2j+2}(z)}{4(j+1)} + \frac{O_{2j}(z)}{4j} - \frac{2j+1}{4j(j+1)}\frac{1}{z} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

berücksichtigen:

$$A_{2j+1} - A_{2j} = \frac{A_{2j+2}}{j+1} + \frac{A_{2j}}{j} - \frac{2}{y}\frac{\partial B_{2j+1}}{\partial y},$$

oder:

$$(32) \qquad \frac{j}{j+1}A_{2j+2} - \frac{j+1}{j}A_{2j} = -\frac{2}{y}\frac{\partial B_{2j+1}}{\partial y} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Andererseits folgt aus den rekurrenten Eigenschaften der $O_k(z)$[5]):

$$(33) \qquad (2j-1)\,O_{2j+1}(z) + (2j+1)\,O_{2j-1}(z) = \frac{2(4j^2-1)}{z}\,O_{2j}(z)$$

$$(j = 1, 2, \ldots)$$

---

[4]) Graf-Gubler, S. 33, Formel (3).

[5]) Graf-Gubler, S. 33, Formel (4).

leicht:

$$(34) \qquad (2j-1)B_{2j+1}+(2j+1)B_{2j-1}=2(4j^2-1)A_{2j} \qquad (j=1,2,\ldots),$$

und wir wollen die beiden Relationen (32) und (34) als einen besonderen Satz aussprechen:

III. *Die Koeffizienten*

$$(35^a) \qquad A_{2j}=\frac{1}{2\pi i}\int F(z)\,O_{2j}(z)\,dz \qquad (j=0,1,2,\ldots)$$

*und*

$$(35^b) \qquad B_{2j+1}=\frac{1}{2\pi i}\int z\,F(z)\,O_{2j+1}(z)\,dz \qquad (j=0,1,2,\ldots)$$

*genügen den beiden rekurrenten Relationen:*

$$(36) \qquad \frac{j}{j+1}A_{2j+2}-\frac{j+1}{j}A_{2j}=-\frac{2}{y}\frac{\partial B_{2j+1}}{\partial y} \qquad (j=0,1,2,\ldots),$$

$$(2j-1)B_{2j+1}+(2j+1)B_{2j-1}=2(4j^2-1)A_{2j} \qquad (j=1,2,\ldots).$$

Wir können schließlich durch Elimination der $B_{2j+1}$ eine rekurrente Formel für die $A_{2j}$ allein gewinnen. Wir differenzieren hierzu die zweite Relation nach $y$ und erhalten unter Beachtung der ersten:

$$(2j-1)\left(\frac{j}{j+1}A_{2j+2}-\frac{j+1}{j}A_{2j}\right)+(2j+1)\left(\frac{j-1}{j}A_{2j}-\frac{j}{j-1}A_{2j-2}\right)$$
$$=-\frac{4}{y}(4j^2-1)\frac{\partial A_{2j}}{\partial y} \qquad (j=1,2,\ldots),$$

oder:

$$(37) \qquad \frac{j(2j-1)}{j+1}A_{2j+2}=2A_{2j}+\frac{j(2j+1)}{j-1}A_{2j-2}-\frac{4}{y}(4j^2-1)\frac{\partial A_{2j}}{\partial y}$$
$$(j=1,2,\ldots).$$

Wir erhalten daher den

Zusatz zu III. *Die Koeffizienten*

$$A_{2j}=\frac{1}{2\pi i}\int F(z)\,O_{2j}(z)\,dz \qquad (j=0,1,2,\ldots)$$

*erfüllen die rekurrenten Gleichungen:*

$$(38) \qquad A_{2j+2}=-\frac{4}{y}\frac{(2j+1)(j+1)}{j}\frac{\partial A_{2j}}{\partial y}+\frac{2(j+1)}{j(2j-1)}A_{2j}+\frac{(2j+1)(j+1)}{(2j-1)(j-1)}A_{2j-2}$$
$$(j=1,2,\ldots),$$

*aus denen mit*

$$(39) \qquad A_0=0$$

*und*

$$(40) \qquad A_2=\frac{4}{y}e^{-y}\varphi'\left(t-\frac{y}{\varrho}\right)$$

*alle $A_{2j}$ rekurrent zu berechnen sind.*

§ 3.

Wir erhalten somit das folgende Endresultat:

IV. *Die Lösung der Telegraphengleichung kann, falls die Funktion $\varphi(z)$ in einem genügend großen Kreise in der $z$-Ebene eindeutig und regulär ist, in der folgenden Weise dargestellt werden:*

$$J = 0, \qquad (x \geqq v t),$$

$$J = -iCv\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v^2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_{2j}}{2j^2} \left\{ J_0\left(i\varrho\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v^2}}\right) J'_{2j}\left(i\varrho\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v^2}}\right) \right. \tag{41}$$

$$\left. - J'_0\left(i\varrho\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v^2}}\right) J_{2j}\left(i\varrho\sqrt{t^2 - \frac{x^2}{v^2}}\right) \right\} \qquad (x \leqq v t).$$

*Dabei berechnen sich die Koeffizienten $A_{2j}$ der Reihe rekurrent mit Hilfe der Formel:*

$$A_{2j+2} = -\frac{4v^2}{\varrho^2 x} \frac{(2j+1)(j+1)}{j} \frac{\partial A_{2j}}{\partial x} + \frac{2(j+1)}{j(2j-1)} A_{2j} + \frac{(2j+1)(j+1)}{(2j-1)(j-1)} A_{2j-2} \tag{42}$$

$$(j = 1, 2, \ldots)$$

*mit*

$$A_0 = 0, \qquad A_2 = \frac{4v}{\varrho x} e^{-\frac{\varrho x}{v}} \varphi'\left(t - \frac{x}{v}\right). \tag{43}$$

(Eingegangen am 19. September 1931.)

# Zur Theorie des Unitätsproblems für Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Von

T. Ważewski in Kraków.

---

Im System der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dy_\nu}{dx} = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

sollen die rechten Seiten als bloß stetige Funktionen vorausgesetzt werden, und zwar im Bereiche $a \leqq x \leqq b$, $y_\nu$ beliebig. Sei ferner $M = (a, m_1, \ldots, m_n)$ ein gegebener Punkt der Hyperebene $\Pi_a$ $(x = a)$. Den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bildet der Zusammenhang zwischen gewissen Eigenschaften der Lösungen, die durch den Punkt $M$ hindurchgehen und den Eigenschaften der Lösungen, die durch *von M verschiedene* Punkte $Q$ derselben Hyperebene $\Pi_a$ gehen.

Es erweist sich dabei als nicht notwendig, alle solchen Punkte $Q$ in Betracht zu ziehen, sondern nur gewisse von ihnen, z. B. die Punkte $Q$, die auf den (auf $\Pi_a$ liegenden) Hypersphären $S_\lambda$

$$\sum_{\nu/1}^{n} (y_\nu - m_\nu)^2 = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad x = a \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

gelegen sind. Die Kenntnis der sog. Schwankung (§ 1, 2) der Scharen von Integralkurven, die von $S_\lambda$ ausgehen, ermöglicht bereits die Abschätzung einer solchen Schwankung für die Familie der von $M$ ausgehenden Integrale (§ 2, Satz 2 und 3).

Daraus leiten wir eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ab, daß durch den Punkt $M$ nur eine einzige Integralkurve hindurchgeht (§ 2, Satz 4 und 4a). Gelegentlich wird ein Bereich angegeben, aus welchem keine von $M$ ausgehende Integralkurve austreten kann (§ 2, Bemerkung 1).

Um Mißverständnisse zu vermeiden, werden am Anfange einige Begriffe vorausgeschickt, die sich auf $n$-dimensionale Räume beziehen (§ 1).

In § 2 beschränken wir uns auf den Fall von zwei Gleichungen, da sich alle Resultate ohne weiteres auf Systeme von $n$ Differentialgleichungen übertragen lassen[1]).

Den Anlaß zu der vorliegenden Arbeit hat mir ein Satz gegeben, den ich im Buche von Herrn Kamke[2]) gefunden habe.

## § 1.

1. Sei $\Pi$ eine gegebene $(n-1)$-dimensionale Hyperebene eines $n$-dimensionalen euklidischen Raumes und $S$ eine auf $\Pi$ liegende beschränkte Punktmenge.

*Außerhalb von $S$ liegende Punkte* (in bezug auf $\Pi$) wollen wir diejenigen Punkte von $\Pi$ nennen, die mit $\infty$ durch eine stetige Kurve verbindbar sind, wobei die verbindende Kurve keine Punkte der Menge $S$ enthält und auf $\Pi$ liegt. Alle anderen Punkte der Menge $\Pi - S$ werden *innerhalb von $S$ liegend* genannt.

1a. Es ist klar, daß von zwei Punkten der Hyperebene $\Pi$, deren Abstand größer als der Durchmesser von $S$ ist, wenigstens einer außerhalb von $S$ liegen muß. Es ist auch klar, daß jede auf $\Pi$ liegende stetige Kurve, die einen innerhalb und einen anderen außerhalb von $S$ liegenden Punkt enthält, notwendig die Menge $S$ treffen muß.

2. Unter dem *Abstand zweier Kurven*

$$y_\nu = \varphi_\nu(x), \quad y_\nu = \psi_\nu(x) \qquad (a \leqq x \leqq b, \nu = 1, \ldots, n)$$

des $(n+1)$-dimensionalen Raumes der Punkte $(x, y_1, \ldots, y_n)$ verstehen wir (anders als sonst üblich) im folgenden die genaue obere Grenze der Funktion

$$\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n} (\psi_\nu(x) - \varphi_\nu(x))^2}$$

im Intervalle $[a, b]$.

*Schwankung* (oder Oszillation) Osz.$(F)$ *einer gegebenen Familie $F$ solcher Kurven* nennen wir die genaue obere Grenze ihrer gegenseitigen Abstände.

2a. Wir bezeichnen mit $Z_t$ den Inbegriff der Punkte, in welchen die Kurven der Familie $F$ durch die Hyperebene $x = t$ geschnitten werden; sei ferner $d(t)$ der Durchmesser der Menge $Z_t$. Es gilt die Relation Osz.$(F)$ = genaue obere Grenze von $d(t)$ für $a \leqq t \leqq b$.

---

[1]) Die wesentlichsten Sätze dieser Arbeit bildeten den Gegenstand meines Referates auf dem zweiten Kongresse der polnischen Mathematiker (Wilno, September 1931).

[2]) E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen (1930), S. 145, Satz 1.

3. *Die Röhre $H(S)$.* Durch jeden Punkt einer Menge $S$ soll wenigstens ein Integral eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen hindurchgehen. Die Gesamtmenge aller Punkte derjenigen Integralkurven, die die Menge $S$ treffen, nennen wir kurz die Röhre $H(S)$.

## § 2.

*Die Voraussetzungen V.* Die Funktionen $f$ und $g$ in den Gleichungen

$$\text{E:} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} = g(x, y, z) \end{cases}$$

sollen als stetig vorausgesetzt werden, und zwar in dem Zylindergebiete

$$(1) \quad \left.\begin{array}{l} (y-c)^2 + (z-d)^2 \leqq R^2 \\ a \leqq x \leqq b \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{wo } R > 0 \text{ und} \\ -\infty < a < b < +\infty. \end{array}$$

Wir bezeichnen mit $\Pi_t$ die Ebene $x = t$ und setzen voraus, daß $S$ eine *abgeschlossene* Menge der Ebene $\Pi_a$ ist.

Wir setzen weiter voraus, daß alle Integralkurven des Systems $E$, die von den Punkten von $S$ ausgehen, bis zu der Ebene $\Pi_b$ gelangen und aus dem Zylindergebiete

$$(2) \qquad (y-c)^2 + (z-d)^2 < R^2, \qquad a \leqq x \leqq b$$

nicht hinaustreten.

Es soll bemerkt werden, daß in unserem Falle die Menge $S$ sowie die Röhre $H(S)$ gänzlich in dem Zylinder (2) liegen, also die Zylinderfläche

$$(3) \qquad (y-c)^2 + (z-d)^2 = R^2, \qquad a \leqq x \leqq b$$

nicht treffen. Die Menge $S$ liegt folglich innerhalb des Kreises

$$(y-c)^2 + (z-d)^2 = R^2, \qquad x = a.$$

Es ist klar, daß, wenn $S$ innerhalb dieses Kreises liegt, die Röhre $H(S)$ sich im Zylinder (2) befindet, sobald die Differenz $b - a$ genügend klein gewählt wurde.

Hilfssatz. Wir nehmen an, daß die Voraussetzungen $V$ erfüllt sind, und bezeichnen mit $Z$ den Durchschnitt von $H(S)$ und $\Pi_b$. Wir behaupten dann, daß die Röhre $H(S)$ von der Kurve $L$ geschnitten werden muß, wenn diese folgenden Bedingungen genügt:

I. sie ist in der Schicht

$$(C) \qquad a \leqq x \leqq b; \qquad y, z \text{ beliebig}$$

enthalten,

II. sie geht von einem Punkte $M$ der Ebene $\Pi_a$ aus, der innerhalb von $S$ liegt (siehe § 1, 1),

III. sie trifft die Ebene $\Pi_b$ in einem Punkte $N$, der außerhalb von $Z$ liegt.

Beweis. Zunächst untersuchen wir den speziellen Fall, wo $f$ und $g$ in der ganzen Schicht $(C)$ stetig und beschränkt sind und außerdem der Lipschitzschen Bedingung genügen. Zwecks Vereinfachung des Beweises schicken wir einige Bemerkungen voraus.

1. Bekanntlich geht durch jeden beliebigen Punkt $(x^*, y^*, z^*)$ der Schicht $(C)$ genau eine Integralkurve

$$y(x, x^*, y^*, z^*), \quad z(x, x^*, y^*, z^*) \tag{4}$$

des Systems $E$. Diese Integralkurve ist im ganzen Intervall $[a, b]$ vorhanden.

2. Die Funktionen (4) sind in jedem Punkte des Bereiches

$$a \leqq x \leqq b, \quad a \leqq x^* \leqq b; \quad y^* \text{ und } z^* \text{ beliebig} \tag{5}$$

stetig.

3. Im Bereiche (5) gelten die Ungleichungen

$$|y(x, x^*, y^*, z^*) - y^*| \leqq m(b-a); \quad |z(x, x^*, y^*, z^*) - z^*| \leqq m(b-a),$$

wo $m$ die genaue obere Grenze von $\sqrt{f^2+g^2}$ in der Schicht $(C)$ bedeutet.

4. Der Punkt $(x^*, y^*, z^*)$ der Schicht $(C)$ gehört dann und nur dann der Röhre $H(S)$ an, wenn der Punkt

$$a, \quad y(a, x^*, y^*, z^*), \quad z(a, x^*, y^*, z^*)$$

der Menge $S$ angehört (siehe § 1, 3, Definition von $H(S)$).

5. Seien

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \qquad (\alpha \leqq t \leqq \beta)$$

die Gleichungen der stetigen Kurve $L$, wo

$$M = (\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha)),$$
$$N = (\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta)) = (x_N, y_N, z_N).$$

Um zu beweisen, daß die Kurve $L$ die Röhre $H(S)$ schneidet, genügt es (auf Grund von 4.) zu beweisen, daß die auf $\Pi_a$ liegende Kurve $L_1$

$$x = a, \quad y = y(a, \varphi(t), \psi(t), \chi(t)), \quad z = z(a, \varphi(t), \psi(t), \chi(t))$$

die Menge $S$ treffen muß.

Die Kurve $L_1$ ist stetig (siehe 2.) und verbindet den Punkt $M$ mit dem Punkte

$$N_1 = (a, y(a, x_N, y_N, z_N), z(a, x_N, y_N, z_N)).$$

Der Punkt $M$ liegt innerhalb von $S$. Wenn es uns also zu beweisen gelingt, daß $N_1$ außerhalb von $S$ liegt, so folgt sofort daraus, daß $L_1$ die Menge $S$ durchschneidet (siehe § 1, 1a).

Nun ist $N$ der Voraussetzung gemäß ein außerhalb von $Z$ liegender Punkt. Es gibt also auf der Ebene $\Pi_b$ eine stetige Kurve

$$x = b, \quad y = \lambda(v), \quad z = \mu(v) \qquad (\gamma \leqq v < +\infty),$$

die durch den Punkt $N$ (für $v = \gamma$) geht, zugleich für $v \to +\infty$ gegen $\infty$ konvergiert und keinen Punkt von $Z$ (also auch keinen Punkt von $H(S)$) enthält. Die Kurve

$$x = a, \quad y = y(a, b, \lambda(v), \mu(v)), \quad z = z(a, b, \lambda(v), \mu(v))$$

trifft also (nach 4.) $S$ nicht, ist stetig und konvergiert auf Grund von 3. gegen $\infty$, wenn $v \to +\infty$. Der Punkt $N_1$ liegt also außerhalb von $S$, was allein noch zu beweisen blieb.

Wir gehen jetzt zum Beweise des Hilfssatzes im allgemeinen Falle über.

6. Ist eine beliebige Funktion $\omega(x, y, z)$ im Zylinder (1) gegeben, so bezeichnen wir mit $\bar{\omega}(x, y, z)$ die Funktion, die im Zylinder (1) mit $\omega$ übereinstimmt und für die übrigen Punkte der Schicht $(C)$ durch die Formel

$$\bar{\omega}(x, y, z) = \omega\left(x, R\frac{y-c}{\varrho}, R\frac{z-d}{\varrho}\right)$$

definiert ist, wobei

$$a \leqq x \leqq b, \qquad \varrho = \sqrt{(y-c)^2 + (z-d)^2} > R.$$

Es ist leicht zu ersehen, daß die Funktion $\bar{\omega}$, sobald die Funktion $\omega$ im Zylinder (1) stetig ist oder die Lipschitzsche Bedingung erfüllt, dieselben Eigenschaften auch in der ganzen Schicht $(C)$ besitzt und außerdem dort beschränkt ist.

Konvergieren $\omega_\nu(x, y, z)$ gleichmäßig gegen $\omega(x, y, z)$ im Zylinder (1), so konvergieren die entsprechenden $\bar{\omega}_\nu(x, y, z)$ gleichmäßig gegen $\bar{\omega}(x, y, z)$ in der Schicht $(C)$.

7. Setzen wir nun voraus, daß $f_\nu(x, y, z)$ und $g_\nu(x, y, z)$ Polynome sind, die gegen $f$ resp. $g$ gleichmäßig im Zylinder (1) konvergieren, und betrachten wir das neue System

$$\bar{E}: \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \bar{f}(x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dx} = \bar{g}(x, y, z), \end{cases}$$

wo $\bar{f}$ und $\bar{g}$ nach der Regel von 6. aus $f$ und $g$ entsprechend gebildet sind. In analoger Weise bilden wir folgende Systemkette:

$$\bar{E}_\nu: \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \bar{f}_\nu(x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dx} = \bar{g}_\nu(x, y, z). \end{cases}$$

Wir haben natürlich, da die Zylinderfläche (3) keinen Punkt von $H(S)$ enthält,

$$\bar{H}(S) = H(S),$$

wenn $\bar{H}(S)$ die für das System $\bar{E}$ gebildete Röhre bedeutet.

Auf Grund von 6. sind die Funktionen $\bar{f}, \bar{g}, \bar{f}_\nu, \bar{g}_\nu$ in $(C)$ stetig und durch eine gemeinsame Konstante beschränkt, außerdem erfüllen $\bar{f}_\nu$ und $\bar{g}_\nu$ die Lipschitzsche Bedingung[3]) und konvergieren gleichmäßig gegen $\bar{f}$ resp. $\bar{g}$. Daraus ziehen wir folgende Schlüsse:

8. Jede Lösung des Systems $\bar{E}$ resp. $\bar{E}_\nu$, die auf der Ebene $\Pi_a$ beginnt, muß die Ebene $\Pi_b$ treffen.

9. Sei nun

$$J_1^\nu, J_2^\nu, \ldots, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

eine Folge der im Intervalle $[a, b]$ existierenden Integralkurven des Systems $\bar{E}_\nu$ (eventuell des Systems $\bar{E}_0 = \bar{E}$) mit der Eigenschaft, daß das Integral $J_j^\nu$ durch den Punkt $P_j$ geht, wo die Folge der Punkte $P_1, P_2, \ldots$ gegen einen Punkt $P$ konvergiert:

$$P_j \to P.$$

Es existiert dann eine Teilfolge

$$\bar{J}_{\alpha_1}^\nu, \bar{J}_{\alpha_2}^\nu, \ldots,$$

die in $[a, b]$ gleichmäßig gegen eine Integralkurve des Systems $\bar{E}_\nu$ konvergiert[4]); diese Integralkurve muß offenbar durch den Punkt $P$ hindurchgehen.

10. Sind dagegen

$$\bar{J}_1^1, \bar{J}_2^2, \ldots, \bar{J}_\nu^\nu, \ldots \tag{6}$$

Integralkurven der Systeme $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \ldots$, wo wiederum $\bar{J}_\nu^\nu$ durch $P_\nu$ geht und im ganzen Intervalle $[a, b]$ verläuft, so existiert eine Teilfolge von (6), die in $[a, b]$ gleichmäßig gegen eine Integralkurve von $\bar{E}$ durch $P$ konvergiert.

11. Die Röhren $\bar{H}(S)$ und die dem System $\bar{E}_\nu$ entsprechenden $\bar{H}_\nu(S)$ sind abgeschlossene Mengen, was aus der Abgeschlossenheit von $S$ auf Grund von 9. folgt.

12. Gilt für irgendeine abgeschlossene (beschränkte oder unbeschränkte) und in der Schicht $(C)$ liegende Menge $F$ die Relation

$$\bar{H}_{\alpha_\nu}(S) \cdot F \neq 0 \text{ [5])} \quad (\nu = 1, 2, \ldots; \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots),$$

---

[3]) Auf jedes System der Kette $\bar{E}$, kann also der vorher bewiesene spezielle Fall des Hilfssatzes angewandt werden.

[4]) Dies folgt daraus, daß die Folge von Integralen gleichgradig stetig und beschränkt ist.

[5]) $A \cdot B$ bezeichnet die Gesamtheit der Punkte, die gleichzeitig den Mengen $A$ und $B$ angehören. $D = 0$ bzw. $D \neq 0$ bedeutet, daß die Menge $D$ keinen bzw. wenigstens einen Punkt enthält.

so gilt auch

$$\overline{H}(S)\cdot F \neq 0,$$

was unmittelbar aus 10. folgt. Wenn wir also die Voraussetzung über $F$ festhalten, so erhalten wir folgendes:

13. Ist

$$\overline{H}(S)\cdot F = 0,$$

so existiert ein Index $\nu_0$, so daß

$$\overline{H}_\nu(S)\cdot F = 0 \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu_0. \tag{7}$$

14. Nach diesen Vorbemerkungen können wir den Beweis kurz formulieren. Der Punkt $N$ (siehe die Voraussetzungen $V$ des Hilfssatzes) liegt außerhalb von $Z$. Wir verbinden ihn mit $\infty$ vermittels einer stetigen Kurve $F$ (sie bildet eine abgeschlossene Menge), die auf $\Pi_b$ liegt und $Z$ nicht trifft. Es wird dann $F\cdot\bar{H}(S) = 0$ sein, und folglich besteht auf Grund von 13. auch die Relation (7) von einem gewissen Index $\nu_0$ angefangen. Im besonderen ist

$$F\cdot Z^\nu = 0, \tag{8}$$

wo $Z^\nu$ den Durchschnitt der Röhre $\overline{H}_\nu(S)$ mit der Ebene $\Pi_b$ bezeichnet. Die Relation (8) bedeutet aber, daß $N$ außerhalb von $Z^\nu$ $(\nu \geqq \nu_0)$ liegt. Wird jetzt der vorher betrachtete spezielle Fall des Hilfssatzes auf das System $\overline{E}_\nu$ $(\nu \geqq \nu_0)$ und die Kurve $L$ angewandt, so erhalten wir

$$\overline{H}_\nu(S)\cdot L \neq 0 \qquad (\nu \geqq \nu_0)$$

und daraus infolge von 12.

$$\overline{H}(S)\cdot L \neq 0,$$

w. z. b. w.

Satz 1. *Die Voraussetzungen $V$ wollen wir weiter aufrechterhalten. Mit $Z_x$ bezeichnen wir den Durchschnitt der Röhre $H(S)$ mit der Ebene $\Pi_x$. $J$ sei endlich eine Integralkurve des Systems $E$, die von einem innerhalb von $S$ liegenden Punkt $M$ ausgeht. Dann gilt folgendes:*

1. *Die Kurve $J$ kann die Ebene $\Pi_x$ $(a \leqq x \leqq b)$ nicht in einem Punkte schneiden, der außerhalb von $Z_x$ liegt.*

2. *Das Integral $J$ kann bis zu der Ebene $x = b$ fortgesetzt werden.*

Beweis. Für den indirekten Beweis setzen wir voraus, daß die Eigenschaft 1 für die Ebene $\Pi_{x_1}$ nicht zutrifft. Das Integral $J$ schneidet also die Ebene $\Pi_{x_1}$ in einem Punkte $U$, der außerhalb von $Z_{x_1}$ liegt und der folglich der Röhre $H(S)$ nicht angehört. Auf Grund des vorigen Hilfssatzes trifft $J$ die Röhre in einem Punkte $T = (x_2, y_2, z_2)$; $(a < x_2 < x_1)$. Durch den Punkt $T$ geht sicher auf Grund der Definition der Röhre eine der Integralkurven — bezeichnen wir sie mit $\mathfrak{J}$ —, die von einem Punkte $W$

der Menge $S$ ausgeht. Der Teilbogen $(W, T)$ des Integrals $\mathfrak{J}$ zusammen mit dem Teilbogen $(T, U)$ des Integrals $J$ bildet ein Integral, das auf $S$ beginnt und dessen Endpunkt $U$ der Röhre $H(S)$ nicht angehört, was im Widerspruch mit der Definition von $H(S)$ (§ 1, 3) steht.

Wir wenden uns jetzt zu der Eigenschaft 2. Das Integral $J$ kann jedenfalls bis zu der Grenze des Zylinders (1) fortgesetzt werden[6]). Da das Integral $J$ auf Grund der Eigenschaft 1 die Zylinderfläche (3) nicht treffen kann, so muß es sich bis zu einem Punkte der Ebene $\Pi_b$ erstrecken.

Bemerkung 1. Betrachten wir (siehe Satz 1) die Menge

$$Z_x + \text{das Innere von } Z_x. \tag{9}$$

Durchläuft $x$ das Intervall $[a, b]$, so beschreibt (9) eine dreidimensionale Menge $K$. In dieser Menge muß jedes Integral des Systems $E$ enthalten sein, das von einem innerhalb von $S$ liegenden Punkte ausgeht[7]).

Satz 2. *Die Voraussetzungen $V$ halten wir aufrecht und setzen noch voraus, daß $A$*[8]) *eine Menge bedeutet, welcher lauter innerhalb von $S$ liegende Punkte angehören. Wir behaupten dann, daß die Schwankung* (siehe § 1, 2) *der Familie von Integralen, aus welchen die Röhre $H(S)$ besteht, höchstens der Schwankung der Familie der Integrale der Röhre $H(S)$ gleich ist*:

$$\text{Osz. } H(A) \leqq \text{Osz. } H(S).$$

Beweis. Wir nehmen an, daß die obige Ungleichung nicht stattfinde. Wir hätten dann zwei Integralkurven $J_1$ und $J_2$, die beide auf $A$ beginnen und für welche die folgende Relation

$$\text{Abstand } (J_1, J_2) > \text{Osz. } H(S)$$

bestehen müßte.

Daraus folgt die Existenz einer Ebene $\Pi_c$ $(a < c \leqq b)$, die von $J_1$ und $J_2$ entsprechend in den Punkten $B_1$, $B_2$ geschnitten wird, mit der Eigenschaft (§ 1, 2, und 2a):

$$\text{Abstand } (B_1, B_2) = \text{Abstand } (J_1, J_2) > \text{Osz. } H(S) \geqq \text{Durchmesser von } Z_c.$$

Einer von diesen Punkten $B_1$, $B_2$ müßte also außerhalb von $Z_c$ (§ 1, 2a) liegen, was dem Satze 1 widerspricht.

Voraussetzungen $V_1$. Die Voraussetzungen $V$ aufrechterhaltend, nehmen wir noch an, daß der Punkt $M$ innerhalb von $S$ liegt. Wir nehmen weiter an, daß

$$S_1, S_2, \ldots$$

---

[6]) E. Kamke, loc. cit. S. 135, Satz 1 und 2.

[7]) $K$ ist in der Röhre $H(S + \text{das Innere von } S)$ enthalten, aber muß nicht mit dieser Röhre identisch sein.

[8]) $A$ kann sich zu einem einzigen Punkt reduzieren.

eine Folge von abgeschlossenen und innerhalb von $S$ liegenden Mengen ist. Wir setzen endlich voraus, daß $M$ innerhalb von jeder Menge $S_\nu$ liegt und daß der

$$\text{Durchmesser von } S_\nu \to 0.$$

Satz 3. *Unter den Voraussetzungen $V_1$ haben wir*

$$\lim_{\nu\to\infty} \text{Osz. } H(S_\nu) = \text{Osz. } H(M).$$

Beweis. Auf Grund des Satzes 2 haben wir

$$\text{Osz. } H(M) \leqq \text{Osz. } H(S_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Es genügt also zu zeigen, daß

$$\limsup \text{Osz. } H(S_\nu) \leqq \text{Osz. } H(M)$$

ist. Im entgegengesetzten Falle würden ein $\varepsilon > 0$ und zwei Folgen von Integralkurven $J_{\alpha_\nu}$, $\mathfrak{J}_{\alpha_\nu}$ $(\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots)$ des Systems $E$ existieren, welche auf $H(S_{\alpha_\nu})$ liegen und zugleich von der Beschaffenheit sind, daß

$$\text{Abstand } (J_{\alpha_\nu}, \mathfrak{J}_{\alpha_\nu}) > \text{Osz. } H(M) + \varepsilon$$

sein würde. Für entsprechend gewählte Teilfolgen $J_{\beta_\nu}$, $\mathfrak{J}_{\beta_\nu}$ von $J_{\alpha_\nu}$ und $\mathfrak{J}_{\alpha_\nu}$ hätten wir dann (siehe den Beweis des Hilfssatzes, insbesondere 9.):

$$J_{\beta_\nu} \to J, \quad \mathfrak{J}_{\beta_\nu} \to \mathfrak{J},$$

wobei $J$ und $\mathfrak{J}$ durch $M$ (der Durchmesser von $S_\nu$ strebt gegen 0) hindurchgehen. Folglich würde für die auf $H(M)$ liegenden Integralkurven $J$ und $\mathfrak{J}$ die Relation

$$\text{Abstand } (J, \mathfrak{J}) \geqq \text{Osz. } H(M) + \varepsilon$$

bestehen, was unmöglich ist.

Satz 4. *Unter den Voraussetzungen $V_1$ bildet die Relation*

$$\lim_{\nu\to\infty} \text{Osz. } H(S_\nu) = 0 \tag{10}$$

*die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß durch den Punkt $M$ genau eine Integralkurve der Gleichung $E$ hindurchgeht.*

Beweis. Für die behauptete Eindeutigkeit ist natürlich die Relation

$$\text{Osz. } H(M) = 0$$

notwendig und hinreichend. Die letzte Relation ist aber auf Grund des Satzes 3 äquivalent der Relation (10).

Wenn wir jetzt wieder die Bemerkung 9 aus dem Beweise des Hilfssatzes ausnützen, so können wir den vorigen Satz noch in eine andere Gestalt bringen:

Satz 4a. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß durch den Punkt $M$ genau eine in $[a, b]$ existierende Integralkurve hindurchgeht,*

*besteht unter der Voraussetzung $V_1$ darin, daß jede Folge von Integralkurven $J_1, J_2, \ldots$, die entsprechend auf den Mengen $S_1, S_2, \ldots$ beginnen, im Intervalle $[a, b]$ konvergiert.*

Bemerkung 2. Die Sätze dieses Paragraphen lassen sich ohne Schwierigkeit auf Systeme von $n$ ($n \geqq 2$) Differentialgleichungen mit stetigen rechten Seiten übertragen. Die Hyperebene $\Pi_a$ kann durch eine transversale Hyperfläche ersetzt werden, in der kein Vektor des Vektorfeldes des Gleichungssystems liegt (d. h. die Integralkurven sollen keinen Kontakt mit dieser Hyperfläche haben).

Die Resultate der vorliegenden Arbeit sowie die Beweismethode behalten ihre Gültigkeit auch für eine einzige Gleichung ($n = 1$). Die Mengen $S$ und $S_\nu$ (siehe die Voraussetzungen $V$ und $V_1$) müssen dann wenigstens zwei Punkte enthalten: einen unten und einen anderen über dem Punkte $M$, wobei beide auf der Geraden $\Pi_a$ liegen.

Für $n = 1$ führt schneller zum Ziele die Methode, die auf dem Begriffe des Maximal- und Minimalintegrals beruht.

(Eingegangen am 5. November 1931.)

# Eine Abschätzung für die untere Grenze der absoluten Beträge der durch eine reelle oder imaginäre binäre quadratische Form darstellbaren Zahlen.

Von

Oskar Perron in München.

## § 1.

### Formulierung der Resultate.

Sei $ax^2+bxy+cy^2$ eine quadratische Form mit beliebigen reellen Koeffizienten, jedoch $b^2-4ac>0$, die Form also indefinit. Wenn $(x, y)$ alle Paare von ganzen rationalen Zahlen mit Ausnahme des Paares $(0, 0)$ durchläuft, so durchläuft die Form eine abzählbare Menge von reellen Zahlen, und man kann nach der unteren Grenze der absoluten Beträge dieser Zahlen fragen. Eine Abschätzung dieser unteren Grenze ist in dem folgenden von Korkine, Zolotareff und Markoff bewiesenen Satz[1]) enthalten:

Satz 1. *Sind $a, b, c$ reelle Zahlen, $b^2-4ac>0$, so gibt es unendlich viele Paare von ganzen rationalen Zahlen $x, y$, für welche*

$$|ax^2+bxy+cy^2| \leqq \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{5}}$$

*ist. Dabei gilt sogar für unendlich viele Paare das Kleinerzeichen, wenn man von den Formen absieht, die sich durch eine lineare Transformation mit ganzen rationalen Koeffizienten und der Determinante 1 in*

$$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{5}}(x^2+xy-y^2)$$

*transformieren lassen. Bei diesen gilt für kein einziges von $(0, 0)$ verschiedenes Paar $(x, y)$ das Kleinerzeichen.*

[1]) Vgl. A. Markoff, Sur les formes quadratiques binaires indéfinies, Math. Annalen **15** (1879), S. 381—406.

Für diesen Satz gebe ich im folgenden einen neuen Beweis, mit dem ich den Beweis von zwei neuen Sätzen verbinde. Man kann nämlich versuchen, einen analogen Satz für den Fall aufzustellen, daß die Koeffizienten $a, b, c$ komplexe Zahlen mit nichtverschwindender Diskriminante $b^2 - 4ac$ sind und daß die Variablen $x, y$ alle ganzen Zahlen eines quadratischen Zahlkörpers durchlaufen[2]). Dieses Problem allgemein zu lösen, scheint mir zur Zeit ziemlich hoffnungslos. Ich kann es aber wenigstens für die quadratischen Körper $\mathfrak{K}(i)$ und $\mathfrak{K}(\sqrt{-3})$ lösen, indem ich die folgenden genauen Analoga zu Satz 1 beweise:

Satz 2. *Sind $a, b, c$ komplexe Zahlen, $b^2 - 4ac \neq 0$, so gibt es unendlich viele Paare ganzer Zahlen $x, y$ des Körpers $\mathfrak{K}(i)$, für welche*

$$|ax^2 + bxy + cy^2| \leqq \frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{\sqrt{3}}$$

*ist. Dabei gilt sogar für unendlich viele Paare das Kleinerzeichen, wenn man von den Formen absieht, die sich durch eine lineare Transformation mit ganzen Koeffizienten des Körpers $\mathfrak{K}(i)$ und der Determinante 1 in*

$$\pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{-3}}(x^2 + xy + y^2)$$

*transformieren lassen. Bei diesen gilt für kein einziges von $(0, 0)$ verschiedenes Paar das Kleinerzeichen.*

Dazu ist noch zu bemerken, daß die beiden durch das Vorzeichen $\pm$ unterschiedenen Formen in Wahrheit nur eine Formenklasse darstellen, indem durch die Transformation $x \to iy$, $y \to ix$, deren Determinante gleich 1 ist, die eine Form in die andere übergeht.

Im folgenden bedeutet $\varepsilon$ stets die dritte Einheitswurzel

$$\varepsilon = \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}. \tag{1}$$

Satz 3. *Sind $a, b, c$ komplexe Zahlen, $b^2 - 4ac \neq 0$, so gibt es unendlich viele Paare ganzer Zahlen $x, y$ des Körpers $\mathfrak{K}(\varepsilon)$, für welche*

$$|ax^2 + bxy + cy^2| \leqq \frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{\sqrt[4]{13}}$$

*ist. Dabei gilt sogar für unendlich viele Paare das Kleinerzeichen, wenn man von den Formen absieht, die sich durch eine lineare Transformation*

[2]) Für algebraische Zahlkörper höheren als zweiten Grades ist das Problem gegenstandslos, ebenso für reelle $a, b, c$ und reelle quadratische Zahlkörper. In diesen Fällen kann man nämlich beide Linearfaktoren der quadratischen Form gleichzeitig durch ganze Zahlen des betreffenden Körpers absolut beliebig klein machen; die fragliche untere Grenze ist also bekannt, nämlich 0.

*mit ganzen Koeffizienten des Körpers* $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ *und der Determinante* 1 *auf eine der Formen*

$$\text{(I)} \qquad \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4+\varepsilon}}(x^2+\varepsilon^2 xy-y^2),$$

$$\text{(II)} \qquad \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4+\varepsilon^2}}(x^2+\varepsilon xy-y^2)$$

*transformieren lassen. Bei diesen gilt für kein einziges von* $(0,0)$ *verschiedenes Paar das Kleinerzeichen.*

Dazu ist noch zu bemerken, daß die beiden durch das Vorzeichen $\pm$ unterschiedenen Formen in (I) und ebenso in (II) nur je eine Formenklasse darstellen, indem durch die Transformation $x \to y$, $y \to -x$ die eine Form in die andere übergeht. Dagegen werden durch (I) und (II) zwei verschiedene Formenklassen repräsentiert. Denn wenn

$$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4+\varepsilon}}(x^2+\varepsilon^2 xy-y^2)=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4+\varepsilon^2}}(x'^2+\varepsilon x'y'-y'^2)$$

wäre, so würde sich daraus der Quotient $\frac{\sqrt{4+\varepsilon^2}}{\sqrt{4+\varepsilon}}$ als Zahl des Körpers $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ ergeben, während doch

$$\frac{\sqrt{4+\varepsilon^2}}{\sqrt{4-\varepsilon}}=\frac{4+\varepsilon^2}{\sqrt{4+\varepsilon}\sqrt{4-\varepsilon^2}}=\frac{4+\varepsilon^2}{\sqrt{13}}$$

ist und $\sqrt{13}$ nicht dem Körper $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ angehört.

Die Beweise beruhen auf Hilfssätzen über Cassinische Kurven, die ich kürzlich bei anderer Gelegenheit bewiesen habe [3]).

## § 2.

### Gemeinsamer Unterbau für die Beweise der drei Sätze.

Die Beweise der drei Sätze lassen sich ein Stück weit gemeinsam führen. Dabei verstehen wir unter $\mathfrak{k}$ den Körper $\mathfrak{K}(1)$ oder $\mathfrak{K}(i)$ oder $\mathfrak{K}(\varepsilon)$, je nachdem es sich um Satz 1 oder 2 oder 3 handelt.

Da die drei Sätze unverändert bleiben, wenn man $a, b, c$ mit einem Proportionalitätsfaktor multipliziert, der bei Satz 1 natürlich reell sein muß, dürfen und wollen wir

$$\text{(2)} \qquad b^2-4ac=1$$

---

[3]) Über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers $\mathfrak{K}(i)$. Mathem. Annalen **103** (1930), S. 533—544 und **105** (1931), S. 160—164. Im folgenden zitiert als $A_1$ und $A_2$. — Über einen Approximationssatz von Hurwitz und über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers der dritten Einheitswurzeln. Sitzungsberichte der Bayr. Akademie der Wissenschaften, Math.-naturwiss. Abteilung 1931. Im folgenden zitiert als $A_3$.

annehmen. Für $a = 0$ sind die drei Sätze trivial, weil dann für die unendlich vielen Wertepaare

$$x = \text{beliebige ganze Zahl aus } \mathfrak{k}, \quad y = 0$$

die quadratische Form gleich 0 wird. Wir wollen daher

$$a \neq 0 \tag{3}$$

voraussetzen. Zerlegt man dann die quadratische Form in Linearfaktoren

$$ax^2 + bxy + cy^2 = a(x - \varrho_1 y)(x - \varrho_2 y) \tag{4}$$

und ist wenigstens eine der Zahlen $\varrho_1, \varrho_2$ in $\mathfrak{k}$ enthalten, so sind die Sätze ebenfalls trivial. Denn wenn etwa $\varrho_1 = \frac{p}{q}$ ist, wo $p, q$ ganze Zahlen aus $\mathfrak{k}$ sind, so wird die Form für die unendlich vielen Paare

$$x = pr, \quad y = qr,$$

wo $r$ eine beliebige ganze Zahl aus $\mathfrak{k}$ sein darf, gleich 0. Wir dürften daher voraussetzen, daß $\varrho_1, \varrho_2$ keine Zahlen aus $\mathfrak{k}$ sind. Für unseren Beweis genügt aber schon die eine Hälfte dieser Voraussetzung; *sei also* $\varrho_1$ *keine Zahl aus* $\mathfrak{k}$.

Dann ergibt sich mit Hilfe des Dirichletschen Schubladenverfahrens die Existenz von unendlich vielen Paaren ganzer Zahlen $x, y$ des Körpers $\mathfrak{k}$, für welche die Ungleichung

$$|x - \varrho_1 y| \leqq \frac{\gamma}{|y|} \tag{5}$$

gilt, wobei

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{für } \mathfrak{k} = \mathfrak{R}(1), \\ 2 & \text{für } \mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i), \\ \frac{\sqrt{21}}{2} & \text{für } \mathfrak{k} = \mathfrak{R}(\varepsilon). \end{cases} \tag{6}$$

Das Schubladenverfahren ist oft dargestellt worden und soll hier nicht wiederholt werden. Man findet es mit genau dem angegebenen Ergebnis durchgeführt für $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(1)$ bei Minkowski [4]), für $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(i)$ in der Arbeit $A_1$, für $\mathfrak{k} = \mathfrak{R}(\varepsilon)$ in $A_3$.

Die Zahlen $x, y$ können als relativ prim angenommen werden, da die Ungleichung (5) bei Unterdrückung eines gemeinsamen Teilers bestehen bleibt; das beruht auf den zwei bekannten Umständen, daß in $\mathfrak{k}$ jedes Ideal ein Hauptideal und daß der absolute Betrag einer von 0 verschiedenen ganzen Zahl aus $\mathfrak{k}$ mindestens gleich 1 ist. Ferner können die Zahlen $y$ nicht beschränkt sein, weil sonst die Zahlen $x$ nach (5) ebenfalls beschränkt

[4]) H. Minkowski, Diophantische Approximationen, Leipzig 1907, § 2.

wären, während es doch unendlich viele Paare $(x, y)$ sind. Unter den Zahlen $|y|$ gibt es also auch beliebig große. Nun ist

$$(7) \qquad \varrho_1 - \varrho_2 = \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a} = \pm \frac{1}{a}.$$

Daher

$$|x - \varrho_2 y| = |(\varrho_1 - \varrho_2) y + (x - \varrho_1 y)| \leqq |(\varrho_1 - \varrho_2) y| + |x - \varrho_1 y| \leqq \frac{|y|}{|a|} + \frac{\gamma}{|y|}$$

(wegen (7) und (5)). Durch Multiplikation mit (5) entsteht hieraus:

$$|(x - \varrho_1 y)(x - \varrho_2 y)| \leqq \frac{\gamma}{|a|} + \frac{\gamma^2}{|y|^2}$$

und also wegen (4):

$$|ax^2 + bxy + cy^2| \leqq \gamma + \frac{|a|\gamma^2}{|y|^2} < \gamma + \eta,$$

wo $\eta$ eine beliebig kleine positive Zahl sein darf, da ja $|y|$ beliebig groß angenommen werden kann. Mit Rücksicht auf die angegebenen Werte von $\gamma$ ergibt sich also insbesondere folgendes Zwischenresultat:

*Es gibt unendlich viele Paare ganzer relativ primer Zahlen $x, y$ des Körpers $\mathfrak{k}$, für welche die Ungleichung gilt:*

$$(8) \qquad |ax^2 + bxy + cy^2| < \begin{cases} \sqrt{\frac{81}{80}} & \text{für} \quad \mathfrak{k} = \Re(1), \\ \sqrt{\frac{9}{2}} & \text{für} \quad \mathfrak{k} = \Re(i), \\ \sqrt{\frac{22}{2}} & \text{für} \quad \mathfrak{k} = \Re(\varepsilon). \end{cases}$$

Unabhängig von der Herleitung dieses Resultates erkennt man sofort, daß $y$ für unendlich viele solche Paare von 0 verschieden ist, schon deshalb, weil ja zu $y = 0$ nur die endlich vielen Einheiten aus $\mathfrak{k}$ relativ prim sind. Wir betrachten im folgenden immer nur solche Paare $(x, y)$, für welche $y \neq 0$ ist.

Nun setzen wir, unter $(x, y)$ eines dieser Paare verstehend,

$$(9) \qquad ax^2 + bxy + cy^2 = \delta$$

und wählen zwei ganze Zahlen $x_1, y_1$ aus $\mathfrak{k}$ so, daß

$$(10) \qquad yx_1 - xy_1 = 1$$

ist. Dabei ist $y_1$ nur modulo $y$ bestimmt; eine geeignete Wahl behalten wir uns vor. Offenbar sind auch $x_1, y_1$ relativ prim zueinander. Ferner kann ein und dasselbe Paar $(x_1, y_1)$ nur zu endlich vielen Paaren $(x, y)$ gehören. Denn wenn $(x_1, y_1)$ zu unendlich vielen verschiedenen $(x, y)$ ge-

hören würde, so müßten diese die Form

$$x = x_0 + n x_1, \qquad y = y_0 + n y_1$$

haben, wo $n$ unendlich viele ganze Zahlen aus $\mathfrak{k}$ bedeuten würde. Dann wäre aber

$$a x^2 + b x y + c y^2 = P + Q n + R n^2,$$

wobei

$$P = a x_0^2 + b x_0 y_0 + c y_0^2, \qquad R = a x_1^2 + b x_1 y_1 + c y_1^2,$$
$$Q = 2 a x_0 x_1 + b (x_0 y_1 + y_0 x_1) + 2 c y_0 y_1.$$

Also, da $|n|$ beliebig groß sein könnte, wegen (8)

$$R = 0, \qquad Q = 0$$

und folglich ergäbe sich der Widerspruch:

$$1 = (b^2 - 4ac)(y_0 x_1 - x_0 y_1)^2 = Q^2 - 4PR = 0.$$

Analog zu (9) setzen wir nun

$$a x_1^2 + b x_1 y_1 + c y_1^2 = \delta_1. \tag{11}$$

Dann folgt aus (11) und (9), weil $y \neq 0$ ist,

$$\delta_1 - \delta \left(\frac{y_1}{y}\right)^2 = a \frac{y^2 x_1^2 - x^2 y_1^2}{y^2} + b \frac{y x_1 y_1 - x y_1^2}{y},$$

also mit Rücksicht auf (10)

$$\delta_1 - \delta \left(\frac{y_1}{y}\right)^2 = a \frac{y x_1 + x y_1}{y^2} + b \frac{y_1}{y} = a \frac{2 x y_1 + 1}{y^2} + b \frac{y_1}{y} = \frac{y_1}{y} \frac{2ax + by}{y} + \frac{a}{y^2},$$

oder schließlich, falls $\delta \neq 0$ ist,

$$\delta_1 = \delta \left(\frac{y_1}{y}\right)^2 + \frac{y_1}{y} \frac{2ax + by}{y} + \frac{a}{y^2} = \delta \left[\left(\frac{y_1}{y} + \frac{2ax + by}{2\delta y}\right)^2 + \frac{a}{\delta y^2} - \frac{(2ax + by)^2}{4\delta^2 y^2}\right].$$

Wegen (9) ist aber

$$(2ax + by)^2 = 4a\delta + (b^2 - 4ac) y^2 = 4a\delta + y^2, \tag{12}$$

und indem man das in die vorige Formel einsetzt, ergibt sich:

$$\delta_1 = \delta \left[\left(\frac{y_1}{y} + \frac{2ax + by}{2\delta y}\right)^2 - \frac{1}{4\delta^2}\right]. \tag{13}$$

In den folgenden drei Paragraphen werden zwei quadratische Formen als äquivalent bezeichnet, wenn sie durch eine lineare Transformation mit ganzen Koeffizienten des Körpers $\mathfrak{k}$ und der Determinante 1 ineinander übergehen. Der Äquivalenzbegriff hat also beim Beweis eines jeden der drei Sätze eine andere Bedeutung, weil der Körper $\mathfrak{k}$ ein anderer ist. In allen Fällen ist aber eine Form $a x^2 + b x y + c y^2$, wenn sie für zwei ganze relativ prime Zahlen $x = p$, $y = q$ des Körpers $\mathfrak{k}$ einen Wert $\alpha$ annimmt, äquivalent mit einer Form, deren erster Koeffizient gleich $\alpha$ ist.

Denn wenn man zwei ganze Zahlen $p_1, q_1$ in $\mathfrak{k}$ so wählt, daß $pq_1 - qp_1 = 1$ ist, geht sie durch die Transformation

$$x \to px + p_1 y, \qquad y \to qx + q_1 y$$

in eine Form mit dem ersten Koeffizienten $\alpha$ über.

## § 3.

## Beendigung des Beweises von Satz 1.

Wir benutzen den folgenden, in § 8 der Arbeit $A_3$ bewiesenen

Hilfssatz. *Für* $\frac{20}{81} \leqq d \leqq \frac{5}{4}$ *gibt es zu jeder reellen Zahl* $z_1$ *eine modulo* 1 *kongruente Zahl* $z$, *für welche die Ungleichung*

$$|z^2 - d| \leqq \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{d}$$

*besteht, und zwar mit dem Kleinerzeichen außer im Fall* $d = \frac{5}{4}$, $z_1 \equiv \frac{1}{2} \pmod 1$, *in welchem Gleichheit gilt.*

Nach dem Zwischenresultat (8) gibt es unendlich viele Paare von ganzen rationalen relativ primen Zahlen $x, y$, für welche $|\delta| < \sqrt{\frac{81}{80}}$ und, wie anschließend an (8) erwähnt wurde, $y \neq 0$ ist. Wenn dann $|\delta| \geqq \frac{1}{\sqrt{5}}$, also

$$\frac{20}{81} < \frac{1}{4\delta^2} \leqq \frac{5}{4}$$

ist, so ergibt sich aus (13), wenn man die Zahl $y_1$, die ja nur modulo $y$ bestimmt war, geeignet wählt, mit Hilfe des Hilfssatzes:

$$|\delta_1| \leqq |\delta| \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{1}{4\delta^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \tag{14}$$

und zwar mit dem Kleinerzeichen außer im Fall

$$\frac{1}{4\delta^2} = \frac{5}{4}, \qquad \frac{y_1}{y} + \frac{2ax + by}{2\delta y} \equiv \frac{1}{2} \pmod 1. \tag{14a}$$

Von den beiden Paaren $(x, y)$ und $(x_1, y_1)$ genügt also immer wenigstens eines der in Satz 1 angegebenen Ungleichung. Da wir unendlich viele Paare $(x, y)$ haben und da jedes Paar $(x_1, y_1)$ nur zu endlich vielen $(x, y)$ gehört, gibt es also unendlich viele Paare $(x, y)$, die der in Satz 1 angegebenen Ungleichung genügen. Der Satz 1 wird daher bewiesen sein, wenn wir noch zeigen können, daß der soeben gefundene Ausnahmsfall (14a) auf den in Satz 1 angegebenen Ausnahmsfall hinausläuft.

Nun folgt aus (12) und der zweiten Bedingung (14a)

$$4a\delta + y^2 = (2ax + by)^2 = 4\delta^2 y^2 \left(\frac{1}{2} + g - \frac{y_1}{y}\right)^2 = \delta^2 (y + 2h)^2,$$

wo $g$ und also auch $h$ eine ganze rationale Zahl bedeutet. Hieraus folgt weiter, wenn man den aus der ersten Bedingung (14a) hervorgehenden Wert $\delta = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ einsetzt und die Gleichung dann nach $a$ auflöst:

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(-y^2 + yh + h^2).$$

Daher hat der Koeffizient $a$ die Form

$$a = \frac{A}{\sqrt{5}},$$

wo $A$ eine ganze rationale Zahl ist. Indem man $x$ und $y$ ihre Rollen tauschen läßt, ergibt sich ebenso

$$c = \frac{C}{\sqrt{5}},$$

wo auch $C$ eine ganze rationale Zahl ist[5]). Aus (14a) folgt dann für $b$ die Gestalt

$$b = \frac{B}{\sqrt{5}},$$

wo $B$ eine rationale Zahl, und wegen

$$B^2 - 4AC = 5(b^2 - 4ac) = 5$$

ist $B$ sogar eine *ganze* Zahl. Die quadratische Form hat daher die Gestalt

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(Ax^2 + Bxy + Cy^2).$$

Da aber die Zahl $\delta = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ durch sie darstellbar ist (vgl. (9)), ist sie nach dem Schlußabsatz des § 2 äquivalent mit

$$\pm \frac{1}{\sqrt{5}}(x^2 + B_1 xy + C_1 y^2),$$

wo dann $B_1$, $C_1$ offenbar wieder ganze rationale Zahlen sein müssen und wo

$$B_1^2 - 4C_1 = 5$$

ist. Daher ist $B_1$ ungerade, etwa $B_1 = 2n+1$, und also

$$C_1 = \frac{B_1^2 - 5}{4} = n^2 + n - 1.$$

Die quadratische Form ist daher gleich

$$\pm \frac{1}{\sqrt{5}}[x^2 + (2n+1)xy + (n^2 + n - 1)y^2]$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{5}}[(x + ny)^2 + (x + ny)y - y^2],$$

---

[5]) Für $c = 0$ können $x$ und $y$ wegen der Voraussetzung $a \neq 0$ ihre Rollen nicht tauschen. Aber in diesem Fall, der übrigens, wie das Endergebnis zeigt, gar nicht vorkommen kann, würde die Formel $c = \frac{C}{\sqrt{5}}$ erst recht gelten, indem $C = 0$ wäre.

also äquivalent mit

$$\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(x^2+xy-y^2). \tag{15}$$

Für das obere Vorzeichen ist das die in Satz 1 angegebene Ausnahmsform. Für das untere Vorzeichen ergibt sich aber eine äquivalente Form, wie die Transformation $x \to y$, $y \to -x$ lehrt. Daß die Form (15) für kein einziges von $(0, 0)$ verschiedenes Paar von ganzen rationalen Zahlen absolut kleiner als $\frac{1}{\sqrt{5}}$ werden kann, ist trivial, weil die Klammer stets eine von 0 verschiedene ganze rationale Zahl darstellt. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

## § 4.

## Beendigung des Beweises von Satz 2.

Wir benutzen den folgenden, in der Arbeit $A_2$ bewiesenen

Hilfssatz. *Ist $d$ irgendeine komplexe Zahl, so gibt es zu jeder komplexen Zahl $z_1$ eine nach dem Modul $(1, i)$ kongruente Zahl $z$, für welche die Ungleichung*

$$|z^2-d|^2 \leqq \frac{7}{16}+|d|^2$$

*besteht, und zwar mit dem Kleinerzeichen, außer in den beiden Fällen*

$$d=(-1)^{\nu+1}\frac{3}{4}, \qquad z_1 \equiv \frac{i^\nu}{2} \pmod{1, i} \qquad (\nu=0,1),$$

*in denen Gleichheit gilt.*

Nach dem Zwischenresultat (8) gibt es unendlich viele Paare von ganzen relativ primen Zahlen $x, y$ des Körpers $\mathfrak{R}(i)$, für welche $|\delta| < \sqrt{\frac{9}{2}}$, also $|\delta|^2 < \frac{9}{2}$ und außerdem, wie anschließend an (8) erwähnt wurde, $y \neq 0$ ist. Daher gilt, falls auch $\delta \neq 0$ ist, die Formel (13). Aus dieser folgt dann, wenn man die Zahl $y_1$, die ja nur modulo $y$ bestimmt war, geeignet wählt, mit Hilfe des Hilfssatzes:

$$|\delta_1|^2 \leqq |\delta|^2\left(\frac{7}{16}+\frac{1}{16\,\delta^4}\right)=\frac{7}{16}|\delta|^2+\frac{1}{16\,\delta^2} \quad (\text{für } \delta \neq 0), \tag{16}$$

und zwar mit dem Kleinerzeichen außer in den beiden Fällen

$$\frac{1}{4\delta^2}=(-1)^{\nu+1}\frac{3}{4}, \qquad \frac{y_1}{y}+\frac{2ax+by}{2\delta y} \equiv \frac{i^\nu}{2} \pmod{1, i} \tag{16a}$$
$$(\nu=0,1).$$

Wenn dann einmal $|\delta|^2 \geqq 2$ ist, so ist nach (16)

$$|\delta_1|^2 \leqq \operatorname*{Max}_{2 \leqq x \leqq \frac{9}{2}}\left(\frac{7}{16}x+\frac{1}{16x}\right)=\frac{7}{16}\cdot\frac{9}{2}+\frac{2}{16\cdot 9}<2.$$

Daher ist von den beiden Zahlen $|\delta|^2$, $|\delta_1|^2$ immer wenigstens eine kleiner als 2. Es gibt also auch unendlich viele Paare $(x, y)$, für die $|\delta|^2 < 2$ ist. Dabei ist auch wieder (vgl. die Stelle unmittelbar hinter Formel (8)) unendlich oft $y \neq 0$, so daß man bei Einführung der Zahlen $x_1$, $y_1$, $\delta_1$ wieder zur Formel (13) und damit zu (16) gelangt. Wenn daher einmal $|\delta|^2 \geqq 1$ ist, so ist nach (16)

$$|\delta_1|^2 \leqq \operatorname*{Max}_{1 \leqq x \leqq 2} \left(\frac{7}{16}x + \frac{1}{16x}\right) = \frac{7}{16} \cdot 2 + \frac{1}{16 \cdot 2} < 1.$$

Somit ist von den beiden Zahlen $|\delta|^2$, $|\delta_1|^2$ immer wenigstens eine kleiner als 1. Es gibt also auch unendlich viele Paare $(x, y)$, für die $|\delta|^2 < 1$ ist, und natürlich ist auch wieder unendlich oft $y \neq 0$. Nun kann man analog fortfahren. Wenn einmal $|\delta|^2 > \frac{1}{2}$ ist, so ist nach (16)

$$|\delta_1|^2 \leqq \operatorname*{Max}_{\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1} \left(\frac{7}{16}x + \frac{1}{16x}\right) = \frac{7}{16} \cdot 1 + \frac{1}{16 \cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

Daher ist auch unendlich oft $|\delta|^2 \leqq \frac{1}{2}$. Wenn dabei $|\delta|^2 \geqq \frac{3}{7}$ ist, so ist nach (16)

$$|\delta_1|^2 \leqq \operatorname*{Max}_{\frac{3}{7} \leqq x \leqq \frac{1}{2}} \left(\frac{7}{16}x + \frac{1}{16x}\right) = \frac{7}{16} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{16} < \frac{3}{7}.$$

Daher ist auch unendlich oft $|\delta|^2 < \frac{3}{7}$. Wenn dabei $|\delta|^2 \geqq \frac{1}{3}$ ist, so ist nach (16)

$$|\delta_1|^2 \leqq \operatorname*{Max}_{\frac{1}{3} \leqq x \leqq \frac{3}{7}} \left(\frac{7}{16}x + \frac{1}{16x}\right) = \frac{1}{3},$$

und zwar mit dem Kleinerzeichen außer in den beiden Fällen (16a).

Hiernach ist also auch unendlich oft $|\delta|^2 \leqq \frac{1}{3}$, also $|\delta| \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Das ist aber die in Satz 2 behauptete Ungleichung. Der Satz 2 wird daher bewiesen sein, wenn wir noch zeigen können, daß die beiden durch (16a) charakterisierten Ausnahmsfälle auf den in Satz 2 angegebenen Ausnahmsfall hinauslaufen.

Nun folgt aus (12) und der zweiten Bedingung (16a)

$$4a\delta + y^2 = (2ax + by)^2 = 4\delta^2 y^2 \left(\frac{i^\nu}{2} + g - \frac{y_1}{y}\right)^2 = \delta^2 (i^\nu y + 2h)^2,$$

wo $g$ und also auch $h$ eine ganze Zahl des Körpers $\mathfrak{K}(i)$ bedeutet. Hieraus folgt weiter, wenn man den aus der ersten Bedingung (16a) hervorgehenden Wert

$$\delta = \pm \frac{1}{\sqrt{(-1)^{\nu+1} 3}} \tag{17}$$

einsetzt und die Gleichung dann nach $a$ auflöst:

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{(-1)^{\nu+1} 3}} [(-1)^\nu y^2 + i^\nu yh + h^2].$$

Daher hat der Koeffizient $a$ die Form

$$a = \frac{A}{\sqrt{(-1)^{\nu+1}3}},$$

wo $A$ eine ganze Zahl des Körpers $\mathfrak{K}(i)$ ist. Indem man $x$ und $y$ ihre Rollen tauschen läßt, ergibt sich analog

$$c = \frac{C}{\sqrt{(-1)^{\nu+1}3}},$$

wo auch $C$ eine ganze Zahl aus $\mathfrak{K}(i)$ ist (hier gilt auch wieder die Fußnote [5]) auf S. 570). Aus (16a) ergibt sich dann für $b$ die Gestalt

$$b = \frac{B}{\sqrt{(-1)^{\nu+1}3}},$$

wo $B$ eine Zahl aus $\mathfrak{K}(i)$ ist, und wegen

$$B^2 - 4AC = (-1)^{\nu+1}3(b^2 - 4ac) = (-1)^{\nu+1}3$$

ist $B$ sogar eine *ganze* Zahl. Die quadratische Form hat daher die Gestalt

$$\frac{1}{\sqrt{(-1)^{\nu+1}3}}(Ax^2 + Bxy + Cy^2).$$

Da aber die in (17) angegebene Zahl $\delta$ durch sie darstellbar ist, ist sie nach dem Schlußabsatz des § 2 äquivalent mit

$$\pm\frac{1}{\sqrt{(-1)^{\nu+1}3}}(x^2 + B_1xy + C_1y^2), \tag{18}$$

wo dann $B_1$, $C_1$ offenbar wieder ganze Zahlen aus $\mathfrak{K}(i)$ sein müssen und wo

$$B_1^2 - 4C_1 = (-1)^{\nu+1}3 \tag{19}$$

ist. Daher ist $B_1$ relativ prim zu 2, hat also die Gestalt

$$B_1 = 1 + (1+i)n, \tag{20}$$

wo $n$ eine ganze Zahl aus $\mathfrak{K}(i)$ ist. Aus (19) und (20) folgt dann

$$4C_1 = 1 + 2(1+i)n + 2in^2 - (-1)^{\nu+1}3. \tag{21}$$

Nun sind die Fälle $\nu = 0$ und $\nu = 1$ zu unterscheiden. Für $\nu = 0$ geht (21) über in

$$2C_1 = 2 + (1+i)n + in^2. \tag{21a}$$

Daher muß $n^2$ und also auch $n$ durch $1+i$ teilbar sein, etwa $n = (1+i)m$, wo $m$ eine ganze Zahl aus $\mathfrak{K}(i)$ ist. Durch Einsetzen in (20) und (21a) kommt dann

$$B_1 = 1 + 2im, \qquad C_1 = 1 + im - m^2.$$

Die Form (18) ist daher die folgende

$$\pm\frac{1}{\sqrt{-3}}[x^2+(1+2im)xy+(1+im-m^2)y^2]$$
$$=\pm\frac{1}{\sqrt{-3}}[(x+imy)^2+(x+imy)y+y^2],$$

also äquivalent mit

$$\pm\frac{1}{\sqrt{-3}}(x^2+xy+y^2). \tag{22}$$

Das ist aber der in Satz 2 angeführte Ausnahmsfall.

Für $\nu=1$ geht dagegen (21) über in

$$2C_1=-1+(1+i)n+in^2. \tag{21b}$$

Daher ist diesmal $n$ zu $1+i$ relativ prim, kann also in die Form $n=i+(1+i)m$ gesetzt werden, wo $m$ eine ganze Zahl aus $\mathfrak{R}(i)$ ist. Durch Einsetzen in (20) und (21b) kommt dann

$$B_1=i+2im, \qquad C_1=-1-m-m^2.$$

Die Form (18) ist daher diesmal die folgende:

$$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}[x^2+(i+2im)xy-(1+m+m^2)y^2]$$
$$=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}[(x+imy)^2+i(x+imy)y-y^2],$$

also äquivalent mit

$$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(x^2+ixy-y^2).$$

Diese Form geht aber durch die Äquivalenztransformation

$$x\to ix-y, \qquad y\to -ix+(1-i)y$$

über in die Form (22), so daß wieder der in Satz 2 angegebene Ausnahmsfall vorliegt.

Daß die Form (22) für kein einziges von $(0,0)$ verschiedenes Paar ganzer Zahlen aus $\mathfrak{R}(i)$ absolut kleiner als $\frac{1}{\sqrt{3}}$ werden kann, ist trivial, weil die Klammer in (22) stets eine von 0 verschiedene[6]) ganze Zahl aus $\mathfrak{R}(i)$ darstellt, also absolut genommen mindestens gleich 1 ist.

[6]) Wäre sie einmal 0, so wäre

$$\frac{x}{y}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2},$$

während doch $\sqrt{-3}$ nicht dem Körper $\mathfrak{R}(i)$ angehört.

## § 5.

## Beendigung des Beweises von Satz 3.

Wir benutzen den folgenden in der Arbeit $A_3$ bewiesenen

Hilfssatz. *Ist $d$ irgendeine komplexe Zahl, so gibt es zu jeder komplexen Zahl $z_1$ eine nach dem Modul $(1, \varepsilon)$ kongruente Zahl $z$, für welche die Ungleichung*

$$|z^2 - d|^2 < \frac{1}{3} + |d|^2$$

*besteht. Falls $\frac{3}{4} \leqq |d| \leqq \frac{\sqrt{13}}{4}$ ist, gibt es sogar eine nach $(1, \varepsilon)$ kongruente Zahl $z$, für welche die schärfere Ungleichung*

$$|z^2 - d|^2 \leqq \frac{4}{\sqrt{13}} |d|$$

*besteht, und zwar mit dem Kleinerzeichen außer in den folgenden sechs Fällen, in welchen Gleichheit gilt:*

$$d = \frac{4 + \varepsilon^\mu}{4} \varepsilon^\nu, \qquad z_1 \equiv \frac{\varepsilon^{-\mu}}{2} \varepsilon^{-\nu} \pmod{1, \varepsilon} \qquad (\mu = 1, 2;\ \nu = 0, 1, 2).$$

Nach dem Zwischenresultat (8) gibt es unendlich viele Paare von ganzen relativ primen Zahlen $x, y$, des Körpers $\Re(\varepsilon)$, für welche $|\delta| < \frac{\sqrt{22}}{2}$, also $|\delta|^2 < \frac{11}{2}$ und außerdem, wie anschließend an (8) erwähnt wurde, $y \neq 0$ ist. Daher gilt, falls auch $\delta \neq 0$ ist, die Formel (13). Aus dieser folgt dann, wenn man die Zahl $y_1$, die ja nur modulo $y$ bestimmt war, geeignet wählt, mit Hilfe des Hilfssatzes:

$$|\delta_1|^2 \leqq |\delta|^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{16 |\delta|^4}\right) = \frac{|\delta|^2}{3} + \frac{1}{16 |\delta|^2} \quad (\text{für } \delta \neq 0). \tag{23}$$

Falls $\frac{3}{4} \leqq \frac{1}{4 |\delta|^2} \leqq \frac{\sqrt{13}}{4}$, also $\frac{1}{\sqrt{13}} \leqq |\delta_1|^2 \leqq \frac{1}{3}$ ist, kann man den zweiten Teil des Hilfssatzes anwenden und findet

$$|\delta_1|^2 \leqq |\delta|^2 \frac{4}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{4 |\delta|^2} = \frac{1}{\sqrt{13}} \quad \text{für} \quad \frac{1}{\sqrt{13}} \leqq |\delta|^2 \leqq \frac{1}{3}, \tag{24}$$

und zwar mit dem Kleinerzeichen außer in den sechs Fällen

$$\frac{1}{4\delta^2} = \frac{4 + \varepsilon^\mu}{4} \varepsilon^\nu, \qquad \frac{y_1}{y} + \frac{2ax + by}{2\delta y} \equiv \frac{\varepsilon^{-\mu \cdot \nu}}{2} \pmod{1, \varepsilon} \tag{24a}$$

$$(\mu = 1, 2;\ \nu = 0, 1, 2).$$

Wenn dann einmal $|\delta|^2 \geqq 2$ ist, so ist nach (23)

$$|\delta_1|^2 \leqq \operatorname*{Max}_{2 \leqq x \leqq \frac{11}{2}} \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{16x}\right) = \frac{11}{3 \cdot 2} + \frac{2}{16 \cdot 11} < 2.$$

Daher ist von den beiden Zahlen $|\delta|^2$, $|\delta_1|^2$ immer wenigstens eine kleiner als 2. Es gibt also auch unendlich viele Paare $(x, y)$, für die $|\delta|^2 < 2$ ist. Dabei ist auch wieder (vgl. die Stelle unmittelbar hinter Formel (8)) unendlich oft $y \neq 0$, so daß man bei Einführung der Zahlen $x_1, y_1, \delta_1$ wieder zur Formel (13) und damit zu (23) gelangt. Wenn daher einmal $|\delta|^2 \geqq \frac{3}{4}$ ist, so ist nach (23)

$$|\delta_1|^2 \leqq \operatorname*{Max}_{\frac{1}{4} \leqq x \leqq 2} \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{16\,x}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{16 \cdot 2} < \frac{3}{4}.$$

Somit ist von den beiden Zahlen $|\delta|^2$, $|\delta_1|^2$ immer wenigstens eine kleiner als $\frac{3}{4}$. Es gibt also auch unendlich viele Paare $(x, y)$, für die $|\delta|^2 < \frac{3}{4}$ ist, und natürlich ist auch wieder unendlich oft $y \neq 0$. Nun kann man wieder analog fortfahren. Wenn einmal $|\delta|^2 > \frac{1}{3}$ ist, so ist nach (23)

$$|\delta_1|^2 \leqq \operatorname*{Max}_{\frac{1}{3} \leqq x \leqq \frac{3}{4}} \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{16\,x}\right) = \frac{3}{3 \cdot 4} + \frac{4}{16 \cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

Daher ist auch unendlich oft $|\delta|^2 \leqq \frac{1}{3}$. Wenn dabei $|\delta|^2 \geqq \frac{1}{\sqrt{13}}$, so ist nach (24)

$$|\delta_1|^2 \leqq \frac{1}{\sqrt{13}},$$

und zwar mit dem Kleinerzeichen außer in den sechs Fällen (24a).

Hiernach ist also auch unendlich oft $|\delta|^2 \leqq \frac{1}{\sqrt{13}}$, also $|\delta| \leqq \frac{1}{\sqrt[4]{13}}$. Das ist aber die in Satz 3 behauptete Ungleichung. Der Satz 3 wird daher bewiesen sein, wenn wir noch zeigen können, daß die sechs durch (24a) charakterisierten Ausnahmsfälle auf die zwei in Satz 3 angegebenen Ausnahmsfälle hinauslaufen.

Nun folgt aus (12) und der zweiten Bedingung (24a)

$$4\,a\,\delta + y^2 = (2\,a\,x + b\,y)^2 = 4\,\delta^2\,y^2 \left(\frac{\varepsilon^{-\mu-\nu}}{2} + g - \frac{y_1}{y}\right)^2 = \delta^2 (\varepsilon^{-\mu-\nu}\,y + 2\,h)^2,$$

wo $g$ und also auch $h$ eine ganze Zahl des Körpers $\mathfrak{R}(\varepsilon)$ bedeutet. Hieraus folgt weiter, wenn man den aus der ersten Bedingung (24a) hervorgehenden Wert

$$\delta = \pm \frac{\varepsilon^{\nu}}{\sqrt{4 + \varepsilon^{\mu}}} \tag{25}$$

einsetzt und die Gleichung dann nach $a$ auflöst:

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{4 + \varepsilon^{\mu}}} (-\varepsilon^{-\nu} y^2 + \varepsilon^{-\mu}\,y\,h + \varepsilon^{\nu} h^2).$$

Daher hat der Koeffizient $a$ die Form

$$a = \frac{A}{\sqrt{4 + \varepsilon^{\mu}}},$$

wo $A$ eine ganze Zahl des Körpers $\mathfrak{R}(\varepsilon)$ ist. Indem man $x$ und $y$ ihre Rollen tauschen läßt, ergibt sich analog

$$c = \frac{C}{\sqrt{4+\varepsilon^{\mu}}},$$

wo auch $C$ eine ganze Zahl aus $\mathfrak{R}(\varepsilon)$ ist[7]). Aus (24a) ergibt sich dann für $b$ die Gestalt

$$b = \frac{B}{\sqrt{4+\varepsilon^{\mu}}},$$

wo $B$ eine Zahl aus $\mathfrak{R}(\varepsilon)$ ist, und wegen

$$B^2 - 4AC = (4+\varepsilon^{\mu})(b^2 - 4ac) = 4+\varepsilon^{\mu}$$

ist $B$ sogar eine *ganze* Zahl. Die quadratische Form hat daher die Gestalt

$$\frac{1}{\sqrt{4+\varepsilon^{\mu}}}(Ax^2 + Bxy + Cy^2).$$

Da aber die in (25) angegebene Zahl $\delta$ durch sie darstellbar ist, ist sie nach dem Schlußabsatz des § 2 äquivalent mit

$$\pm\frac{1}{\sqrt{4+\varepsilon^{\mu}}}(\varepsilon^{\nu}x^2 + B_1xy + C_1y^2), \tag{26}$$

wo dann $B_1$, $C_1$ offenbar wieder ganze Zahlen aus $\mathfrak{R}(\varepsilon)$ sein müssen. Die Form (26) erweist sich aber vermöge der Äquivalenztransformation $x \to \varepsilon^{\nu}x$, $y \to \varepsilon^{-\nu}y$ als äquivalent mit

$$\pm\frac{1}{\sqrt{4+\varepsilon^{\mu}}}(x^2 + B_2xy + C_2y^2), \tag{27}$$

wo auch $B_2$, $C_2$ ganze Zahlen aus $\mathfrak{R}(\varepsilon)$ sind, und wo dann

$$B_2^2 - 4C_2 = 4+\varepsilon^{\mu} \tag{28}$$

ist. Daher ist $B_2$ relativ prim zu 2, hat also, da 2 in $\mathfrak{R}(\varepsilon)$ Primideal ist, die Gestalt

$$B_2 = \varepsilon^{\lambda} + 2n, \tag{29}$$

wo $n$ eine ganze Zahl aus $\mathfrak{R}(\varepsilon)$ ist. Aus (28) und (29) folgt dann

$$4C_2 = \varepsilon^{2\lambda} - \varepsilon^{\mu} + 4\varepsilon^{\lambda}n + 4n^2 - 4. \tag{30}$$

---

[7]) Auch hier gilt wieder die Fußnote [5]) auf S. 570. Übrigens könnte man zunächst denken, daß in dem durch die Rollenvertauschung von $x$ und $y$ sich ergebenden Ausdruck für $c$ der Exponent $\mu$ im Nenner vielleicht ein anderer sein könnte als bei $a$. Aber es hat sich ja gezeigt, daß er bei $a$ derselbe ist wie bei $\delta$ in Fl. (25). Da $\delta$ bei der Rollenvertauschung invariant bleibt, muß der Exponent $\mu$ auch bei $c$ derselbe sein wie bei $\delta$, also wie bei $a$. — Eine analoge Bemerkung in § 4 im Anschluß an Fl. (17) wäre nicht falsch gewesen, aber überflüssig, weil $\sqrt{(-1)^{\nu+1}}$ für jeden Wert $\nu$ eine Einheit des Körpers $\mathfrak{R}(i)$ ist, die man auch gleich in die Zahl $A$ bzw. $C$ hätte einbeziehen können.

Daher muß $\varepsilon^{2\lambda} - \varepsilon^{\mu}$ durch 4 teilbar sein, was nur für $\lambda \equiv -\mu \pmod 3$ zutrifft. Nach (29) und (30) ist dann

$$B_2 = \varepsilon^{-\mu} + 2n, \qquad C_2 = \varepsilon^{-\mu} n + n^2 - 1.$$

Die Form (27) ist daher die folgende:

$$\pm \frac{1}{\sqrt{4+\varepsilon^{\mu}}}\left[x^2 + (\varepsilon^{-\mu} + 2n)xy + (\varepsilon^{-\mu} n + n^2 - 1)y^2\right]$$
$$= \pm \frac{1}{\sqrt{4+\varepsilon^{\mu}}}\left[(x+ny)^2 + \varepsilon^{-\mu}(x+ny)y - y^2\right],$$

also äquivalent mit

$$\pm \frac{1}{\sqrt{4+\varepsilon^{\mu}}}(x^2 + \varepsilon^{-\mu} xy - y^2). \tag{31}$$

Das sind aber in der Tat die in Satz 3 aufgeführten Ausnahmsfälle.

Daß die Form (31) für kein einziges von $(0, 0)$ verschiedenes Paar ganzer Zahlen aus $\mathfrak{R}(\varepsilon)$ absolut kleiner als $\frac{1}{\sqrt[4]{13}}$ werden kann, ist trivial, weil $\left|\sqrt{4+\varepsilon^{\mu}}\right| = \sqrt[4]{13}$ ist und weil die Klammer in (31) stets eine von 0 verschiedene [8]) ganze Zahl aus $\mathfrak{R}(\varepsilon)$ darstellt, also absolut genommen mindestens gleich 1 ist.

[8]) Wäre sie einmal 0, so wäre

$$\frac{x}{y} = \frac{-\varepsilon^{-\mu} \pm \sqrt{\varepsilon^{-\mu}+4}}{2},$$

also die Zahl $\sqrt{\varepsilon^{-\mu}+4}$ und folglich auch die Konjugierte $\sqrt{\varepsilon^{\mu}-4}$ in $\mathfrak{R}(\varepsilon)$ enthalten, was aber wegen

$$\sqrt{\varepsilon^{\mu}+4}\cdot\sqrt{\varepsilon^{-\mu}+4} = \sqrt{13}$$

nicht zutrifft.

(Eingegangen am 2. Oktober 1931.)

# Über gewisse Interpolationspolynome, die zu den Jacobischen und Laguerreschen Abszissen gehören.

Von

G. Szegö in Königsberg.

Die Theorie der Interpolationsreihen im reellen Gebiete ist in den letzten Jahren durch zahlreiche wertvolle Ergebnisse bereichert worden[1]). Es handelt sich bei diesen Untersuchungen in erster Linie um die Konvergenzeigenschaften von gewissen Polynomreihen

$$\mathsf{X}_1(x), \mathsf{X}_2(x), \ldots, \mathsf{X}_n(x), \ldots, \tag{1}$$

die zu einer im Intervall $a \leqq x \leqq b$ definierten stetigen Funktion $f(x)$ nach einer bestimmten festen Vorschrift zugeordnet werden. Die einfachste Vorschrift dieser Art fordert, daß $\mathsf{X}_n(x)$ ein Polynom $(n-1)$-ten Grades ist, das an den $n$ voneinander verschiedenen Stellen

$$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} \tag{2}$$

aus dem Intervalle $a \leqq x \leqq b$ mit $f(x)$ übereinstimmt, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Das Polynom $\mathsf{X}_n(x)$ ist natürlich durch $f(x)$ und durch die Abszissen (2) *eindeutig* bestimmt.

An der Spitze dieser Theorie steht ein prinzipiell höchst wichtiges Resultat von Herrn G. Faber[2]). Es besagt, daß die Polynomreihe (1), wie man auch die Folge (2) der Interpolationsabszissen wählen mag, für eine geeignet gewählte stetige Funktion $f(x)$ nicht gleichmäßig konvergieren wird. Um also gleichmäßig konvergente Interpolationsreihen zu erhalten,

[1]) Bezüglich der neueren Literatur über Interpolationsreihen verweisen wir auf den Encyklopädieartikel von A. Rosenthal: Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlichen. Funktionenfolgen (nach dem französischen Artikel von M. Fréchet), (1924), Nr. 51, S. 1153—1157.

[2]) G. Faber, Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen. Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver. **23** (1914), S. 192—210. — Einen einfacheren Beweis gab Fejér, a. a. O. [3]), d), S. 450—453.

muß man die obige Vorschrift modifizieren. Dies kann, allgemein gesprochen, auf zwei verschiedene Arten geschehen.

a) Man kann die Funktion $f(x)$ an Stelle der Stetigkeit schärferen Bedingungen, z. B. einer Lipschitzschen Bedingung, unterwerfen, wobei freilich die Abszissen (2) noch passend zu wählen sind.

b) Man kann die Interpolationspolynome (1), außer der Übereinstimmung mit der Funktion $f(x)$ an den Stellen (2), gewissen weiteren Bedingungen unterwerfen, z. B. ihre Ableitungen passend einschränken.

Den zweiten Weg hat Herr L. Fejér in einer Reihe von wichtigen Arbeiten eingeschlagen[3]). Er hat in diesem Zusammenhange zum ersten Male die sogenannten *Treppenpolynome* eingeführt, d.h. eine Polynomfolge (1), in der $X_n(x)$ vom Grade $2n-1$ ist, an den Stellen (2) mit der gegebenen stetigen Funktion $f(x)$ übereinstimmt und die Ableitung $X_n'(x)$ an denselben Stellen verschwindet. Er konnte zeigen, daß die nach dieser Vorschrift gebildete Interpolationsreihe (1) gleichmäßig gegen die stetige Funktion $f(x)$ konvergiert ($a \leqq x \leqq b$, $b-a$ endlich), vorausgesetzt, daß man noch über die Abszissen (2) geeignet (unabhängig von $f(x)$) verfügt. Dasselbe gilt, wie er später bemerkt hat, auch dann, wenn die Ableitungen der Interpolationspolynome an den Interpolationsstellen nicht verschwinden sollten, aber absolut genommen unterhalb einer festen, von $n$ freien Schranke bleiben[4]).

Die reichhaltigen Ergebnisse der Fejérschen Untersuchungen können hier nicht im einzelnen dargestellt werden. Es möge lediglich die Andeutung genügen, daß die von ihm untersuchten Interpolationsabszissen, abgesehen von den äquidistanten, die ein recht unregelmäßiges Verhalten zeigen, ausschließlich Spezialfälle der sogenannten Jacobischen (hypergeometrischen) Abszissen sind, d. h. sie sind die Nullstellen der Jacobischen (hypergeometrischen) Polynome. Eine systematische und allgemeine Untersuchung dieser Abszissen vom Standpunkt der Konvergenz der Treppen- und der eben definierten allgemeineren Polynome aus fehlt jedoch bis heute. Fejér hat zwar die Grundpolynome (s. unten) dieser Interpolation in einer neueren

[3]) a) Interpolatióról (ungarisch). Math. és Term. Értesitö **34** (1916), S. 209—229; b) Über Interpolation. Nachr. der Göttinger Ges. der Wiss., Math.-Phys. Klasse 1916, S. 66—91; c) Über Weierstraßsche Approximation, besonders durch Hermitesche Interpolation. Math. Annalen **102** (1930), S. 707—725; d) Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle, wenn Schranken für seine Werte und ersten Ableitungswerte in einzelnen Punkten des Intervalles gegeben sind, und ihre Anwendung auf die Konvergenzfrage Hermitescher Interpolationsreihen. Math. Zeitschr. **32** (1930), S. 426—457; e) Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte. Erscheint in den Math. Annalen.

[4]) Es gelten sogar Konvergenzsätze unter noch allgemeineren „Steilheitsbeschränkungen". Vgl. Fejér, a. a. O. [3]), d), S. 447.

Arbeit berechnet und untersucht, wobei auch die Bedeutung dieser Polynome für die oben in a) erwähnte Fragestellung in Erscheinung trat[5]). Doch hat er die Konvergenzfrage nur in einigen Fällen, die wiederum in den Spezialfall der sogenannten ultrasphärischen Abszissen einzuordnen sind, behandelt.

In der vorliegenden Arbeit wird das Konvergenzproblem bei Jacobischen Abszissen vollständig erledigt. Die Hauptresultate lauten folgendermaßen:

Es sei $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ das $n$-te Jacobische Polynom, $\alpha > -1$, $\beta > -1$ (Definition s. § 2). Seine Nullstellen $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ sind alle einfach; sie liegen im Intervalle $-1 < x < +1$ (Jacobische Abszissen). Wir ordnen zu einer beliebigen, im Intervall $-1 \leqq f(x) \leqq +1$ definierten stetigen Funktion $f(x)$ eine Folge von Polynomen $\mathsf{X}_n(x)$ zu, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

a) $\mathsf{X}_n(x)$ ist vom Grade $2n-1$;

b) $\mathsf{X}_n(x_\nu^{(n)}) = f(x_\nu^{(n)})$ $\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$;

c) $|\mathsf{X}_n'(x_\nu^{(n)})| \leqq \mathsf{X}$ $\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$,

wobei $\mathsf{X}$ eine feste, von $\nu$ und $n$ unabhängige positive Zahl bedeutet. Dann gelten die Sätze:

A. *Für eine beliebige stetige Funktion* $f(x)$, $-1 \leqq x \leqq +1$, *gilt im Innern des Intervalls* $-1$, $+1$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{X}_n(x) = f(x),$$

*und zwar gleichmäßig in jedem inneren Intervalle* $-1+\delta \leqq x \leqq 1-\delta$ $(0 < \delta < 1)$.

B. *Dann und nur dann wird für jede stetige Funktion* $f(x)$, $-1 \leqq x \leqq +1$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{X}_n(1) = f(1),$$

*wenn* $-1 < \alpha < 0$ *ausfällt. Ein entsprechendes Resultat gilt für die Stelle* $x = -1$.

C. *Es sei* $-1 < \alpha < 0$. *Ist* $f(x)$ *eine beliebige, im Intervall* $-1 \leqq x \leqq +1$ *definierte stetige Funktion, so hat man für* $-1 < x \leqq +1$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{X}_n(x) = f(x),$$

*und zwar gleichmäßig im Intervall* $-1+\delta \leqq x \leqq 1$ $(0 < \delta < 2)$.

Insbesondere konvergieren die Polynome $\mathsf{X}_n(x)$ für

$$-1 < \alpha < 0, \qquad -1 < \beta < 0 \tag{3}$$

[5]) A. a. O. [3]), e), III. Teil.

*gleichmäßig im ganzen abgeschlossenen Intervalle* $-1 \leqq x \leqq +1$ *gegen die stetige Funktion* $f(x)$. Dies trifft *nicht* mehr *allgemein* zu, sobald $\alpha$ oder $\beta$ (oder beide) nichtnegativ ausfallen. Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, hervorzuheben, daß diese notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung mit der gleichfalls notwendigen und hinreichenden Bedingung für den nichtnegativen Charakter der Grundpolynome der Treppenparabeln übereinstimmt [vgl. Fejér a. a. O. [3]), e), III. Teil, §§ 1, 2; es tritt dort allerdings $\leqq 0$ an die Stelle von $< 0$ in (3)].

Die Sätze A bis C lassen sich auf die sogenannten Laguerreschen Abszissen übertragen, die in der vorliegenden Arbeit überhaupt zum ersten Male untersucht werden. Eine Besonderheit dieses Falles liegt darin, daß das zugrunde gelegte Interpolationsintervall unendlich ist. Daraus ergeben sich einige Schwierigkeiten. Trotzdem können die zu dem Beweis der obigen Sätze verwendeten Methoden auf die Laguerreschen Abszissen übertragen werden, so daß wir die Beweise stellenweise nur skizzenhaft wiederzugeben brauchen. Die Resultate lauten auch analog.

Teil I (§§ 2—5) ist den Jacobischen, Teil II (§§ 6—8) den Laguerreschen Abszissen gewidmet. Außerdem wird in einem vorbereitenden Paragraphen (§ 1) das Erforderliche aus der Theorie der Interpolation vorausgeschickt. In beiden Teilen werden gewisse asymptotische Formeln und Abschätzungen benutzt, die in je einem einleitenden Paragraphen samt einigen Hilfssätzen zusammengestellt werden. Die wichtigsten unter diesen Hilfsmitteln sind die Darbouxsche asymptotische Formel für die Jacobischen und die Fejérsche für die Laguerreschen Polynome. In einem Schlußparagraphen (§ 8) wird die Interpolation an den Nullstellen der Hermiteschen Polynome behandelt.

Bezüglich der in Betracht kommenden Literatur sei insbesondere auf die Arbeit von Fejér, a. a. O. [3]), e) hingewiesen, wo auch ein Literaturverzeichnis zu finden ist. Wir folgen übrigens in der vorliegenden Arbeit, abgesehen von kleinen Abweichungen, den Bezeichnungen von Fejér.

## § 1.

## Vorbereitendes über Interpolation.

Fragt man nach dem Polynom $(2n-1)$-ten Grades $\mathsf{X}(x)$, das an den voneinander verschiedenen Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Werte $y_1, y_2, \ldots, y_n$, dessen Ableitung ferner an denselben Stellen die Werte $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ annimmt, so lautet die Antwort:

$$\mathsf{X}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu h_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu' \mathfrak{h}_\nu(x). \tag{1}$$

Hierbei sind die „Grundpolynome“

$$(2)\qquad \begin{aligned} h_\nu(x) &= \Big[1 - \frac{\omega''(x_\nu)}{\omega'(x_\nu)}(x - x_\nu)\Big]\Big[\frac{\omega(x)}{\omega'(x_\nu)(x - x_\nu)}\Big]^2, \\ \mathfrak{h}_\nu(x) &= (x - x_\nu)\Big[\frac{\omega(x)}{\omega'(x_\nu)(x - x_\nu)}\Big]^2, \end{aligned}$$

wobei

$$(3)\qquad \omega(x) = C(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) \quad (C \neq 0,\ C = \text{konst.})$$

ist. Wir setzen ferner

$$(4)\qquad l_\nu(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_\nu)(x - x_\nu)}$$

(das sind die Grundpolynome der gewöhnlichen Lagrangeschen Interpolation) und

$$(5)\qquad v_\nu(x) = 1 - \frac{\omega''(x_\nu)}{\omega'(x_\nu)}(x - x_\nu),$$

so daß

$$(6)\qquad h_\nu(x) = v_\nu(x)[l_\nu(x)]^2, \qquad \mathfrak{h}_\nu(x) = (x - x_\nu)[l_\nu(x)]^2$$

gilt. Für $y_\nu' = 0$ $(\nu = 1, 2, \dots, n)$ verschwindet die zweite Summe in (1); man nennt die erste Summe, im Anschluß an Fejér, ein *Treppenpolynom*.

Aus (1) ergeben sich die Identitäten

$$(7)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu(x) = 1,$$

$$(8)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu h_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{h}_\nu(x) = x,$$

$$(9)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 h_\nu(x) + 2\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \mathfrak{h}_\nu(x) = x^2 \qquad (n \geqq 2),$$

die im folgenden eine wesentliche Rolle spielen.

## Teil I.

## Jacobische Abszissen.

### § 2.

### Über die Jacobischen Polynome.

**1.** Die Bezeichnung der Jacobischen Polynome soll im folgenden nach dem Vorbilde von Pólya-Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin, Julius Springer, 1925), Bd. II, Abschnitt VI, Aufgabe 98, S. 93, 292–293 (im folgenden mit P.-Sz. zitiert), geschehen. Die Parameter $\alpha$ und $\beta$ seien also $> -1$, und $y = P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ bezeichne dasjenige Polynom $n$-ten Grades, das der Differentialgleichung

$$(1)\qquad (1 - x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0$$

und der Normierungsbedingung

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n} \tag{2}$$

genügt. Es gilt [vgl. P.-Sz., Bd. II, S. 293, i)]

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+\alpha}{\nu}\binom{n+\beta}{n-\nu}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\nu}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-\nu}. \tag{3}$$

Hieraus ist die folgende nützliche Identität leicht abzulesen:

$$\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{n+\alpha+\beta+1}{2}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x). \tag{4}$$

Sie besagt, daß die Ableitungen eines Jacobischen Polynoms wieder Jacobische Polynome sind. In der Tat hat man

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n+\alpha}{\nu}\binom{n+\beta}{n-\nu}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\nu}\frac{n-\nu}{2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1-\nu}\\ &\quad+\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n+\alpha}{\nu+1}\binom{n+\beta}{n-1-\nu}\frac{\nu+1}{2}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\nu}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1-\nu}\\ &= \frac{n+\alpha+\beta+1}{2}\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n+\alpha}{\nu}\binom{n+\beta}{n-1-\nu}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\nu}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1-\nu}.\end{aligned}$$

Statt $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ schreiben wir der Kürze halber gelegentlich $P_n(x)$. (Eine Verwechselung mit den Legendreschen Polynomen ist nicht zu befürchten, da wir in der vorliegenden Arbeit keinerlei Spezialisierung der Jacobischen Polynome vorzunehmen beabsichtigen.) Für die Nullstellen $x_\nu^{(n)} = x_\nu^{(n)}(\alpha,\beta)$ von $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ schreiben wir kürzer $x_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Wir setzen schließlich $x = \cos\varphi$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi$.

**2.** Bei den Abschätzungen des § 3 spielt die folgende asymptotische Formel von Darboux[6]) eine entscheidende Rolle: Man hat für $n \to \infty$ in jedem inneren Punkte des Intervalls $-1, +1$, und zwar gleichmäßig in jedem inneren Intervalle $-1+\delta \leqq x \leqq 1-\delta$ $(0 < \delta < 1)$,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\varphi) = \frac{k(\varphi)}{\sqrt{n}}\cos(n'\varphi - \varphi_0) + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right), \tag{5}$$

wobei

$$k(\varphi) = \pi^{-\frac{1}{2}}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}; \quad n' = n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}; \tag{5'}$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)$$

---

[6]) G. Darboux, Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série. Journal de Math., 3. Serie, **4** (1878), S. 5–56, S. 377–416. Die Darbouxsche Formel gilt für *alle reellen* Parameterwerte $\alpha, \beta$.

ist. Wendet man (5) auf die rechte Seite von (4) an, so ergibt sich, daß (5) formal nach $\varphi$ differenziert werden kann:

$$\sin\varphi\, P_n'(\cos\varphi) = \sqrt{n}\, k(\varphi) \sin(n'\varphi - \varphi_0) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{6}$$

ferner

$$\sin^2\varphi\, P_n''(\cos\varphi) = -n^{\frac{3}{2}} k(\varphi) \cos(n'\varphi - \varphi_0) + O(\sqrt{n}), \tag{7}$$

wobei die $O$-Glieder stets gleichmäßig in jedem inneren Intervalle gemeint sind.

**3.** Es sei $x_\nu$ eine Nullstelle von $P_n(x)$ aus dem festen Intervalle $-1+\delta \leqq x \leqq 1-\delta$ $(0<\delta<1)$. Setzt man $x_\nu = \cos\varphi_\nu$ $(0<\varphi_\nu<\pi)$, so folgt aus (5)

$$\cos(n'\varphi_\nu - \varphi_0) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

und somit

$$|\sin(n'\varphi_\nu - \varphi_0)| = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Aus (6) erhalten wir also

$$\sqrt{1-x_\nu^2}\, |P_n'(x_\nu)| = \sqrt{n}\, k(\varphi_\nu) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{8}$$

Das letzte Glied bleibt hier, mit $\sqrt{n}$ multipliziert, absolut genommen unterhalb einer von $\nu$ und $n$ freien (nur von $\alpha, \beta, \delta$ abhängigen) Schranke.

**4.** Eine andere wichtige Anwendung der Formel (5) ist die folgende. Es seien $a, b$ fest, $-1<a<b<+1$, und $N = N(n, a, b)$ bezeichne die Anzahl derjenigen Nullstellen von $P_n(x)$, welche in dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ liegen. Dann gilt

$$N \geqq A n, \tag{9}$$

wobei $A$ eine von $n$ freie (nur von $\alpha, \beta, a, b$ abhängige) positive Konstante bedeutet.

In der Tat sieht man aus (5), daß $\frac{\varphi_0 + \lambda\pi}{n'} = \psi_\lambda$ gesetzt, $\lambda$ ganz,

$$\operatorname{sg} P_n(\cos\psi_\lambda) = (-1)^\lambda$$

wird, wenn $\cos\psi_\lambda$ in dem festen Intervall $a, b$ liegt und $n$ genügend groß gewählt wird. Die Anzahl dieser Stellen $\psi_\lambda$ ist aber offensichtlich $\geqq A n$, $A>0$. Aus (5) kann man übrigens leicht auch das schärfere Ergebnis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n, a, b)}{n} = \frac{\arccos a - \arccos b}{\pi} \tag{9'}$$

herleiten, das jedoch im folgenden nicht benutzt wird.

**5.** Schließlich sei die folgende wichtige Abschätzung der Polynome $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ vorausgeschickt. Es sei $0<\delta<1$. Man hat für $-1<\alpha<0$,

$-1 < \beta$ und für $1 - \delta \leqq x \leqq 1$

$$|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)| \leqq \mathfrak{A}\, n^{\mathrm{Max}(\alpha, -\frac{1}{2})}. \tag{10}$$

Hierbei hängt $\mathfrak{A} > 0$ nur von $\alpha, \beta, \delta$ ab.

Die Größenordnung dieser Schranke ist wegen (2) und (5) nicht zu verbessern. Sie liefert also die wahre Größenordnung von $\mathrm{Max}\, P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $-1 \leqq x \leqq +1$, die für $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ im Inneren, für $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ im rechten Endpunkte erreicht wird. Der Beweis der Ungleichung (10) findet sich für $-\frac{1}{2} \leqq \alpha < 0$ (sogar für $-\frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{1}{2}$) in der Abhandlung von H. Rau, Über die Lebesgueschen Konstanten der Reihenentwicklungen nach Jacobischen Polynomen (Journal für Math. **161** (1929), S. 237–254, vgl. S. 249). Für $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ ist der Beweis wörtlich wie dort zu führen, statt Hilfssatz II, 3 ist nur Hilfssatz II, 1 anzuwenden; er liefert in der dortigen Bezeichnung $P_n^{(\lambda)}(x) = O(n^{\lambda-1})$ $(-\frac{1}{2} < \lambda < 0)$.

**6.** Aus der Differentialgleichung (1) erhalten wir für $x = x_\nu$:

$$y = 0, \qquad \frac{y''}{y'} = \frac{\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)\, x_\nu}{1 - x_\nu^2},$$

so daß

$$v_\nu(x) = \frac{1 - x\,[\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)\, x_\nu] + (\alpha - \beta)\, x_\nu + (\alpha + \beta + 1)\, x_\nu^2}{1 - x_\nu^2} \tag{11}$$

wird. Dann und nur dann gilt $v_\nu(x) \geqq 0$ im ganzen Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ und für alle $\nu = 1, 2, \ldots, n$; $n = 1, 2, 3, \ldots$, wenn

$$-1 < \alpha \leqq 0, \qquad -1 < \beta \leqq 0 \tag{12}$$

ist[7]). Man hat ferner

$$v_\nu(1) = \frac{1 - \alpha + \beta - (1 + \alpha + \beta)\, x_\nu}{1 + x_\nu} = \frac{(1 + \beta)\,(1 - x_\nu) - \alpha\,(1 + x_\nu)}{1 + x_\nu}. \tag{13}$$

## § 3.

## Abschätzung der Grundpolynome. Beweis von Satz A.

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir zunächst den

**Satz.** *Es sei* $0 < \delta < 1$, $-1 + \delta \leqq x \leqq 1 - \delta$, $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{2}$. *Dann gilt gleichmäßig in* $x$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{|x_\nu - x| \leqq \varepsilon} |h_\nu(x)| = 1; \tag{1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{|x_\nu - x| \geqq \varepsilon} |h_\nu(x)| = 0; \tag{2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{h}_\nu(x)| = 0. \tag{3}$$

[7]) Fejér, a. a. O. [5]).

Vorbemerkung. Aus der zweiten Limesgleichung folgt wegen § 1, (7)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{|x_\nu - x| \leqq \varepsilon} h_\nu(x) = 1. \tag{1'}$$

**1.** Wir bezeichnen mit $[a, b]$ ein festes abgeschlossenes Intervall, das ganz im offenen Intervalle $(-1, +1)$ liegt und $x$ nicht enthält. Wir zeigen

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{a \leqq x_\nu \leqq b} |h_\nu(x)| = 0. \tag{4}$$

Diese Grenzwertgleichung gilt auch für ein von $x$ abhängiges (von $n$ unabhängiges) Intervall $[a, b]$, und zwar gleichmäßig für $-1+\delta \leqq x \leqq 1-\delta$, vorausgesetzt, daß das Intervall $[a, b]$ von den Punkten $-1, +1, x$ einen Abstand besitzt, der oberhalb einer festen positiven, von $x$ unabhängigen Schranke liegt. In der Tat bleibt $v_\nu(x)$ sowie auch $(x - x_\nu)^{-1}$ unter dieser Voraussetzung gleichmäßig beschränkt, so daß nur die Summe

$$\sum_{a \leqq x_\nu \leqq b} \left[\frac{P_n(x)}{P_n'(x_\nu)}\right]^2$$

abzuschätzen ist. Nun liefern die asymptotischen Formeln § 2, (5), (8)

$$\frac{P_n(x)}{P_n'(x_\nu)} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

woraus die Behauptung folgt.

**2.** Wir schreiten jetzt zum Beweis von (1) bzw. (1'). In diesen Summen unterscheidet sich $v_\nu(x)$ für alle $n$ beliebig wenig von 1, sofern $\varepsilon$ genügend klein ist. Ferner gilt nach § 2, (8)

$$\frac{1}{[P_n'(x_\nu)]^2} = \frac{1}{n}\,\frac{1-x_\nu^2}{[k(\varphi_\nu)]^2}\left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

und der Faktor $\dfrac{1-x_\nu^2}{[k(\varphi_\nu)]^2}$ unterscheidet sich beliebig wenig von $\dfrac{1-x^2}{[k(\varphi)]^2}$, wenn nur $\varepsilon$ klein genug ist. Berücksichtigt man schließlich das obige Ergebnis (4), so liefert eine aus der Theorie der singulären Integrale geläufige Schlußweise, daß es genügt,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\frac{1-x^2}{[k(\varphi)]^2} \sum_{|x_\nu - x| \leqq \varepsilon} \left[\frac{P_n(x)}{x - x_\nu}\right]^2 = 1$$

zu beweisen. Nun folgt wegen § 2, (5) durch Differentiation der logarithmischen Ableitung von $P_n(x)$

$$\sum_{|x_\nu - x| \leqq \varepsilon} \left[\frac{P_n(x)}{x - x_\nu}\right]^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\frac{P_n(x)}{x - x_\nu}\right]^2 + O(1) = [P_n'(x)]^2 - P_n(x)\,P_n''(x) + O(1)$$

und infolge von § 2, (5) bis (7)

$$[P_n'(\cos\varphi)]^2 - P_n(\cos\varphi)\,P_n''(\cos\varphi)$$
$$= n\left[\frac{k(\varphi)}{\sin\varphi}\right]^2 \sin^2(n'\varphi - \varphi_0) + n\left[\frac{k(\varphi)}{\sin\varphi}\right]^2 \cos^2(n'\varphi - \varphi_0) + O(1)$$
$$= n\left[\frac{k(\varphi)}{\sin\varphi}\right]^2 + O(1),$$

w. z. b. w.

**3.** Endlich beweisen wir für genügend kleine feste, von $x$ unabhängige, positive $\eta$, $\eta < \frac{\delta}{2}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{x_\nu \leqq -1+\eta} |h_\nu(x)| = \lim_{n\to\infty} \sum_{x_\nu \geqq 1-\eta} |h_\nu(x)| = 0. \tag{5}$$

Mit Rücksicht auf die bisherigen Resultate und auf § 1, (7) wird dies klar, wenn wir zeigen können, daß $h_\nu(x)$ in beiden Summen nichtnegativ ausfällt. Dies ist aber für genügend kleine Werte von $\eta$ gewiß der Fall, da der Zähler von $v_\nu(x)$ [§ 2, (11)] für $x_\nu = 1$ in

$$2(\alpha+1)(1-x) \geqq 2(\alpha+1)\delta > 0$$

und für $x_\nu = -1$ in

$$2(\beta+1)(1+x) \geqq 2(\beta+1)\delta > 0$$

übergeht. Damit ist auch (2) erledigt.

**4.** Dieselben Abschätzungen liefern beinahe ohne Änderung auch die Grenzwertgleichung (3). Auch hier konvergiert der Beitrag eines Intervalls $[a, b]$ von der Art wie in **1.** gegen Null. Das Intervall $x_\nu - x \leqq \varepsilon$ ergibt nach der Betrachtung in **2.** und wegen des Faktors $x - x_\nu$ in $\mathfrak{h}_\nu(x)$ ebenfalls den Grenzwert Null. Schließlich hat man

$$\sum_{x_\nu \leqq -1+\eta} |\mathfrak{h}_\nu(x)| \leqq 2 \sum_{x_\nu \leqq -1+\eta} \frac{h_\nu(x)}{v_\nu(x)}, \tag{6}$$

und eine analoge Ungleichung gilt für das andere Randintervall $x_\nu \geqq 1-\eta$. Für beide Randintervalle bleibt aber $v_\nu(x)$ oberhalb einer festen positiven Schranke im ganzen Intervalle $-1+\delta \leqq x \leqq 1-\delta$ (vgl. **3.**), womit auch (3) bewiesen ist.

**5.** Den Beweis von Satz A können wir jetzt auf eine geläufige Weise führen. Man hat

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\,h_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu'\,\mathfrak{h}_\nu(x) - f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} [f(x_\nu) - f(x)]\,h_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu'\,\mathfrak{h}_\nu(x)$$
$$= \sum_{|x_\nu - x| \leqq \varepsilon} [f(x_\nu) - f(x)]\,h_\nu(x) + \sum_{x_\nu - x > \varepsilon} [f(x_\nu) - f(x)]\,h_\nu(x) + \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu'\,\mathfrak{h}_\nu(x).$$

Infolge der gleichmäßigen Stetigkeit von $f(x)$ gilt $|f(x') - f(x'')| \leqq \omega(\varepsilon)$ für $|x' - x''| \leqq \varepsilon$, wobei $\omega(\varepsilon)$ mit $\varepsilon$ gegen Null strebt. Außerdem sei

$|f(x)| \leqq M$. Die Summen der zweiten Zeile sind somit dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\omega(\varepsilon) \sum_{|x_\nu - x| \leqq \varepsilon} |h_\nu(x)|; \qquad 2M \sum_{|x_\nu - x| > \varepsilon} h_\nu(x); \qquad \mathsf{X} \sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{h}_\nu(x)|.$$

Diese Größen konvergieren für $n \to \infty$ bzw. gegen $\omega(\varepsilon), 0, 0$, womit alles bewiesen ist.

## § 4.

## Konvergenz in den Randpunkten. Beweis von Satz B.

**1.** Zum Beweis von Satz B genügt es, den Punkt $x = 1$ zu betrachten. Nach der Formel (13) von § 2 bleibt $h_\nu(1)$ dann und nur dann für alle $\nu$ und $n$ nichtnegativ, wenn die Bedingung $-1 < \alpha \leqq 0$ erfüllt ist. Demgegenüber gilt stets $\mathfrak{h}_\nu(1) \geqq 0$. Es handelt sich nun um die Grenzwertgleichungen, vgl. § 2, (2),

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) h_\nu(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2\alpha}}{[\Gamma(\alpha+1)]^2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1-\alpha+\beta-(1+\alpha+\beta)x_\nu}{(1+x_\nu)(1-x_\nu)^2} \frac{f(x_\nu)}{[P_n'(x_\nu)]^2} = f(1), \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{h}_\nu(1) = 0. \tag{2}$$

**2.** Es sei zunächst $\alpha \geqq 0$. Die Gleichung (1) ist für

$$f(x) = 1 - \alpha + \beta - (1 + \alpha + \beta)x$$

gewiß ungültig. In der Tat sei zuerst $\alpha > 0$. Dann wird $f(1) = -2\alpha$ negativ, während die Summe in (1) nichtnegativ ausfällt, was unmöglich ist. Für $\alpha = 0$ müßte ferner der Ausdruck

$$\sum_{\nu=1}^{n} 1 \frac{1}{1+x_\nu} \frac{1}{[P_n'(x_\nu)]^2}$$

gegen Null konvergieren. Es sei nun $[a, b]$ ein festes abgeschlossenes Intervall im offenen Intervalle $(-1, +1)$. Nach § 2, (8) gilt, wenn $a \leqq x_\nu \leqq b$ ist,

$$[P_n'(x_\nu)]^2 \leqq Bn,$$

wo $B > 0$ nur von $\alpha, \beta, a, b$ abhängt. Hieraus folgt wegen § 2, (9) für die fragliche Summe eine feste, von $n$ unabhängige positive untere Schranke, was der obigen Forderung widerspricht.

**3.** Wir setzen jetzt $-1 < \alpha < 0$ voraus und beweisen dann (1) und (2). [8])

[8]) Man könnte natürlich diesen Beweis ersparen, da Satz B eine Folge von Satz C ist. (Analoges gilt für die Sätze B′, C′ in § 7.)

Da für die Nullstellen $x_\nu$ aus einem festen Intervalle $-1+\eta \leqq x_\nu \leqq 1-\eta$ $(0<\eta<1)$

$$[P_n'(x_\nu)]^2 \geqq Bn$$

gilt, $B>0$ von $n$ unabhängig, so konvergiert der Beitrag desselben zu (1) oder (2) gegen Null. Hieraus schließt man die Gültigkeit von (2) folgendermaßen. Es ist

$$\frac{\mathfrak{h}_\nu(1)}{h_\nu(1)} = \frac{1-x_\nu}{v_\nu(1)} = \frac{1-x_\nu^2}{(1+\beta)(1-x_\nu)-\alpha(1+x_\nu)},$$

so daß

$$\sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{h}_\nu(1) = \sum_{-1+\eta \leqq x_\nu \leqq 1-\eta} \mathfrak{h}_\nu(1) + \sum_{x_\nu<-1+\eta;\ x_\nu>1-\eta} \frac{1-x_\nu^2}{(1+\beta)(1-x_\nu)-\alpha(1+x_\nu)} h_\nu(1).$$

Die erste Summe rechts konvergiert für $n\to\infty$ gegen Null; die zweite ist kleiner als

$$\frac{1}{1+\beta} \sum_{x_\nu<-1+\eta} (1+x_\nu) h_\nu(1) + \frac{1}{-\alpha} \sum_{x_\nu>1-\eta} (1-x_\nu) h_\nu(1) < \eta \operatorname{Max}\left(\frac{1}{1+\beta}, \frac{1}{-\alpha}\right).$$

Da $\eta$ beliebig klein ist, so folgt hieraus (2). Andererseits erhält man aus § 1, (7), (8)

$$\sum_{\nu=1}^{n} (1-x_\nu) h_\nu(1) - \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{h}_\nu(1) = 0.$$

Hier konvergiert die zweite, also auch die erste Summe gegen Null; dasselbe ergibt sich also für

$$\sum_{x_\nu \leqq 1-\eta} (1-x_\nu) h_\nu(1),$$

ferner auch für

$$\sum_{x_\nu \leqq 1-\eta} h_\nu(1),$$

woraus die Behauptung analog wie in § 3, **5.** folgt.

## § 5.

### Gleichmäßige Konvergenz. Beweis von Satz C.

Zum Beweis von Satz C brauchen wir die Betrachtungen des letzten Paragraphen nur in einigen wenigen Punkten zu ergänzen. Hierbei wird als wichtigstes Hilfsmittel die Abschätzung (10) von § 2 herangezogen.

**1.** Es sei $-1<\alpha<0$. Wir wollen die Grenzwertgleichung

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{X}_n(\xi_n) = f(1)$$

beweisen, wobei $-1 \leqq \xi_n \leqq +1$ und $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 1$ ist. Es genügt dazu,

die Gleichungen

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{x_\nu \leqq 1-\eta} |h_\nu(\xi_n)| = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{x_\nu \geqq 1-\eta} |h_\nu(\xi_n)| = 1,$$

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{h}_\nu(\xi_n)| = 0$$

nachzuweisen, wobei $\eta$ eine beliebige feste positive Zahl, $\eta < 1$, bedeutet.

Wir zeigen zunächst (vgl. § 3, **1.**), daß die Beiträge eines festen inneren Intervalls $a \leqq x_\nu \leqq b$ $(-1 < a < b < +1)$ für $n \to \infty$ gegen Null konvergieren. In der Tat gilt

$$\sum_{a \leqq x_\nu \leqq b} |h_\nu(\xi_n)| \leqq A\,[P_n(\xi_n)]^2 \sum_{a \leqq x_\nu \leqq b} \frac{1}{[P_n'(x_\nu)]^2} \leqq B\,[P_n(\xi_n)]^2 \leqq C n^{\operatorname{Max}(2\alpha,\,-1)},$$

wo die positiven Konstanten $A, B, C$ von $n$ unabhängig sind. Der letzte Ausdruck konvergiert gegen Null. Entsprechendes gilt für die Summe (2). Man darf somit die Zahl $\eta$ in (1) beliebig klein wählen.

Da der Zähler von $v_\nu(x)$ in § 2, (11) für $x = 1$ in

$$(1 - x_\nu)\,[(1+\beta)(1-x_\nu) - \alpha(1+x_\nu)]$$

übergeht, so bleibt $h_\nu(\xi_n)$ in der ersten Summe von (1) nichtnegativ, sobald $n$ genügend groß ist. Ferner gilt $\alpha - \beta + (\alpha+\beta+2)\,x_\nu > 0$, wenn $x_\nu$ genügend nahe an 1 liegt; dann hat man aber (sogar im ganzen Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$): $v_\nu(x) \geqq v_\nu(1) \geqq 0$. Daraus folgt, daß $h_\nu(\xi_n)$ auch in der zweiten Summe nichtnegativ ausfällt, vorausgesetzt, daß $\eta$ genügend klein gewählt wird. Dann ist aber (1) eine Folge von

$$(1') \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{x_\nu \leqq 1-\eta} h_\nu(\xi_n) = 0.$$

Bevor wir (1′) beweisen, zeigen wir die Richtigkeit von (2). Es ist wegen § 2, (11)

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{h}_\nu(\xi_n)| = \sum_{-1+\eta \leqq x_\nu \leqq 1-\eta} |\mathfrak{h}_\nu(\xi_n)|$$

$$+ \sum_{x_\nu < -1+\eta;\; x_\nu > 1-\eta} |\xi_n - x_\nu| \frac{1 - x_\nu^2}{1 - \xi_n[\alpha-\beta+(\alpha+\beta+2)x_\nu] + (\alpha-\beta)x_\nu + (\alpha+\beta+1)x_\nu^2}\, h_\nu(\xi_n).$$

Die erste Summe rechts konvergiert gegen Null. In dem Teil $x_\nu < -1+\eta$ der zweiten beachte man, daß der Nenner für $\xi_n = 1$, $x_\nu = -1$ in $4\,(1+\beta)$ übergeht, folglich oberhalb einer festen positiven, von $n$ und $\eta$ unabhängigen Schranke $K$ liegt. In dem Teil $x_\nu > 1-\eta$ ist $v_\nu(\xi_n) \geqq v_\nu(1)$, so daß der Faktor von $h_\nu(\xi_n)$ für genügend große $n$ kleiner als

$$|\xi_n - x_\nu| \frac{1+x_\nu}{(1+\beta)(1-x_\nu) - \alpha(1+x_\nu)} \leqq \frac{1}{-\alpha} |\xi_n - x_\nu| \leqq \frac{\eta}{-\alpha}$$

wird. Damit erhalten wir für die ganze zweite Summe die Schranke

$$\frac{1}{K}\sum_{x_\nu<-1+\eta}|\xi_n-x_\nu|(1-x_\nu^2)h_\nu(\xi_n)+\frac{\eta}{-\alpha}\sum_{x_\nu>1-\eta}h_\nu(\xi_n)$$
$$\leqq\eta\,\mathrm{Max}\left(\frac{4}{K},\frac{1}{-\alpha}\right)\sum_{x_\nu<-1+\eta;\,x_\nu>1-\eta}h_\nu(\xi_n)\leqq\eta\,\mathrm{Max}\left(\frac{4}{K},\frac{1}{-\alpha}\right).$$

Da $\eta$ beliebig klein gewählt werden kann, so folgt hieraus (2).

Nun ist nach § 1, (7), (8)

$$\sum_{\nu=1}^{n}(1-x_\nu)h_\nu(\xi_n)=\sum_{\nu=1}^{n}\mathfrak{h}_\nu(\xi_n)+1-\xi_n.$$

Die linke Seite konvergiert hier wegen (2) gegen Null, dasselbe gilt also für

$$\sum_{x_\nu\leqq 1-\eta}(1-x_\nu)h_\nu(\xi_n),$$

woraus (1′) folgt. Damit ist Satz C bewiesen.

## Teil II.

## Laguerresche Abszissen.

### § 6.

### Über die Laguerreschen Polynome.

**1.** Bezüglich der Definition und wichtigsten Eigenschaften der Laguerreschen Polynome verweisen wir auf P.-Sz., Bd. II, Abschnitt VI, Aufgabe 99, S. 94, S. 293—294. Der Parameter $\alpha$ sei durchweg größer als $-1$. Man kann $y=L_n^{(\alpha)}(x)$ als das Polynom $n$-ten Grades definieren, das der Differentialgleichung

$$x\,y''+(\alpha+1-x)\,y'+n\,y=0 \tag{1}$$

und der Normierungsbedingung

$$L_n^{(\alpha)}(0)=\binom{n+\alpha}{n} \tag{2}$$

genügt. Es gilt, wie bei den Jacobischen Polynomen[9]),

$$\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x)=-L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x), \tag{3}$$

so daß die Ableitung eines Laguerreschen Polynoms wieder ein solches ist. Wir schreiben im folgenden oft kurz $L_n^{(\alpha)}(x)=L_n(x)$. Die Nullstellen $x_\nu^{(n)}$ von $L_n^{(\alpha)}(x)$ bezeichnen wir der Kürze halber mit $x_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots,n)$; sie sind reell, positiv und einfach.

**2.** In den nachfolgenden Untersuchungen spielt eine asymptotische Formel der Laguerreschen Polynome eine wichtige Rolle. Sie rührt von

[9]) Vgl. P.-Sz., a. a. O., S. 294, b).

Fejér her[10]) und lautet folgendermaßen: Es gilt gleichmäßig in jedem endlichen positiven Intervalle $\delta \leqq x \leqq \omega \quad (\delta > 0)$

$$(4) \qquad L_n^{(\alpha)}(x) = k(x)\, n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \cos(2\sqrt{nx} - x_0) + O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right),$$

wobei

$$(4') \qquad k(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}; \qquad x_0 = \frac{\pi}{2}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$$

ist. Man zeigt mit Hilfe von (3) analog wie in § 2

$$(5) \qquad \frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = -k(x)\, n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{n}{x}} \sin(2\sqrt{nx} - x_0) + O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right),$$

$$(6) \qquad \frac{d^2}{dx^2} L_n^{(\alpha)}(x) = -k(x)\, n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \frac{n}{x} \cos(2\sqrt{nx} - x_0) + O\left(n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\right),$$

wo sämtliche $O$-Abschätzungen gleichmäßig in einem beliebigen festen endlichen positiven Intervalle $\delta \leqq x \leqq \omega$ gelten.

**3.** Es sei $x_\nu$ eine Nullstelle von $L_n^{(\alpha)}(x)$, die in dem festen endlichen positiven Intervalle $\delta \leqq x \leqq \omega$ liegt. Aus (4) folgt

$$\cos(2\sqrt{n x_\nu} - x_0) = O(n^{-\frac{1}{2}})$$

und somit

$$|\sin(2\sqrt{n x_\nu} - x_0)| = 1 + O(n^{-1}).$$

Aus (5) erhalten wir also

$$(7) \qquad |L_n'(x_\nu)| = x_\nu^{-\frac{1}{2}} k(x_\nu)\, n^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} + O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right).$$

Das Restglied bleibt nach Multiplikation mit $n^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}$ unterhalb einer von $\nu$ und $n$ unabhängigen (nur von $\alpha, \delta, \omega$ abhängigen) Schranke.

**4.** Es sei $0 < a < b$ und $N = N(n, a, b)$ bezeichne die Anzahl derjenigen Nullstellen von $L_n^{(\alpha)}(x)$, welche in dem Intervalle $a \leqq x \leqq b$ liegen. Dann gilt

$$(8) \qquad A\sqrt{n} \leqq N \leqq B\sqrt{n},$$

wobei $A$ und $B$ positiv sind und nur von $\alpha, a, b$ abhängen. Man hat sogar (was im folgenden nicht benutzt wird)

$$(8') \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{N(n,a,b)}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a}).$$

Die untere Abschätzung (8) wird analog wie § 2, (9) bewiesen. Es sei $\xi_k$ durch

$$2\sqrt{n\xi_k} - x_0 = k\pi$$

[10]) Comptes Rendus **147** (1908), S. 1040; Math. és Term. Értesitö 27 (1909), S. 1–33.

definiert, wobei $k$ positiv ganz ist und so gewählt wird, daß $a \leqq \xi_k \leqq b$ gilt. Dann hat man, sofern $n$ genügend groß ist,

$$\operatorname{sg} L_n^{(\alpha)}(\xi_k) = (-1)^k,$$

so daß $L_n^{(\alpha)}(x)$ zwischen $\xi_k$ und $\xi_{k+1}$ mindestens einmal verschwindet. Daß in diesem Intervalle (für große $n$) genau eine Nullstelle liegt, sieht man so ein. Wir definieren $\xi_k'$ und $\xi_k''$ durch

$$2\sqrt{n\,\xi_k'} - x_0 = k\pi - \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad 2\sqrt{n\,\xi_k''} - x_0 = k\pi + \varepsilon,$$

wobei $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ ist. Dann hat die Funktion $L_n^{(\alpha)}(x)$ für genügend große $n$ zwischen $\xi_k'$ und $\xi_k''$ überhaupt keine Nullstellen, ferner ist sie wegen (5) *monoton* zwischen $\xi_k''$ und $\xi_{k+1}'$, so daß sie daselbst höchstens einmal verschwindet. Daraus folgt die obere Abschätzung (8) und sogar (8′).

Bemerkung. Die obere Abschätzung (8) gilt auch für $a = 0$, d. h. für das Intervall $0 \leqq x \leqq b$, wo $b$ eine feste positive Zahl bedeutet. Man beweist dies etwa auf Grund der Tatsache, daß die Funktionen

$$L_n^{(\alpha)}(x),\ L_{n-1}^{(\alpha)}(x),\ \ldots,\ L_1^{(\alpha)}(x),\ L_0^{(\alpha)}(x) \tag{9}$$

im Intervalle $0 \leqq x \leqq b$ eine *Sturmsche Kette* bilden, vorausgesetzt, daß $L_n^{(\alpha)}(b)$ nicht verschwindet. In der Tat gilt die Rekursion[11])

$$n\,L_n^{(\alpha)}(x) = (-x + 2n + \alpha - 1)\,L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha - 1)\,L_{n-2}^{(\alpha)}(x) \tag{10}$$
$$(n = 2, 3, 4, \ldots),$$

ferner die Gleichung

$$x\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x) = n\,L_n^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha)\,L_{n-1}^{(\alpha)}(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{11}$$

woraus man sämtliche charakteristischen Eigenschaften der Sturmschen Kette ablesen kann. Folglich ist $N = N(n, 0, b)$ gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge (9) für $x = b$. Nun stimmt nach (4) das Vorzeichen von $L_m^{(\alpha)}(b)$ für genügend große $m$, $m \geqq m_0$, mit dem von $\cos(2\sqrt{m\,b} - x_0)$ überein, vorausgesetzt, daß

$$|\cos(2\sqrt{m\,b} - x_0)| > \frac{H}{\sqrt{m}}, \tag{12}$$

wobei $H$ eine feste positive Zahl bedeutet. Es gilt somit

$$\operatorname{sg} L_m^{(\alpha)}(b) = (-1)^\nu,$$

wenn $m \geqq m_0$ und

$$(2\nu - 1)\frac{\pi}{2} + \frac{K}{\nu} \leqq 2\sqrt{m\,b} - x_0 \leqq (2\nu + 1)\frac{\pi}{2} - \frac{K}{\nu}$$

---

[11]) Vgl. P.-Sz., a. a. O., S. 294, d); die Gleichung (11) ist z. B. aus der dort unter h) mitgeteilten erzeugenden Reihe abzuleiten.

ist, $\nu$ positiv ganz, $K$ eine geeignete feste positive Zahl. In der Tat ist (12) gewiß erfüllt, sobald

$$\sin \frac{K}{\nu} > \frac{H}{\sqrt{m}}$$

gilt, was für $K > \frac{2\sqrt{b}}{\pi} H$ und für genügend große $\nu = \nu(m)$ sicherlich zutrifft. Die Anzahl der $m$-Werte, welche keiner dieser Ungleichungen genügen und $n$ nicht übertreffen, ist aber $= O(\sqrt{n})$; in der Tat ist die Anzahl der $m$-Werte mit

$$(2\nu - 1)\frac{\pi}{2} - \frac{K}{\nu - 1} < 2\sqrt{mb} - x_0 < (2\nu - 1)\frac{\pi}{2} + \frac{K}{\nu}$$

offensichtlich beschränkt.

**5.** Im folgenden brauchen wir die für $0 \leqq x \leqq a$ $(a > 0)$ gleichmäßig gültige Abschätzung

$$|L_n^{(\alpha)}(x)| \leqq \mathfrak{A}\, n^{\operatorname{Max}\left(\alpha, \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\right)}, \tag{13}$$

wo $\mathfrak{A} > 0$ von $x$ und $n$ unabhängig ist (nur von $\alpha$, $a$ abhängt). Die Größenordnung der rechten Seite ist $n^\alpha$ für $\alpha \geqq -\frac{1}{2}$ und $n^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}$ für $-1 < \alpha \leqq -\frac{1}{2}$. Wegen (2) und (4) ist dieses Resultat nicht zu verbessern. Wir sehen daraus, daß das Maximum von $|L_n^{(\alpha)}(x)|$ für $0 \leqq x \leqq a$ in der Umgebung des Endpunktes $x = 0$ erreicht wird, wenn $\alpha > -\frac{1}{2}$ ist, dagegen in einem festen positiven Intervalle, wenn $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ gilt. Es findet im ersten Falle, wie bei den Jacobischen Polynomen, eine Erhöhung der Größenordnung in der Umgebung des Endpunktes statt.

Wir leiten (13) aus der Le Royschen Integraldarstellung[12])

$$e^{-x} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\omega}\, \omega^{n + \frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{\omega x})\, d\omega \tag{14}$$

her, worin $J_\alpha$ die Besselsche Funktion erster Art von der Ordnung $\alpha$ bedeutet. Es gilt bekanntlich

$$\begin{aligned} |J_\alpha(y)| &\leqq A\, y^\alpha \quad \text{für} \quad 0 < y < 1, \\ |J_\alpha(y)| &\leqq \frac{A}{\sqrt{y}} \quad \text{für} \quad y > 1, \end{aligned} \tag{15}$$

wo $A > 0$ von $y$ frei ist. Man hat somit für $x > 0$

$$|e^{-x} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(x)| \leqq B \frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{n!} \int_0^{x^{-1}} e^{-\omega}\, \omega^{n+\alpha}\, d\omega + C \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{n!} \int_{x^{-1}}^\infty e^{-\omega}\, \omega^{n + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}}\, d\omega,$$

[12]) Ann. de la Fac. Toulouse, Serie 2, 2 (1900), S. 317–430; vgl. insbesondere S. 379–384.

$B > 0$, $C > 0$ von $x$ und $n$ frei. Es sei nun $\alpha \geqq -\frac{1}{2}$. Im zweiten Integral wird

$$\omega^{n+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} = \omega^{n+\alpha} \cdot \omega^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \leqq \omega^{n+\alpha} \cdot x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}},$$

so daß

$$|e^{-x} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(x)| \leqq \mathrm{Max}(B, C) \frac{x^{\frac{\alpha}{2}}}{n!} \int_0^\infty e^{-\omega} \omega^{n+\alpha} d\omega \leqq D x^{\frac{\alpha}{2}} n^\alpha,$$

$D > 0$ von $x$ und $n$ frei. Es sei andererseits $-1 < \alpha \leqq -\frac{1}{2}$. Dann ist $x^{-\frac{1}{4}} \leqq x^{\frac{\alpha}{2}} a^{-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}$ für $0 < x \leqq a$, so daß

$$|e^{-x} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(x)| \leqq \mathrm{Max}\left(B, C a^{-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}\right) x^{\frac{\alpha}{2}} \left\{ \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\omega} \omega^{n+\alpha} d\omega + \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\omega} \omega^{n+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \right.$$
$$\leqq D x^{\frac{\alpha}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}},$$

w. z. b. w.[13])

**6.** Aus der Differentialgleichung (1) erhalten wir für $x = x_\nu$

$$y = 0, \quad \frac{y''}{y'} = -\frac{\alpha+1-x_\nu}{x_\nu},$$

so daß

$$(16) \qquad v_\nu(x) = 1 + \frac{\alpha+1-x_\nu}{x_\nu}(x - x_\nu) = \frac{x_\nu^2 - \alpha x_\nu + x(\alpha+1-x_\nu)}{x_\nu}.$$

Da der Koeffizient von $x$ für genügend große $x_\nu$ negativ ausfällt, so wechselt $v_\nu(x)$ für $x \geqq 0$ bei geeignetem $\nu$ bestimmt das Vorzeichen. Man hat ferner

$$(17) \qquad v_\nu(0) = x_\nu - \alpha.$$

## § 7.

## Das Analogon der Sätze A, B, C.

Es sei $L_n^{(\alpha)}(x)$ das $n$-te Laguerresche Polynom, $\alpha > -1$. Seine Nullstellen $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ sind sämtlich positiv (Laguerresche Abszissen). Wir ordnen zu einer beliebigen, für $x \geqq 0$ definierten *stetigen und beschränkten* Funktion $f(x)$ eine Folge von Polynomen $X_n(x)$ zu, die nach der Vorschrift a), b), c) auf S. 581 erklärt sind. Dann gelten die Sätze:

---

[13]) Es gilt sogar genauer, wie aus dem obigen Beweis ersichtlich ist, für $x \geqq 0$

$$|e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x)| \leqq \begin{cases} A n^\alpha & \text{für } \alpha \geqq -\frac{1}{2}, \\ A n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \mathrm{Max}\left(1, x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right) & \text{für } -1 < \alpha \leqq -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

wo $A > 0$ von $x$ und $n$ unabhängig ist (nur von $\alpha$ abhängt).

A′. *Für jedes positive $x$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} X_n(x) = f(x),$$

*und zwar gleichmäßig in jedem endlichen positiven Intervalle $\delta \leqq x \leqq \omega$ $(\delta > 0)$.*

B′. *Dann und nur dann gilt für alle stetigen und beschränkten Funktionen $f(x)$*

$$\lim_{n\to\infty} X_n(0) = f(0),$$

*wenn $-1 < \alpha < 0$ ist.*

C′. *Es sei $-1 < \alpha < 0$. Die Grenzwertgleichung in* A′ *gilt dann gleichmäßig in jedem endlichen nichtnegativen Intervalle, d. h. für $0 \leqq x \leqq \omega$.*

Zum Beweise sind die Gedankengänge in den §§ 3 bis 5 nur in geringfügigem Maße zu modifizieren. Wir können also auf die Ausführung im einzelnen verzichten, wir werden vielmehr nur die abweichenden Punkte in den Beweisen darlegen.

**1.** Beweis von A′. Wir zeigen die gleichmäßige Gültigkeit der Gleichungen (1) bis (3) von § 3, $\delta \leqq x \leqq \omega$, wobei $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{2}$ gilt. Dazu wählen wir zunächst die positive Zahl $\eta$ kleiner als $\left(\omega + \frac{\delta}{2}\right)^{-1}$, ferner so klein, daß $v_\nu(x)$ für $x_\nu \leqq \eta$ und für $x_\nu \geqq \eta^{-1}$ positiv ausfällt. Wegen § 6, (16) ist dies gewiß möglich. Die Anzahl der Nullstellen $x_\nu$ in den Intervallen $\eta \leqq x_\nu \leqq x - \varepsilon$ und $x + \varepsilon \leqq x_\nu \leqq \eta^{-1}$ ist kleiner als konst. $\sqrt{n}$ [vgl. § 6, (8)]. Ferner hat man nach § 6, (4) und (7)

$$\frac{L_n(x)}{L_n'(x_\nu)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

so daß die Beiträge dieser Intervalle gegen Null konvergieren.

Weiter betrachten wir den Beitrag des Intervalls $|x_\nu - x| \leqq \varepsilon$. Die Schlußweise in § 3, **2.** liefert hier mit Rücksicht auf § 6, (7), daß es völlig genügt,

$$\lim_{n\to\infty} x\,[k(x)]^{-2}\, n^{-\alpha-\frac{1}{2}} \sum_{|x_\nu - x| \leqq \varepsilon} \left[\frac{L_n(x)}{x - x_\nu}\right]^2 = 1$$

nachzuweisen. Erstreckt man die letzte Summe über $x_\nu \leqq \Omega$, so ist der hinzugekommene Teil [vgl. die Bemerkung zu § 6, (8)] gleich $O\left(n^{-\alpha-\frac{1}{2}} \cdot n^{\alpha-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{n}\right) \to 0$, während die Teilsumme für $x_\nu \geqq \Omega$ $(\Omega > \omega)$

$$< x\,[k(x)]^{-2}\, n^{-\alpha-\frac{1}{2}}\, [L_n(x)]^2\, (\Omega - \omega)^{-2}\, n$$

wird. Der Faktor von $(\Omega - \omega)^{-2}$ bleibt hier beschränkt; da man $\Omega$ beliebig groß wählen kann, so reduziert sich die Behauptung auf

$$\lim_{n\to\infty} x\,[k(x)]^{-2}\, n^{-\alpha-\frac{1}{2}} \sum_{\nu=1}^{n} \left[\frac{L_n(x)}{x - x_\nu}\right]^2 = 1.$$

Dies zeigt man analog wie in § 3 mittels der Formeln (4) bis (6) von § 6.

Die Beiträge der Intervalle $x_\nu \leqq \eta$ und $x_\nu \geqq \eta^{-1}$ erledigt man wie in § 3, **3.** Die Abschätzung von $\sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{h}_\nu(x)|$ erfolgt analog wie in § 3, **4.** Auch an dem Konvergenzbeweis in § 3, **5.** ist nichts Wesentliches zu ändern.

**2.** Nach § 6, (17) gilt dann und nur dann $v_\nu(0) \geqq 0$ für alle Werte von $\nu$ und $n$, wenn $-1 < \alpha \leqq 0$ ist. Es ist ferner stets $\mathfrak{h}_\nu(0) \leqq 0$. Zur Diskussion stehen für $x = 0$ die Gleichungen

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu)\, h_\nu(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2\alpha}}{[\Gamma(\alpha+1)]^2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu - \alpha}{x_\nu^2} \frac{f(x_\nu)}{[L_n'(x_\nu)]^2} = f(0),$$

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{h}_\nu(0) = 0.$$

Man erkennt an dem Beispiel $f(x) = e^{-x}(x-\alpha)$ (vgl. § 4), daß $-1 < \alpha < 0$ sein muß. Es sei diese Bedingung erfüllt. Der Beitrag eines festen endlichen positiven Intervalls $a \leqq x_\nu \leqq b$ $(a > 0)$ zu (1) oder (2) konvergiert für $n \to \infty$ gegen Null. Aus

$$\frac{\mathfrak{h}_\nu(0)}{h_\nu(0)} = \frac{-x_\nu}{v_\nu(0)} = \frac{-x_\nu}{x_\nu - \alpha}$$

folgt ferner für $0 < \eta < 1$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{h}_\nu(0) = \sum_{\eta \leqq x_\nu \leqq \eta^{-1}} \mathfrak{h}_\nu(0) - \sum_{x_\nu < \eta;\, x_\nu > \eta^{-1}} \frac{x_\nu}{x_\nu - \alpha} h_\nu(0)$$

$$\geqq \sum_{\eta \leqq x_\nu \leqq \eta^{-1}} \mathfrak{h}_\nu(0) - \frac{\eta}{-\alpha} - \sum_{x_\nu > \eta^{-1}} h_\nu(0).$$

Aus § 1, (8) erhält man aber

$$(3) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu h_\nu(0) = -\sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{h}_\nu(0) \leqq -\sum_{\eta \leqq x_\nu \leqq \eta^{-1}} \mathfrak{h}_\nu(0) + \frac{\eta}{-\alpha} + \sum_{x_\nu > \eta^{-1}} h_\nu(0)$$

und erst recht

$$\eta^{-1} \sum_{x_\nu > \eta^{-1}} h_\nu(0) \leqq -\sum_{\eta \leqq x_\nu \leqq \eta^{-1}} \mathfrak{h}_\nu(0) + \frac{\eta}{-\alpha} + \sum_{x_\nu > \eta^{-1}} h_\nu(0).$$

Hieraus schließt man

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{x_\nu > \eta^{-1}} h_\nu(0) \leqq \frac{\eta}{-\alpha} \frac{1}{\eta^{-1} - 1}.$$

Da die letzte Größe mit $\eta$ beliebig klein wird, so hat man wegen (3)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{h}_\nu(0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu h_\nu(0) = 0,$$

folglich auch

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{x_\nu > \eta} x_\nu h_\nu(0) = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{x_\nu > \eta} h_\nu(0) = 0.$$

Damit ist Satz B′ bewiesen.

**3.** Zum Beweis von Satz C′ zeigen wir:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{x_\nu \geqq \eta} |h_\nu(\xi_n)| = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{x_\nu \leqq \eta} |h_\nu(\xi_n)| = 1, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{h}_\nu(\xi_n)| = 0, \tag{5}$$

wobei $\xi_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$ und $\eta > 0$ fest ist. Zunächst konvergieren die Beiträge eines festen endlichen positiven Intervalls wieder gegen Null; dies beruht in diesem Falle auf § 6, (7) und (13). Ferner wird $h_\nu(\xi_n)$ nach § 6, (16) in beiden Summen (4) nichtnegativ, wenn nur

$$\eta \leqq \alpha + 1 \quad \text{und} \quad -\alpha - \xi_n \geqq 0$$

gilt. Dies sei im folgenden der Fall. Dann genügt es, statt (4)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{x_\nu \geqq \eta} h_\nu(\xi_n) = 0 \tag{4′}$$

zu beweisen. Man hat

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{h}_\nu(\xi_n)|$$

$$= \sum_{\eta \leqq x_\nu \leqq \eta^{-1}} |\mathfrak{h}_\nu(\xi_n)| + \sum_{x_\nu < \eta\,;\, x_\nu > \eta^{-1}} |\xi_n - x_\nu| \frac{x_\nu}{x_\nu^2 - \alpha x_\nu + \xi_n(\alpha + 1 \quad x_\nu)} h_\nu(\xi_n).$$

Die erste Summe konvergiert gegen Null. In dem Teil $x_\nu < \eta$ der zweiten ist der Faktor von $h_\nu(\xi_n)$

$$\leqq \frac{|\xi_n - x_\nu|}{x_\nu - \alpha} \leqq \frac{\eta}{-\alpha},$$

sobald $\xi_n \leqq \eta$ ausfällt; in dem Teil $x_\nu > \eta^{-1}$ ist derselbe Faktor $\leqq 1$ (da der Nenner $\geqq x_\nu^2$ ist), so daß

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{h}_\nu(\xi_n)| \leqq \sum_{\eta \leqq x_\nu \leqq \eta^{-1}} |\mathfrak{h}_\nu(\xi_n)| + \frac{\eta}{-\alpha} + \sum_{x_\nu > \eta^{-1}} h_\nu(\xi_n).$$

Aus § 1, (8) folgt aber

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu h_\nu(\xi_n) = -\sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{h}_\nu(\xi_n) + \xi_n$$

$$\leqq \sum_{\eta \leqq x_\nu \leqq \eta^{-1}} |\mathfrak{h}_\nu(\xi_\nu)| + \frac{\eta}{-\alpha} + \sum_{x_\nu > \eta^{-1}} h_\nu(\xi_n) + \xi_n,$$

woraus wie oben in 2.

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{x_\nu > \eta^{-1}} h_\nu(\xi_n) \leqq \frac{\eta}{-\alpha} \frac{1}{\eta^{-1}-1}$$

hervorgeht. Hieraus ergibt sich (5), sowie

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu h_\nu(\xi_n) = 0$$

und als eine Folge dieser Gleichung schließlich (4′).

## § 8.

## Hermitesche Abszissen.

Wir schließen unsere Untersuchungen mit der Betrachtung von Interpolationsreihen, die zu den Nullstellen der Hermiteschen Polynome als Interpolationsstellen gehören. Diese Polynome hängen mit den Laguerreschen aufs engste zusammen, Doch folgen die entsprechenden Konvergenzsätze keineswegs aus den Ergebnissen von § 7.

**1.** Das $n$-te Hermitesche Polynom $H_n(x)$ (vgl. P.-Sz., Bd. II, Abschn. VI, Aufgabe 100, S. 94, S. 294 — 295) kann als das Polynom genau $n$-ten Grades definiert werden, das der Differentialgleichung

$$y'' - x\,y' + n\,y = 0 \tag{1}$$

genügt. Seine Normierung werden wir weiter unten auf passende Weise vornehmen. Man zeigt leicht auf Grund von (1) und § 6, (1), daß [vgl. P.-Sz. a. a. O., Aufgabe 102, S. 95, S. 295[14])]

$$H_n(x) = \text{konst.}\, L_q^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right) \quad \text{für gerade } n, \quad n = 2q, \tag{2'}$$

und

$$H_n(x) = \text{konst.}\, x\, L_q^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right) \quad \text{für ungerade } n, \quad n = 2q+1, \tag{2''}$$

gilt. (Die konstanten Faktoren sind natürlich beidemal von Null verschieden.) Die Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von $H_n(x)$ sind reell und einfach, außerdem symmetrisch zu $x = 0$ verteilt, so daß $H_n(0)$ dann und nur dann verschwindet, wenn $n$ ungerade ist.

Auf Grund von § 6, (4) ist es nicht schwer, eine asymptotische Formel für $H_n(x)$ aufzustellen. Man hat bei geeigneter Wahl der obigen konstanten Faktoren

$$e^{-\frac{x^2}{4}} H_n(x) = \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(\sqrt{n}\,x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \tag{3}$$

[14]) Der dort angegebene Beweis beruht nicht auf der Differentialgleichung (1), sondern auf der Orthogonalitätseigenschaft der Hermiteschen Polynome.

wobei cos bzw. sin zu nehmen ist, je nachdem ob $n$ gerade oder ungerade ausfällt. Die $O$-Abschätzung gilt gleichmäßig in jedem endlichen, den Nullpunkt nicht enthaltenden Intervalle $a \leqq x \leqq b$. Hieraus erhält man analoge Abschätzungen wie in § 6 für $|H_n'(x_\nu)|$, wo $a \leqq x_\nu \leqq b$ ist, sowie für die Anzahl der Nullstellen von $H_n(x)$ im Intervall $[a, b]$; im letzteren Falle darf sogar dieses Intervall auch den Nullpunkt enthalten.

Wir brauchen ferner die für $-a \leqq x \leqq a$ $(a > 0)$ gültige Abschätzung

$$|H_n(x)| \leqq A, \tag{4}$$

wobei $A > 0$ nur von $a$ abhängt. Für gerade $n$ folgt dies aus § 6, (13), da die Größenordnung von $L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x)$ in der Nähe von $x = 0$ mit der für positive $x$ übereinstimmt. Für ungerade $n$ liefert § 6, (13) zunächst lediglich

$$|H_n(x)| \leqq A|x|\sqrt{n}.$$

Man erhält nun aus § 6, (14) mit Rücksicht auf die bekannte Formel

$$J_{\frac{1}{2}}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi y}} \sin y$$

die folgende Darstellung

$$e^{-x} x^{\frac{1}{2}} L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) = \frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{n!} \int_0^\infty e^{-\omega} \omega^n \sin 2\sqrt{\omega x}\, d\omega,$$

so daß für jedes $x \geqq 0$

$$\left| e^{-x} x^{\frac{1}{2}} L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x) \right| \leqq \pi^{-\frac{1}{2}}$$

gilt. Hieraus folgt (4) auch für ungerade $n$.

Aus der Differentialgleichung (1) erhalten wir für $x = x_\nu$

$$y = 0, \quad \frac{y''}{y'} = x_\nu,$$

so daß

$$v_\nu(x) = 1 - x_\nu(x - x_\nu) = 1 - x_\nu x + x_\nu^2. \tag{5}$$

Für $|x| \leqq 2$ bleiben sämtliche $v_\nu(x)$ nichtnegativ.

**2.** Wir ordnen nun auf die übliche Weise zu einer für jedes reelle $x$ definierten stetigen und beschränkten Funktion $f(x)$ eine Folge von Polynomen $\mathsf{X}_n(x)$ zu, die nach der Vorschrift a), b), c) auf S. 581 erklärt sind. *Dann gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{X}_n(x) = f(x) \tag{6}$$

*für jedes $x$, und zwar gleichmäßig in jedem endlichen Intervalle.*

Die gleichmäßige Gültigkeit von (6) in einem den Nullpunkt *nicht* enthaltenden endlichen Intervalle kann ähnlich wie in § 7, **1.** gezeigt werden; für genügend kleine und genügend große Werte von $|x_\nu|$ ist $v_\nu(x)$ positiv,

sogar oberhalb einer festen positiven Schranke gelegen. Bei dem Beweis der gleichmäßigen Konvergenz in der Umgebung des Nullpunktes muß

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{|x_\nu|\leqq\eta} h_\nu(\xi_n) = 0, \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{h}_\nu(\xi_n)| = 0 \tag{8}$$

gezeigt werden, wobei $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$, $\eta > 0$ fest ist. Wir wählen $\eta < 2^{-\frac{1}{2}}$.

Zum Beweis von (8) können die Abschätzungen von § 7, **3.** etwas vereinfacht und denen von § 5 angeglichen werden[15]). In der Tat gilt

$$\frac{\mathfrak{h}_\nu(x)}{h_\nu(x)} = \frac{x - x_\nu}{1 - x_\nu x + x_\nu^2},$$

so daß

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\mathfrak{h}_\nu(\xi_n)| = \sum_{\eta\leqq|x_\nu|\leqq\eta^{-1}} |\mathfrak{h}_\nu(\xi_n)| + \sum_{|x_\nu|<\eta;\,|x_\nu|>\eta^{-1}} \frac{|\xi_n - x_\nu|}{1 - x_\nu\xi_n + x_\nu^2} h_\nu(\xi_n). \tag{9}$$

Die erste Summe konvergiert wegen (4) gegen Null. Die zweite ist für genügend große $n$

$$\leqq \frac{2\eta}{1-\eta^2} \sum_{|x_\nu|<\eta} h_\nu(\xi_n) + \eta \sum_{|x_\nu|>\eta^{-1}} h_\nu(\xi_n) \leqq \frac{2\eta}{1-\eta^2},$$

da der Nenner in (9) für $x_\nu > \eta^{-1}$ durch Weglassen von 1 verkleinert wird. Hieraus folgt schon (8). Zum Beweis von (7) benutzen wir die Identität § 1, (9), aus der durch eine leichte Modifikation der obigen Abschätzung von (9) zunächst

$$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 h_\nu(\xi_n) \leqq 2 \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu |\mathfrak{h}_\nu(\xi_n)| + \xi_n^2$$

$$\leqq 2 \sum_{\eta\leqq|x_\nu|\leqq\eta^{-1}} |x_\nu| |\mathfrak{h}_\nu(\xi_n)| + \frac{4\eta^2}{1-\eta^2} + 2 \sum_{x_\nu>\eta^{-1}} h_\nu(\xi_n) + \xi_n^2,$$

also wie in § 7, **3.**

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{|x_\nu|>\eta^{-1}} h_\nu(\xi_n) \leqq \frac{4\eta^2}{1-\eta^2} \frac{1}{\eta^{-2}-2}$$

folgt. Da $\eta$ beliebig klein gewählt werden kann, so erhält man hieraus

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 h_\nu(\xi_n) = 0$$

und schließlich die Grenzwertgleichung (7).

[15]) Dies liegt daran, daß $v_\nu(x)$ für $x_\nu \to \infty$ quadratisch unendlich wird, im Gegensatz zu dem Fall der Laguerreschen Abszissen [vgl. § 6, (16)].

(Eingegangen am 15. Oktober 1931.)

# Sur les conditions linéaires dans l'intégration des équations différentielles ordinaires.

Par

Nicolas Ciorănescu à Bucarest.

**1.** Soit $L(u)$ l'équation différentielle linéaire d'ordre $n$:

$$L(u) \equiv \frac{d^n u}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)\,u = f(x) \tag{1}$$

et $(a, b)$ l'intervalle d'amplitude finie dans lequel on cherche la solution de l'équation (1) qui satisfait à certaines conditions initiales données.

Dans l'ensemble des conditions initiales auquelles on peut assujetir $u(x)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n$, celles de ces conditions qui sont linéaires par rapport aux valeurs de $u(x)$ et des ses dérivées, jouent un rôle important. Une telle condition initiale est une fonctionnelle linéaire de $u(x)$, $u'(x), \ldots, u^{(n-1)}(x)$ et par conséquent peut être représentée sous la forme d'intégrale de Stieltjes.

Si $\alpha_{i_k}(t)$ sont $n^2$ fonctions à variations bornées définies dans $(a, b)$, nous allons considérer des conditions initiales de la forme:

$$\sum_{k=1}^{n} \int_a^b u^{(k-1)}(t)\, d\,\alpha_{i_k}(t) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Au besoin on peut supposer que pour certaines fonctions $\alpha_{i_k}(t)$ la limite à gauche en $a$ ou à droite en $b$ existe. Les conditions bilocales ou polilocales, ou bien les conditions de la forme[1]):

$$\sum_{k=1}^{n} \int_a^b a_k(t)\, u^{(k-1)}(t)\, dt = 0 \tag{3}$$

---

[1]) M. Picone: Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei **17** (1908), p. 340. I teoremi di esistenza per gli int. di una eq. diff. soddisfacenti ad una nuova classa di condizioni.

qu'on peut appeller *des conditions globales*, sont des cas particuliers des conditions (2).

Il existe en général une solution et une seule de l'équation (1) satisfaisant aux conditions (2) ou à des conditions (2) non-homogènes. Sans insister sur la démonstration de l'existance de cette solution unique, car elle est analogue à la démonstration classique dans le cas des conditions bilocales, remarquons toutefois qu'on peut ramener la résolution de l'équation (1) avec les conditions (2) à la résolution d'un système d'équations intégrales. Cela peut se faire p. ex. de la même manière que M. Picone[1]) dans le cas des conditions initiales moins générales (3).

Pour certaines équations (1), notament dans le cas des équations de la forme:

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \lambda A(x) \cdot u(x) + f(x) \tag{4}$$

ce système se réduit à une seule équation intégrale. Nous allons considérer le cas $n = 2$ et former les équations intégrales auquelles on est conduit dans le cas des conditions (2) ou plus particulières. On arrive ainsi à mettre en évidence certaines *conditions initiales singulières* que nous allons voir dans la suite.

**2.** Considérons l'équation du second ordre:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda A(x) \cdot u + f(x) \tag{5}$$

et les conditions initiales:

$$\int_a^b u(t)\, d\alpha(t) = 0; \qquad \int_a^b u(t)\, d\beta(t) = 0 \tag{6}$$

qui sont plus particulières que les conditions (2) car il n'y entrent que les valeurs de $u$ dans $(a, b)$. Mais, on peut voir sur ce problème particulier tous les cas qui peuvent se présenter.

En supposant que $\alpha(t) \not\equiv \beta(t)$ dans $(a, b)$, posons:

$$\begin{gathered} A = \int_a^b d\alpha(t); \qquad B = \int_a^b d\beta(t); \\ A_1 = \int_a^b t\, d\alpha(t); \qquad B_1 = \int_a^b t\, d\beta(t) \\ D = A_1 B - A B_1. \end{gathered} \tag{7}$$

Dans l'ensemble des conditions (6) il y a trois cas à distinguer:

**a)** $D \neq 0$. Par des calculs «simples»[2]) on trouve de la même manière

[2]) On trouvera plus de détails et développements sur le sujet dans un travail inséré dans le «Buletinul Facultăţii de Ştiinţe din Cernăuţi» **5** (1931), p. 99.

que dans le cas des conditions initiales classiques, que la solution de (5) satisfaisant aux conditions (6) est donnée par l'équation intégrale:

$$(8) \qquad u(x) = \lambda \int_a^b G(x, s)\, A(s)\, u(s)\, ds + \int_a^b G(x, s)\, f(s)\, ds.$$

$G(x, s)$ est la fonction de Green, c. à d. solution de l'équation $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ satisfaisant aux conditions (6), dont la dérivée du premier ordre présent au point $x = s$ un saut égal à un. Son expression est:

$$G(x, s) = \begin{cases} s - x - \frac{B_1 - Bx}{D} \int_a^s (t - s)\, d\alpha(t) + \frac{A_1 - Ax}{D} \int_a^s (t - s)\, d\beta(t), \text{ si } x \leqq s, \\ x - s + \frac{B_1 - Bx}{D} \int_s^b (t - s)\, d\alpha(t) - \frac{A_1 - Ax}{D} \int_s^b (t - s)\, d\beta(t), \text{ si } x \geqq s. \end{cases}$$

Comme cas particulier on retrouve le noyau correspondant aux conditions $u(a) = u(b) = 0$.

**b)** $D = 0$ mais sans que tous les nombres $A, B, A_1, B_1$ soient nuls. Supposons que $A_1 \neq 0$. Dans ce cas, pour que l'équation (5) ait une solution, il faut que la condition suivante

$$(10) \qquad \lambda \int_a^b K(s)\, A(s)\, u(s)\, ds + \int_a^b K(s)\, f(s)\, ds = 0$$

soit satisfaite, où:

$$K(s) = \int_s^b (t - s)\, d[\beta(t) - K\alpha(t)] \quad \text{et} \quad K = \frac{B_1}{A_1} = \frac{B}{A}.$$

Alors, la solution cherchée satisfait à l'équation intégrale:

$$(11) \quad u(x) = \lambda \int_a^b G_1(x, s)\, A(s)\, u(s)\, ds + \int_a^b G_1(x, s)\, f(s)\, ds + C(Ax - A_1)$$

où

$$(12) \qquad G_1(x, s) = \begin{cases} -\frac{x}{A_1} \int_s^b (t - s)\, d\alpha(t) & \text{pour} \quad x \leqq s, \\ x - s - \frac{x}{A_1} \int_s^b (t - s)\, d\alpha(t) & \text{pour} \quad x \geqq s \end{cases}$$

et $C$ une constante arbitraire. Le système formé par les relations (10) et (11) déterminent $u(x)$ et $C$.

Entre ces deux relations on peut éliminer $C$; on arrive ainsi à l'équation suivante que doit satisfaire $u(x)$:

$$u(x) = \lambda \int_a^b \overline{G_1(x, s)}\, A(s)\, u(s)\, ds + \int_a^b \overline{G_1(x, s)}\, f(s)\, ds - \frac{Ax - A_1}{\lambda M} \int_a^b K(x)\, f(x)\, dx \tag{13}$$

où

$$\overline{G_1(x, s)} = G_1(x, s) - \frac{Ax - A_1}{M} \int_a^b G_1(t, s)\, K(t)\, A(t)\, dt.$$

On voit que la méthode des approximations successives n'est pas applicable à l'équation (13), comme à l'équation (5) avec les conditions singulières (6), car $u(x)$ considéré comme fonction de $\lambda$, admet en dehors des pôles de la résolvante, le pôle $\lambda = 0$ provenant du dernier terme.

**c)** Considérons le deuxième cas singulier: $A = B = A_1 = B_1 = 0$. Dans ce cas, pour que l'équation (5) ait de solution il faut que les conditions suivantes soit satisfaites:

$$\lambda \int_a^b P(s)\, A(s)\, u(s)\, ds + \int_a^b P(s)\, f(s)\, ds = 0; \qquad \lambda \int_a^b Q(s)\, A(s)\, u(s)\, ds + \int_a^b Q(s)\, f(s)\, ds = 0 \tag{14}$$

où

$$P(s) = \int_s^b (t - s)\, d\alpha(t), \qquad Q(s) = \int_s^b (t - s)\, d\beta(t).$$

On peut écrire que $u(x)$ est solution de l'équation (5) de la manière suivante:

$$u(x) = \lambda \int_a^x (x - s)\, A(s)\, u(s)\, ds + \int_a^x (x - s)\, f(s)\, ds + C_1 x + C_2. \tag{15}$$

$C_1$ et $C_2$ étant deux constantes arbitraires. Le système formé par les relations (14) et (15) suffit à déterminer $u(x)$ et les constantes $C_1$, $C_2$. En éliminant ces deux constantes entre les trois relations précédentes, on arrive pour $u(x)$ à l'équation:

$$u(x) = \lambda \int_a^b \Gamma(x, s)\, A(s)\, u(s)\, ds + \int_a^b \Gamma(x, s)\, f(s)\, ds + \frac{h_1 + h_2 x}{\lambda d} \tag{16}$$

où:

$$h_1 = q_1 \int_a^b P(x)\, f(x)\, dx - p_1 \int_a^b Q(x)\, f(x)\, dx;$$

$$h_2 = p \int_a^b Q(x)\, f(x)\, dx - q \int_a^b P(x)\, f(x)\, dx$$

et

$$p = \int_a^b A(x)\,P(x)\,dx; \qquad q = \int_a^b A(x)\,Q(x)\,dx;$$

$$p_1 = \int_a^b x\,A(x)\,P(x)\,dx; \qquad q_1 = \int_a^b x\,A(x)\,Q(x)\,dx$$

$$d = p_1 q - p q_1.$$

Le noyau $\Gamma(x, s)$ peut se mettre sous la forme suivante:

$$\Gamma(x,s) = \begin{cases} s - x - \frac{q_1 - q x}{d}\int_a^s (t-s)\,A(t)\,P(t)\,dt \\ \qquad + \frac{p_1 - p x}{d}\int_a^s (t-s)\,A(t)\,Q(t)\,dt \quad \text{pour} \quad x \leqq s, \\ x - s + \frac{q_1 - q x}{d}\int_s^b (t-s)\,A(t)\,P(t)\,dt \\ \qquad - \frac{p_1 - p x}{d}\int_s^b (t-s)\,A(t)\,Q(t)\,dt \quad \text{pour} \quad x \geqq s. \end{cases}$$

Tout cela dans l'hypothèse $d \neq 0$.

L'expression de $\Gamma(x, s)$ est analogue à celle de $G(x, s)$, le rôle des constantes $A, B, A_1, B_1$ étant joué par les constantes $p, q, p_1, q_1$ et celui de $d\alpha(t)$, $d\beta(t)$ par $P(t)\,A(t)\,dt$ et $Q(t)\,A(t)\,dt$.

**d)** Si l'on envisage aussi le cas $d = 0$ on voit de la même manière que plus haut, que pour qu'il y ait solution, il faut que une ou deux conditions soient satisfaites, selon que certains de coefficients $p, q, p_1, q_1$ ne sont pas tous nuls, ou que tous sont nuls.

Dans ces cas la solution cherchée peut dépandre d'une ou même deux constantes arbitraires. On peut procéder après à l'élimination des constantes arbitraires comme dans le cas $(b)$ ou $(c)$ et former l'équation intégrale sans constantes arbitraires à laquelle satisfait $u(x)$.

Et ainsi de suite, chaque cas singulier peut présenter de nouveau cas singuliers qui peuvent être traiter comme plus haut. Mais ces nouveaux singularités proviennent non seulement à cause de données initiales, mais aussi à cause de l'équation (5) même, c. à d. à cause de la structure des fonctions $A(x)$ et $f(x)$.

**3.** Les conditions initiales, linéaires et homogènes, les plus générales pour une équation du second ordre, sont les suivantes:

$$(17)\quad \int_a^b u(t)\,d\alpha_0(t) + \int_a^b u'(t)\,d\alpha_1(t) = 0; \qquad \int_a^b u(t)\,d\beta_0(t) + \int_a^b u'(t)\,d\beta_1(t) = 0.$$

Nous avons examiné plus haut le cas particulier $\alpha_1(t) \equiv \beta_1(t) \equiv 0$. On peut aussi considérer divers autres cas particuliers, tels que $\alpha_1(t) \equiv \beta_0(t) \equiv 0$ ou bien $\alpha_0(t) \equiv \beta_0(t) \equiv 0$ dans $(a, b)$, non moins interéssants que (6). Mais, de même que dans le cas des conditions générales (17) on retombe sur le mêmes faits qu'au § 2. C'est pour cela que nous nous dispensons de donner ici l'expression de la fonction de Green correspondante à ces conditions, ainsi que d'examiner les divers cas singuliers de ces conditions initiales.

A notre avis, il y a avantage à plus d'un point de vu, de traiter les divers conditions initiales classiques (de Cauchy, polilocales, mixtes etc.) qui peuvent paraître de prime abord comme essentiellement différentes, comme des cas particuliers des *conditions globales* (2), même dans les exposés didactiques du sujet.

(Eingegangen am 22. Oktober 1931.)

# Homologiegruppe berandeter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten.

Von

H. Seifert in Leipzig.

Satz. *In einer dreidimensionalen orientierbaren berandeten Mannigfaltigkeit $\bar{R}$, deren Rand aus $r$ (orientierbaren) Flächen vom Geschlecht $p_1, p_2, \ldots, p_r$ besteht, ist die Bettische Zahl der Dimension* 1 *größer oder gleich* $p_1 + p_2 + \ldots + p_r$.

Beweis. Wenn alle Randflächen Kugelflächen sind, so ist der Satz trivial. Wenn dagegen eine Fläche, sagen wir die erste, $f_1$ ein Geschlecht $p_1 > 0$ hat, so gibt es auf $f_1$ eine doppelpunktfreie geschlossene Kurve $b$ von der Art, daß das Element der Homologiegruppe von $\bar{R}$, das diese Kurve repräsentiert, unendliche Ordnung hat. Die Kurve $b$ ist also weder einfach noch mehrfach durchlaufen nullhomolog. — Um das Vorhandensein einer solchen Kurve nachzuweisen, betrachten wir auf $f_1$ zwei konjugierte Rückkehrschnitte $a$ und $b$, das sind zwei doppelpunktfreie geschlossene Kurven, die sich in genau einem Punkt überkreuzen (genauer einen Punkt gemein haben und auf $f_1$ die Schnittpunktzahl $\pm 1$ besitzen). Wir zeigen, daß, wenn $a$ als Element der Homologiegruppe von $\bar{R}$ endliche Ordnung hat, etwa die Ordnung $\alpha$, so daß $\alpha a \sim 0$ mit $\alpha > 0$ ist, dann $b$ sicher unendliche Ordnung in $\bar{R}$ hat. Daß $\alpha a \sim 0$ in $\bar{R}$ ist, besagt, daß es eine Flächenkette (orientierten Flächenkomplex) $\bar{C}$ in $\bar{R}$ gibt, die die geschlossene Kurve $\alpha a$ zum Rande hat. Nimmt man eine weitere orientierbare berandete Mannigfaltigkeit $\bar{R}^*$ hinzu, die sich von $\bar{R}$ nur durch die Orientierung unterscheidet, und identifiziert man entsprechende Randflächenstücke von $\bar{R}$ und $\bar{R}^*$, so entsteht aus $\bar{R}$ „durch Verdoppelung“ eine unberandete orientierbare Mannigfaltigkeit $R$. Dem Flächenkomplex $C$ entspricht in $\bar{R}^*$ ein Flächenkomplex $\bar{C}^*$, der den Rand $-\alpha a$ hat, also zusammen mit $\bar{C}$ eine geschlossene Flächenkette $C$ liefert. Die Schnittpunktzahl der Kurve $b$ mit $C$ in der Mannigfaltigkeit $R$ beträgt $\pm\alpha$; denn der zu $a$ konjugierte

Rückkehrschnitt $b$ schneidet die Flächenkette $C$ genau $\alpha$ mal in seinem einzigen Schnittpunkt mit der Kurve $a$. Ist nun $\beta$ eine beliebige ganze Zahl $\neq 0$, so hat die Kurve $\beta b$ daher mit der Flächenkette $C$ die Schnittpunktzahl $\beta\alpha \neq 0$. $\beta b$ kann also nicht nullhomolog in $R$ sein, denn nach einem bekannten Satze ist die Schnittpunktzahl einer geschlossenen nullhomologen Kurve mit jeder geschlossenen Flächenkette in einer dreidimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeit immer 0. Erst recht kann dann $\beta b$ nicht in $\bar{R}$ nullhomolog sein. Von zwei konjugierten Rückkehrschnitten der Fläche $f_1$ hat also mindestens einer als Element der Homologiegruppe unendliche Ordnung.

Nachdem die Existenz der Kurve $b$ feststeht, wird $b$ mit einem schmalen Streifen auf $f_1$ umgeben. Dies bereitet keine Schwierigkeiten, da wir uns in der kombinatorischen Topologie befinden, die Kurve $b$ also ein doppelpunktfreier Kantenzug auf $f_1$ ist. Der Streifen ist ein Kreisring, der mit einem ebensolchen Kreisring auf der Oberfläche eines Elementarraumstückes identifiziert wird. Anschaulich gesprochen: Es wird eine zylindrische Platte mit ihrem schmalen Rand auf den Streifen von $f_1$ gesetzt. Dadurch entsteht eine berandete Mannigfaltigkeit $\bar{R}'$, deren Homologiegruppe um (mindestens) eine freie Erzeugende ärmer ist als die von $\bar{R}$.[1]) Jede geschlossene Kette der Dimension 1 von $\bar{R}'$ ist nämlich homolog einer solchen, die schon in der Teilmannigfaltigkeit $\bar{R}$ liegt, und es gibt eine Kette $b$, die in $\bar{R}$ unendliche Ordnung hat und in $\bar{R}'$ nullhomolog wird. Die Bettische Zahl der Dimension 1 von $\bar{R}'$ ist also um (mindestens) eine Einheit kleiner als die von $\bar{R}$. Während beim Übergang von $\bar{R}$ zu $\bar{R}'$ die Randflächen $f_2, \ldots, f_r$ ungeändert geblieben sind, ist $f_1$ in eine Randfläche $f_1'$ von $\bar{R}'$

[1]) Genauer ist die Homologiegruppe von $\bar{R}'$ *genau* um eine freie Erzeugende ärmer. Sie entsteht nämlich aus der Homologiegruppe von $\bar{R}$ durch Nullsetzen des Elementes $b$ unendlicher Ordnung. Das folgt aus dem Lemma: $K'$ und $K''$ seien zwei zusammenhängende Teilkomplexe eines $n$-dimensionalen Komplexes $K$, so daß jedes $i$-dimensionale Element von $K$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) mindestens einem der Komplexe $K'$ und $K''$ angehört. Der Durchschnitt $D$ von $K'$ und $K''$, der sicher nicht leer ist, sei ebenfalls zusammenhängend. $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$, $\mathfrak{D}$ seien die Fundamentalgruppen von bzw. $K$, $K'$, $K''$, $D$. Wählt man den Anfangspunkt für die geschlossenen Wege in $D$, so ist jeder fundamentale Weg von $D$ zugleich fundamentaler Weg von $K'$ und $K''$. Somit entspricht jedem Element von $\mathfrak{D}$ ein Element von $\mathfrak{K}'$ und ebenso ein Element von $\mathfrak{K}''$. *Dann ist $\mathfrak{K}$ eine Quotientengruppe des freien Produktes $\mathfrak{K}' \cdot \mathfrak{K}''$ von $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$. Man erhält $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{K}' \cdot \mathfrak{K}''$, wenn man je zwei Elemente von $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$, die demselben Element von $\mathfrak{D}$ entsprechen, zusammenfallen läßt.* — Für die Homologiegruppen 1. Dimension folgt hieraus der gleiche Satz, nur hat man für freies Produkt direktes Produkt zu sagen. In unserem Falle ist $K = R'$, $K' = \bar{R}$, $K''$ ist die längs des Kreisringes $D$ aufgesetzte Platte. Der Beweis des Lemmas befindet sich in der Arbeit des Verfassers: Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume, Ber. Sächs. Akad. d. Wiss. **83** (1931), S. 33.

übergegangen. Das Geschlecht von $f_1'$ ist nur noch $p_1 - 1$, denn $f_1$ entsteht aus $f_1$ durch Aufschneiden längs des Rückkehrschnittes $b$ und Schließen mit zwei Kreisflächen. Auf $\bar{R}'$ wird dasselbe Verfahren angewendet wie auf $\bar{R}$, bis man nach $p_1 + p_2 + \ldots + p_r$ Schritten zu einer Mannigfaltigkeit gelangt, die nur noch von Kugelflächen berandet wird. Da deren Bettische Zahl der Dimension 1 $\geqq 0$ ist, so ist die von $\bar{R}$ $\geqq p_1 + p_2 + \ldots + p_r$, q. e. d.

H. Kneser hat mit anderen Hilfsmitteln den folgenden Spezialfall des vorstehenden Satzes bewiesen[2]):

Eine berandete dreidimensionale Mannigfaltigkeit, deren erste Bettische Zahl den Wert Null hat, während alle Torsionszahlen erster Dimension ungerade sind, hat nur sphärische Randflächen.

---

[2]) H. Kneser, Eine Bemerkung über dreidimensionale Mannigfaltigkeiten, Gött. Nachr. 1925, S. 128.

(Eingegangen am 13. November 1931.)

# Sur la décomposition des polynomes différentiels en facteurs du premier ordre.

Par

Miron Nicolesco à Cernăuți (Roumanie).

Soit

$$L[u] \equiv u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} u' + p_n u \tag{1}$$

un polynome différentiel d'ordre $n$. Dans un Mémoire publié récemment dans cette même revue, M. Gabriele Mammana a intrepris l'étude des expressions telles que (1), au point de vue de la décomposition de ces expressions en facteurs différentiels[1]). Son résultat fondamental s'énonce ainsi:

Soit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ un système fondamental d'intégrales de l'équation $L[u] = 0$. Si l'on désigne par $W_i$ le wronskien des $i$ fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_i$, on aura

$$L[u] = \left(\frac{d}{dx} - \alpha_n\right)\left(\frac{d}{dx} - \alpha_{n-1}\right) \ldots \left(\frac{d}{dx} - \alpha_2\right)\left(\frac{d}{dx} - \alpha_1\right) u, \tag{2}$$

avec

$$\alpha_i = \frac{d}{dx}\left(\log \frac{W_i}{W_{i-1}}\right) \qquad (W_0 = 1;\ i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

L'identité précédente est valable dans tout l'intervalle de continuité des fonctions $p_i$, sauf en un nombre fini de points.

Aux résultats donnés par M. Gabriele Mammana comme conséquence de cette décomposition, je vais en ajouter d'autres, concernant surtout la liaison entre un polynome différentiel et son adjoint. Je confronterai ensuite ces résultats, et ceux de M. G. Mammana, avec des résultats voisins que j'ai donnés en 1929 dans un autre recueil[2]).

---

[1]) Gabriele Mammana, Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e applicazione relativa allo studio delle equazioni differenziali lineari, Math. Zeitschr. **33** (1931), p. 186–231.

[2]) Miron Nicolesco, Sur les équations différentielles linéaires, Buletinul Facultății de Științe din Cernăuți **3** (1929), p. 239–245.

**1.** Théorème I. *Le polynome différentiel* $\bar{L}[u]$, *adjoint de* $L[u]$, *supposé décomposé sous la forme* (2), *peut s'écrire*

$$\bar{L}[u] = (-1)^n \cdot \left(\frac{d}{dx} + \alpha_1\right)\left(\frac{d}{dx} + \alpha_2\right) \dots \left(\frac{d}{dx} + \alpha_n\right) u.$$

Ce théorème résultera aisément de quelques lemmes. Appelons *dérivée* d'un polynome différentiel tel que (1), le polynome suivant

$$L'[u] = n u^{(n-1)} + (n-1) p_1 u^{(n-2)} + \dots + 2 p_{n-2} u' + p_{n-1} u,$$

obtenu de $L[u]$ par dérivation par rapport à $u$, en considérant les puissances de dérivation comme des puissances véritables. Nous désignerons par $L''[u]$ la dérivée de $L'[u]$, et ainsi de suite. On aura $L^{(n)}[u] = n!\, u$, les dérivées suivantes seront nulles.

Rappelons aussi la formule connue

$$(4) \qquad L[hu] = hL[u] + \frac{h'}{1} L'[u] + \frac{h''}{2!} L''[u] + \dots + \frac{h^{(n)}}{n!} L^{(n)}[u],$$

où $h$ est une fonction quelconque de $x$, et qui est l'analogue de la formule de Taylor pour les polynomes algébriques.

$L[u]$ et $M[u]$ étant deux polynomes quelconques, nous poserons $L[M] = LM$. On aura ainsi, en général $LM \neq ML$. Nous poserons aussi

$$L[M[N]] = LMN$$

et ainsi de suite. Ce nouveau produit, ainsi défini, est associatif, distributif, mais il n'est pas commutatif.

Lemme I. *On a*

$$(LM)' = LM' + L'M.$$

Il suffira de remarquer, d'après la formule (4), que la dérivée de $P[u]$ est le coefficient de $h'$ dans le développement de $P[hu]$ suivant les dérivées successives de $h$. En appliquant ceci au polynome $LM[u]$, on trouvera sans peine

$$LM[hu] = hLM + h'(LM' + L'M) + \dots$$

d'où le résultat annoncé.

On en déduit tout de suite la formule générale

$$(LM)^{(p)} = LM^{(p)} + \binom{p}{1} L'M^{(p-1)} + \dots + L^{(p)}M.$$

Il résulte aussi de ce lemme que l'on aura, pour trois polynomes $L$, $M$, $N$,

$$(LMN)' = LMN' + LM'N + L'MN,$$

et ainsi de suite.

Lemme II. *La dérivée de l'adjoint d'un polynome différentiel donné, est égale et de signe contraire à l'adjoint de la dérivée de ce polynome.*

Soit donné le polynome (1). Son adjoint sera

$$\bar{L}[u] = (-1)^n [u^{(n)} - (p_1 u)^{(n-1)} + (p_2 u)^{(n-2)} + \ldots + (-1)^n p_n u].$$

L'adjoint $\bar{L}'$ de $L'[u]$ sera

$$\bar{L}'[u] = (-1)^{n-1} [n u^{(n-1)} - (n-1)(p_1 u)^{(n-2)} + \ldots + (-1)^{n-1} p_{n-1} u].$$

Or, on trouvera, en ordonnant suivant les dérivées d'ordre croissant de $h$,

$$\bar{L}[hu] = h\bar{L}[u] - h'\bar{L}'[u] + \ldots,$$

d'où

$$\bar{L}' = -(\bar{L})',$$

c. q. f. d.

Passons maintenant à la démonstration de notre théorème. Tout d'abord, une simple vérification donnera que le théorème est vrai pour $n = 2$. Nous allons donc le supposer vrai pour $n-1$ et le démontrer pour $n$.

Soit donc

$$L[u] = \left(\frac{d}{dx} - \alpha_n\right)\left(\frac{d}{dx} - \alpha_{n-1}\right) \ldots \left(\frac{d}{dx} - \alpha_1\right) u.$$

On aura [lemme I]

$$L'[u] = \sum_i \left(\frac{d}{dx} - \alpha_n\right)\left(\frac{d}{dx} - \alpha_{n-1}\right) \ldots \left(\frac{d}{dx} - \alpha_{i+1}\right)\left(\frac{d}{dx} - \alpha_{i-1}\right) \ldots \left(\frac{d}{dx} - \alpha_1\right)$$

Le théorème étant vrai pour les polynomes d'ordre $n-1$, on aura, en tenant compte que l'adjoint d'une somme est égal à la somme des adjoints,

$$\bar{L}'[u] = (-1)^{n-1} \sum_j \left(\frac{d}{dx} + \alpha_1\right)\left(\frac{d}{dx} + \alpha_2\right) \ldots \left(\frac{d}{dx} + \alpha_{j-1}\right)\left(\frac{d}{dx} + \alpha_{j+1}\right) \ldots \left(\frac{d}{dx} + \alpha\right.$$

d'où, en vertu du lemme II,

$$(5) \qquad \bar{L}[u] = (-1)^n \left(\frac{d}{dx} + \alpha_1\right)\left(\frac{d}{dx} + \alpha_2\right) \ldots \left(\frac{d}{dx} + \alpha_n\right) u + C(x), u,$$

$C(x)$ étant une fonction à déterminer. Or, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ étant ce que Darboux appelle un système fondamental adjoint [3]) au système $u_1, u_2, \ldots, u_n$, on a [4])

$$v_i = \frac{\partial \log W_n}{\partial u_i^{(n-1)}}.$$

En particulier,

$$v_n = \frac{W_{n-1}}{W_n},$$

c'est-à-dire, en comparant avec les formules (3),

$$v_n = e^{-\int \alpha_n dx}.$$

---

[3]) Darboux, Théorie des Surfaces 2, p. 134.

[4]) Loc. cit.

Si l'on introduit cette expression dans (5), on trouve, tenant compte que $v_n$ est une intégrale de l'équation adjointe $\bar{L}[u]$,

$$0 \equiv C(x) \cdot v_n$$

d'où

$$C(x) \equiv 0$$

et le théorème est démontré.

2. Rappelons ici un théorème que nous avons donné dans notre Mémoire cité:

*La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* $L[u] = 0$ *admette les intégrales*

$$u_1, x u_1, x^2 u_1, \ldots, x^k u_1$$

*est que les équations*

$$L[u] = 0, \; L'[u] = 0, \; \ldots, \; L^{(k)}[u] = 0$$

*admettent l'intégrale commune* $u_1$.

Nous allons transformer cet énoncé au moyen de la décomposition en facteurs de M. G. Mammana. Supposons, en premier lieu, que l'équation donnée admette les intégrales

$$(6) \qquad u_1 = u_1, \; u_2 = x u_1, \; u_3 = x^2 u_1, \; \ldots, \; u_{k+1} = x^k u_1.$$

Il s'ensuit immédiatement la possibilité de mettre le polynome $L[u]$ sous la forme (2). Or, les formules (6) permettent de calculer les $(k+1)$ fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}$. On trouvera, en effet, facilement, la relation de récurrence suivante

$$W_{i+1} = i!\, u_1 \cdot W_i \qquad (i \leqq k),$$

d'où

$$\frac{d}{dx}\left(\log \frac{W_{i+1}}{W_i}\right) = \frac{d \log u_1}{dx} \qquad (i \leqq k).$$

On aura donc

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{k+1}$$

et $L[u]$ pourra s'écrire

$$(7) \qquad L[u] = \left(\frac{d}{dx} - \alpha_n\right)\left(\frac{d}{dx} - \alpha_{n-1}\right) \cdots \left(\frac{d}{dx} - \alpha_{k+2}\right)\left(\frac{d}{dx} - \alpha_1\right)^{k+1} u.$$

Réciproquement, supposons que $L[u]$ puisse se mettre sous la forme (7), avec $\alpha_{k+2} \neq \alpha_1$. En dérivant successivement, on trouvera que les équations

$$L[u] = 0, \; L'[u] = 0, \; \ldots, \; L^{(k)}[u] = 0$$

admettent l'intégrale commune $u_1$. On peut donc énoncer le

Théorème II. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* $L[u] = 0$ *admette les intégrales*

$$u, x u, x^2 u, \ldots, x^k u,$$

*est que* $L[u]$ *puisse se mettre sous la forme*

$$L[u] = \left(\frac{d}{dx} - \alpha_n\right)\left(\frac{d}{dx} - \alpha_{n-1}\right) \cdots \left(\frac{d}{dx} - \alpha_{k+2}\right)\left(\frac{d}{dx} - \alpha_1\right)^{k+1} u.$$

Ce théorème est l'analogue du théorème des racines égales pour les équations algébriques. Nous dirons, dans ces conditions, que l'équation $L[u] = 0$ admet une intégrale multiple d'ordre $k+1$.

**3.** Prenons, dans le théorème précédent, $k = n-1$. Notre équation s'écrira simplement

$$L[u] \equiv \left(\frac{d}{dx} - \alpha_1\right)^n u = 0. \tag{8}$$

En vertu du théorème I, son adjointe s'écrira

$$(-1)^n \cdot \bar{L}[u] \equiv \left(\frac{d}{dx} + \alpha_1\right)^{(n)} u = 0. \tag{9}$$

On peut donc énoncer le

Théorème III. *Si une équation linéaire d'ordre n admet une intégrale multiple d'ordre n, il en sera de même de son adjointe.*

**4.** Je ferai maintenant intervenir le théorème rappelé au début du n° 2. Supposons que l'équation $L[u] = 0$ admette une intégrale multiple d'ordre $n$. Alors les équations

$$L[u] = 0, \quad L'[u] = 0, \quad \ldots, \quad L^{(n-1)}[u] = 0$$

admettront une intégrale commune $u_1$. Mais, puisque $L[u]$ est nécessairement de la forme (8), on aura

$$L^{(n-1)}[u] = n!\left(\frac{d}{dx} - \alpha_1\right) u$$

et l'intégrale commune sera donnée par l'équation

$$\frac{du}{dx} - \alpha_1 u = 0.$$

Comme on a, dans ce cas particulier, $\alpha_1 = \frac{1}{n} \cdot p_1$, on obtiendra

$$u_1 = e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}.$$

On aura donc

$$L\left[e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}\right] = 0, \quad L'\left[e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}\right] = 0, \quad \ldots, \quad L^{(n-1)}\left[e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}\right] = 0. \tag{10}$$

En passant à l'équation adjointe, on obtiendra un système analogue au système (10). Mais ce système devra se réduire au système (10), car celui-ci représente, en vertu des théorèmes II et III, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation $\bar{L}[u] = 0$ admette une intégrale multiple d'ordre $n$.

En tenant aussi compte du fait que l'intégrale multiple d'ordre $n$ de l'équation $L[u]=0$ sera une intégrale multiple d'ordre $n-i$ de l'équation $L^{(i)}[u]=0$, on peut énoncer le

Théorème IV. *Quel que soit $i$, le système d'équations*

$$L^{(i)}\left[e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}\right]=0,\quad L^{(i+1)}\left[e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}\right]=0,\quad \ldots,\quad L^{(n-2)}\left[e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}\right]=0$$

*est invariant par le passage de l'équation $L[u]=0$ à l'équation adjointe.*

Ce théorème soulève une question intéressante: Existe-t-il, dans ce passage d'une équation donnée à son adjointe, des fonctions des coefficients et de leurs dérivées, qui soient invariantes?

Faisons, dans le théorème précédent $i=n-2$. Le système écrit se réduit à la seule équation

$$L^{(n-2)}\left[e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}\right]=0.$$

Et alors, on peut vérifier facilement que l'expression

$$e^{\frac{1}{n}\int p_1 dx}\cdot L^{(n-2)}\left[e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}\right]=-(n-1)p_1'-\frac{n-1}{n}p_1^2+2p_2$$

est un invariant, dans le sens que nous avons donné à ce mot.

Mais ce n'est pas le seul. Nous comptons pouvoir revenir sur cette question dans un autre travail.

Cernăuți, 17 novembre, 1931.

(Eingegangen am 19. November 1931.)

# Bemerkungen zu der Abhandlung „Ein neues Analogon zum Satz von Desargues in Räumen von gerader Dimension“ von E. A. Weiss (Math. Zeitschr. Bd. 33 (1931). S. 388–395).

Von

R. Mehmke in Stuttgart.

**1.** Die von Herrn Weiss in obiger Abhandlung unter **1.** angeführten Gleichungen sind nicht erst 1923 von E. Study aufgestellt und zum Beweis des Desarguesschen Satzes über perspektive Dreiecke benützt worden, sondern (bloß mit andern Buchstaben) von E. Hunyady schon 1880 [1]). Alle von Herrn Weiss behandelten Sätze, nicht nur die auf Polarsysteme bezüglichen von Chasles und Schläfli, sondern auch der weitergehende von Berzolari und die neuen Sätze von Herrn Weiss kann man ohne Determinanten, überhaupt fast ohne Rechnung, anschaulich und elementar beweisen, wenn man die Hilfsmittel des jetzt unter dem Namen Punktrechnung bekannten Zweiges von Graßmanns geometrischem Kalkül, der ja der projektiven Geometrie angepaßt ist, verwendet. Ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Beweisgang des Herrn Weiss wie seiner Vorgänger und dem hier befolgten besteht insofern, als dort mit Produkten, hier mit Summen, die verschwinden müssen, gearbeitet wird. Letzterer Weg führt auf neue Sätze, wenn man auch die in den benützten Gleichungen enthaltenen metrischen Beziehungen, statt nur die der Geometrie der Lage angehörigen, beachtet.

**2. Ein Satz von Chasles und seine Schläflische Ausdehnung auf mehrdimensionale Räume.** Bezeichnen $a, b, c, d$ die Ecken eines Tetraeders und $a', b', c', d'$ die ihnen entsprechenden Ecken eines zu jenem polaren Tetraeders, dann sind die Seitenflächen des ersten Tetraeders dargestellt

[1]) E. Hunyady, „Der Satz von Desargues über perspektive Dreiecke“, Crelles Journal **89** (1880), S. 80, Gleichung (4).

durch die äußeren Produkte[2]

$$[bcd],\ [cad],\ [abd],\ [cba],$$

also ist mit P als dem Symbol der Polarität:

$$a' = \mathrm{P}[bcd],\quad b' = \mathrm{P}[cad],\quad c' = \mathrm{P}[abd],\quad d' = \mathrm{P}[cba],$$

und man erhält für die geometrische Summe der durch die äußeren Produkte $[aa']$, $[bb']$, $[cc']$, $[dd']$ dargestellten Verbindungsgeraden entsprechender Ecken der beiden Tetraeder:

$$[aa'] + [bb'] + [cc'] + [dd']$$
$$= [a\,\mathrm{P}bcd] + [b\,\mathrm{P}cad] + [c\,\mathrm{P}abd] + [d\,\mathrm{P}cba].$$

Man überzeugt sich leicht, daß der letztere, in bezug auf jeden der vier Punkte $a, b, c, d$ homogene lineare Ausdruck verschwindet, wenn irgend zwei dieser Punkte zusammenfallen. Er muß deshalb nach einem bekannten Satz der Punktrechnung projektiv-invariant sein[3]. Nimmt man aber für $a, b, c, d$ die Ecken eines Polartetraeders, dann fällt $a'$ mit $a$, $b'$ mit $b$, $c'$ mit $c$, $d'$ mit $d$ zusammen, und obiger Ausdruck wird Null. Daher muß dies allgemein zutreffen:

$$[aa'] + [bb'] + [cc'] + [dd'] = 0,$$

d. h. die betrachteten vier Geraden sind linear abhängig, sie gehören einer Regelschar an[4].

Die Schläflische Ausdehnung des Satzes auf mehrdimensionale Räume läßt sich ganz ebenso beweisen.

**3. Ein Satz von Berzolari.** Herr Weiss spricht fraglichen Satz aus wie folgt: „Zwei Simplexe, die sich als $n$-Ecke in Schläflischer Lage befinden, befinden sich auch als $n$-Flache in Schläflischer Lage und umgekehrt.“ Betrachten wir zunächst wieder ein Tetraeder mit den Ecken $a, b, c, d$ und ein anderes mit den Ecken $a', b', c', d'$ im gewöhnlichen Raum. Die Bedingung dafür, daß die vier Verbindungsgeraden der Ecken des ersten Tetraeders mit den entsprechenden Ecken des zweiten „Schläflische Lage“ haben, d. h. einer Regelschar angehören oder hyperboloidisch liegen, kann wie unter **2.** geschrieben werden:

$$[aa'] + [bb'] + [cc'] + [dd'] = 0.$$

---

[2]) Zur Unterscheidung der von Graßmann 1844 eingeführten äußeren Produkte von den algebraischen benütze ich, wie Graßmann seit 1862, eckige Klammern. Dieselbe Bezeichnungsweise findet sich bei A. Cauchy, der ja 1853 auf ein ähnliches Hilfsmittel wie die äußeren Produkte — er nannte es „clefs algébriques“ — gekommen war (Comptes rendus Acad. Paris **36**).

[3]) Vgl. meine Vorlesungen über Vektoren- und Punktrechnung („VPR.“) I, **1** (1913), S. 121, Satz 3.

[4]) Vgl. VPR. I, **1**, S. 253, Satz 2.

Bezeichnen wir die Geradensumme links mit $S$:

$$(1) \qquad [aa'] + [bb'] + [cc'] + [dd'] = S,$$

dann läßt sich $S$ linear und homogen durch die sechs Kanten des Tetraeders, also $[bc]$, $[ca]$, $[ab]$, $[ad]$, $[bd]$, $[cd]$ ausdrücken, wobei die Vorzahlen („Koeffizienten") lineare Funktionen von $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ sein werden.

Ist also $S = 0$, so muß in fraglichem Ausdruck jedes einzelne Glied verschwinden. (Mit andern Worten: Die Koordinaten von $S$ in bezug auf $abcd$ als Koordinatentetraeder müssen alle verschwinden.) Die Geradensumme

$$(2) \qquad [\alpha'\alpha] + [\beta'\beta] + [\gamma'\gamma] + [\delta'\delta] = \Sigma,$$

in der $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ die Flächen der beiden Tetraeder bezeichnen, geht nun dadurch aus $S$ hervor, daß man $a, b, c, d, a', b', c', d'$ bzw. mit $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \alpha, \beta, \gamma, \delta$ vertauscht, also muß mittels derselben Vorzahlen, wie $S$ aus den obigen sechs Geraden, $\Sigma$ sich durch die Geraden $[\beta'\gamma']$, $[\gamma'\alpha']$, $[\alpha'\beta']$, $[\alpha'\delta']$, $[\beta'\delta']$, $[\gamma'\delta']$ ausdrücken lassen. Mithin hat $S = 0$ zur Folge $\Sigma = 0$ und umgekehrt. $\Sigma = 0$ bedeutet aber, daß die vier Geraden $[\alpha'\alpha]$, $[\beta'\beta]$, $[\gamma'\gamma]$, $[\delta'\delta]$ „Schläflische Lage" haben. Um es noch deutlicher zu sehen, wollen wir die Vorzahlen in den erwähnten Darstellungen von $S$ und $\Sigma$ durch die gegebenen Elemente ausdrücken. Denkt man sich zur Vereinfachung die Zahlwerte der Punkte $a, b, c, d$ und der Ebenen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ so gewählt, daß $[abcd] = 1$ und $[\alpha'\beta'\gamma'\delta'] = 1$ ist, so wird z. B. die Vorzahl des Gliedes mit $[bc]$ in dem Ausdruck für $S$ lauten:

$$[Sad] = [bb'ad] + [cc'ad] = -[\gamma b'] + [\beta c'],$$

und diejenige von $[\beta'\gamma']$ in dem Ausdruck für $\Sigma$:

$$[\Sigma\alpha'\delta'] = [\beta'\beta\alpha'\delta'] + [\gamma'\gamma\alpha'\delta'] = [\beta c'] - [\gamma b'],$$

also beide Vorzahlen sind in der Tat einander gleich. Die Ausdehnung auf zwei Simplexe in einem Raum beliebiger Dimension ist so einfach, daß wir sie übergehen können.

**4. Dreieck und Dreiflach in perspektiver Lage.** Herr Weiss nennt (a. a. O. S. 390) ein Dreieck $abc$ und ein Dreiflach $\alpha'\beta'\gamma'$ im Raum perspektiv, wenn die Verbindungsebenen $[aA']$, $[bB']$, $[cC']$ der Ecken des Dreiecks mit den entsprechenden Kanten $A' = [\beta'\gamma']$, $B' = [\gamma'\alpha']$, $C' = [\alpha'\beta']$ des Dreiflachs durch eine Gerade laufen, und er beweist, daß dann auch die Schnittpunkte der Seiten $A = [bc]$, $B = [ca]$, $C = [ab]$ des Dreiecks mit den entsprechenden Ebenen des Dreiflachs auf einer Geraden liegen. Dieser Satz kann ähnlich wie der unter **3.** bewiesen werden. Es bezeichne

nämlich bei beliebiger gegenseitiger Lage von Dreieck und Dreiflach $\sigma_d$ die Ebene

$$\sigma_d = [aA'] + [bB'] + cC'] \tag{3}$$

und $s_d$ den Punkt

$$s_d = [\alpha' A] + [\beta' B] + [\gamma' C]. \tag{4}$$

Dann geht $\sigma_d$ in $s_d$ über durch Vertauschen von $a, b, c,\ A', B', C'$ bzw. mit $\alpha', \beta', \gamma',\ A, B, C$, und man findet leicht, daß, wenn man, wie es möglich ist, einmal $\sigma_d$, welche Ebene den Schnittpunkt $d'$ der Ebenen $\alpha'$, $\beta'$ und $\gamma'$ enthält, homogen und linear durch diese Ebenen ausdrückt, ein zweites Mal den in der Ebene von $a$, $b$ und $c$ liegenden Punkt $s_d$ durch diese Punkte, entsprechende Vorzahlen in beiden Darstellungen dieselben sind, weshalb von den Gleichungen $\sigma_d = 0$ und $s_d = 0$ die eine aus der andern folgt.

**5. Der „I. Hauptsatz" von Weiss.** Wenn das Dreieck $abc$ eine Seitenfläche des Tetraeders $abcd$ als Viereck und ebenso das Dreiflach $\alpha'\beta'\gamma'$ einen Teil des Vierflachs $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ mit den Ecken $a', b', c', d'$ bildet, so kann gesetzt werden:

$$A' = [a'd'], \quad B' = [b'd'], \quad C' = [c'd'], \tag{5}$$

wodurch (3) übergeht in

$$\sigma_d = [aa'd'] + [bb'd'] + [cc'd'].$$

Fügt man das verschwindende äußere Produkt $[dd'd']$ als viertes Glied hinzu und setzt den gemeinsamen Faktor $d'$ heraus, dann steht in der Klammer die unter **3.** Gleichung (1) eingeführte Geradensumme

$$S = [aa'] + [bb'] + [cc'] + [dd'],$$

oder man hat

$$\sigma_d = [Sd']. \tag{6}$$

Sind also das Dreieck $abc$ und das Dreiflach $\alpha'\beta'\gamma'$ perspektiv, so hat man (vgl. **4.**)

$$\sigma_d = [Sd'] = 0.$$

Demnach gelten, wenn auch die drei andern Dreiecke des Tetraeders zu den entsprechenden Dreiflachen des Vierflachs $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ perspektiv sind, die vier Gleichungen

$$[Sa'] = 0, \quad [Sb'] = 0, \quad [Sc'] = 0, \quad [Sd'] = 0. \tag{7}$$

Hieraus folgt aber $S = 0$, was nach **3.** die perspektive Lage des Vierecks $abcd$ und des Vierflachs $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ bedeutet. Umgekehrt folgen aus letzterer Gleichung wieder die Gleichungen (7), also die Gleichungen $\sigma_d = 0$ und $s_d = 0$ nebst den entsprechenden Gleichungen für die übrigen Ecken.

**6.** Kürzer läßt sich alles Vorhergehende fassen, wenn man ein weiteres Hilfsmittel der Graßmannschen Symbolik heranzieht, nämlich die zur Darstellung linearer Verwandtschaften dienenden Brüche mit mehreren Zählern und Nennern[5]). Z. B. könnten wir, falls wie unter **2.** P eine Polarität im Raum bedeutet, für die dort betrachtete Geradensumme mit Benützung des Graßmannschen „bezüglichen Produkts“[6]) schreiben $[1\,\mathrm{P}][abcd]$, wo 1 die identische Transformation bedeuten soll. Ferner, wenn z. B. im Falle des unter **3.** behandelten Raumvierecks und Vierflaches mit den dortigen Bezeichnungen der Bruch

$$\mathrm{K} = \frac{\alpha', \beta', \gamma', \delta'}{a, b, c, d}$$

die Korrelation vorstellt, welche (beim Festhalten der Zahlwerte der Elemente) $a, b, c, d$ bzw. in $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ überführt, so läßt sich schreiben

$$\sigma_a = \mathrm{K}\,s_a, \quad \sigma_b = \mathrm{K}\,s_b, \quad \sigma_c = \mathrm{K}\,s_c, \quad \sigma_d = \mathrm{K}\,s_d, \quad \Sigma = \mathrm{K}^{\mathrm{II}}\,S.$$[7])

Wir sind jetzt auch in der Lage, zahlreiche neue Sätze aufzustellen. Wenn z. B. im gewöhnlichen Raum $\{GH\}$ den durch die Geraden $G$ und $H$ als speziellen linearen Komplexen bestimmten Komplexbüschel bezeichnet und P das Zeichen einer involutorischen reziproken linearen Transformation ist, welche Geraden in Geraden verwandelt, so wird sich

$$\{bc\,\mathrm{P}\,ad\} + \{ca\,\mathrm{P}\,bd\} + \{ab\,\mathrm{P}\,cd\} = 0$$

ergeben. Diese Gleichung drückt aus, daß die (nach der vorhergehenden Bemerkung) durch die Kanten $[bc]$, $[ca]$, $[ab]$ eines Tetraeders $abcd$ und ihre Gegenkanten bestimmten Komplexbüschel linear abhängig sind.

**7. Metrisches.** Wie schon in der Einleitung angedeutet wurde, genießt man beim Beweis von Sätzen, wie den von Herrn Weiss behandelten, wenn man, wie im vorhergehenden, Summen-Ausdrücke und nicht Produkte benützt, einen Vorteil: Die Gleichungen bekommen mehr Inhalt, weil sie metrisch gedeutet werden können. Betrachten wir, um ein ganz einfaches Beispiel zu nehmen, in einem ebenen Feld eine beliebige Korrelation k, die keine Polarität ist. Sie verwandle die Ecken $a, b, c$ eines beliebigen Dreiecks in die Seiten

$$A' = \mathrm{k}\,a, \quad B' = \mathrm{k}\,b, \quad C' = \mathrm{k}\,c$$

des ihm entsprechenden Dreiseits. Von diesem werden die Ecken:

$$a' = [B'C'] = [\mathrm{k}\,b\,\mathrm{k}\,c] = \mathrm{k}^{\mathrm{II}}[bc] \text{ usw.},$$

---

[5]) Vgl. VPR. I. **1**, S. 315 ff.

[6]) Vgl. VPR. I. **1**, S. 320 ff.

[7]) Wegen der Bedeutung des Zeichens $\mathrm{K}^{\mathrm{II}}$ s. VPR. I. **1**, S. 129 oben.

und für die Summe der Verbindungsgeraden entsprechender Ecken erhält man

$$S = [aa'] + [bb'] + [cc'] = [a\,\mathrm{k}^{\mathrm{II}}\,bc] + [b\,\mathrm{k}^{\mathrm{II}}\,ca] + [c\,\mathrm{k}^{\mathrm{II}}\,ab].$$

Ersichtlich ist $S$ projektiv-invariant mit der Korrelation k verbunden. In der reinen Geometrie der Lage ist es schwer, dieses Ergebnis zu deuten und in Worte zu fassen. Anders bei Benützung metrischer Begriffe. Legt man jedem der Punkte $a, b, c$ den Zahlwert 1 bei, so wird $[a\,b\,c]$ gleich dem doppelten Inhalt des Dreiecks $abc$, der (mit bestimmtem Vorzeichen genommen) durch $\overline{abc}$ bezeichnet werde. Es ist also $S : \overline{abc}$ eine konstante, d. h. von der Lage der Punkte $a, b, c$ unabhängige Gerade mit bestimmtem Zahlwert. In der Sprache der Mechanik heißt es: Wenn man in den Verbindungslinien entsprechender Ecken der Dreiecke $abc$ und $a'b'c'$ Kräfte von bestimmten Intensitäten anbringt, so geben sie immer dieselbe Resultante. Man hat noch die Intensitäten jener Kräfte zu ermitteln. Wenn wir (mit Burali-Forti) den Zahlwert durch Vorsetzen von mod bezeichnen, so ist

$$\mathrm{mod}\,[aa'] = \overline{aa'} \cdot \mathrm{mod}\,a'.$$

Wie der Kürze wegen hier ohne Beweis angeführt sei, ist mod $a'$ bis auf einen konstanten Faktor gleich $\overline{bcu}$, wo $u$ den Punkt bezeichnet, der durch die Korrelation k in die unendlich ferne („uneigentliche") Gerade verwandelt wird. Die gesuchte Intensität ist also bei der ersten Kraft, von einem konstanten Faktor abgesehen, gleich $\overline{aa'} \cdot \overline{bcu} : \overline{abc}$, wobei für den Bruch $\overline{bcu} : \overline{abc}$ auch das Verhältnis der Abstände der Punkte $u$ und $a$ von der Seite $bc$ des Dreiecks $abc$ genommen werden kann. Ähnlich für die andern beiden Kräfte.

Herr Weiss findet (a. a. O. S. 389, Anm. 3), im binären Gebiet fehle ein Analogon zu den Sätzen von Desargues und Chasles. Das trifft wieder nur bei Beschränkung auf die Geometrie der Lage zu. Denn im Falle zweier projektiven Punktreihen mit demselben Träger tritt an die Stelle des vorhin betrachteten Ausdrucks oder desjenigen in **3.** Gleichung (1):

$$S = [aa'] + [bb'],$$

und es muß, wenn $u$ den Fluchtpunkt der ersten Punktreihe bezeichnet, $(\overline{aa'} \cdot \overline{au} + \overline{bb'} \cdot \overline{bu}) : \overline{ab}$ konstant ausfallen. (In der Graßmannschen Symbolik ist diese Invariante gleich $[1\,\mathfrak{P}]$, mit $\mathfrak{P}$ als dem Zeichen der Polarität.)

(Eingegangen am 27. November 1931.)

# Berichtigung zu meiner Arbeit: „Einige Sätze und Fragestellungen über Fourier-Koeffizienten", Math. Zeitschr., Bd. 34, Heft 4, S. 477—480.

Von

S. Sidon in Budapest.

In der im Titel genannten Arbeit behauptete ich die Äquivalenz folgender Sätze: I. Ist $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n^2+\beta_n^2)$ konvergent, so gibt es stetige Funktionen mit der Fourierschen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, für welche $|a_n|>|\alpha_n|$, $|b_n|>|\beta_n|$ $(n=1,2,\ldots)$ gilt. II. Die Faktorenfolgen mit konvergenter Quadratsumme sind die einzigen, welche die Fouriersche Reihe einer beliebigen stetigen Funktion in eine absolut konvergente trigonometrische Reihe überführen. Nun folgt aus I nach einem geläufigen Lemma der Theorie der linearen Formen unendlich vieler Veränderlichen II, bisher ist mir aber noch nicht gelungen, I aus II einwandfrei zu folgern. II habe ich in einer unlängst erschienenen Note (Ein Satz über die Fourierschen Reihen stetiger Funktionen, Math. Zeitschr. **34**, Heft 4, S. 485—486) bewiesen, I ist noch unbewiesen.

(Eingegangen am 9. Februar 1932.)

## David Hilbert, Gesammelte Abhandlungen.

4 Bände.

I. Band: **Zahlentheorie.** XIV, 539 Seiten. 1932. RM 48.—

Inhaltsübersicht:

1. Über die Transzendenz der Zahlen $e$ und $\pi$. 2. Zwei neue Beweise für die Zerlegbarkeit der Zahlen eines Körpers in Primideale. 3. Über die Zerlegung der Ideale eines Zahlkörpers in Primideale. 4. Grundzüge einer Theorie des Galoisschen Zahlkörpers. 5. Über den Dirichletschen biquadratischen Zahlkörper. 6. Ein neuer Beweis des Kroneckerschen Fundamentalsatzes über Abelsche Zahlkörper. 7. Die Theorie der algebraischen Zahlkörper („Zahlbericht"). 8. Über die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper. 9. Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers. 10. Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper. 11. Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl $n$-ter Potenzen (Waringsches Problem). Zu Hilberts algebraisch-zahlentheoretischen Arbeiten. Von **Helmut Hasse.** Verzeichnis der Begriffsnamen.

In Vorbereitung:

II. Band: **Algebra, Invariantentheorie, Geometrie.** Etwa 500 Seiten.

III. Band: **Analysis.** Etwa 400 Seiten.

IV. Band: **Verschiedenes. Biographie.** Etwa 400 Seiten.

*Jeder Band ist einzeln käuflich.*

## Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen

**mathematischen und philosophischen Inhalts.** Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind. Herausgegeben von **Ernst Zermelo** nebst einem Lebenslauf Cantors von **Adolf Fraenkel.** Mit einem Bildnis. VII, 486 Seiten. 1932. RM 48.—

Die Abhandlungen sind in der vorliegenden Ausgabe nach ihren Stoffgebieten in vier Hauptabschnitte eingeteilt, je nachdem sie die Zahlentheorie und Algebra, die Funktionentheorie, die Mengenlehre oder die Geschichte der Mathematik und die Philosophie betreffen, und in den einzelnen Abteilungen nach der Zeit ihres Erscheinens geordnet. Der Abdruck erfolgte originalgetreu, unter sorgfältiger Verbesserung aller nachweisbaren Versehen und Druckfehler des Originals und unter Einführung der heutigen Orthographie; kürzere Zusätze des Herausgebers im Texte sind durch [eckige] Klammern kenntlich gemacht. Die „Anmerkungen" hinter den einzelnen Abhandlungen sind teils erläuternder, teils kritischer Natur und enthalten u. a. auch Hinweise auf die Bedeutung der betreffenden Arbeiten und auf die sich anschließende spätere Literatur. Doch sind diese Anmerkungen durchaus für den *mathematisch*, insbesondere mengentheoretisch interessierten Leser bestimmt; von einer spezifisch *philosophischen* Würdigung der einschlägigen Aufsätze wurde hier abgesehen.

Zur Ergänzung der Abhandlungen wurden als „Anhang" aus dem bisher unveröffentlichten Briefwechsel zwischen Cantor und Dedekind unter Ausscheidung alles rein Persönlichen einige längere und kürzere Stücke aufgenommen, die für den Leser des Cantorschen Lebenswerkes von besonderem Interesse sein werden. Diese Ausführungen beziehen sich größtenteils auf die „inkonsistenten" Gesamtheiten *aller* Ordnungszahlen und *aller* Alefs, und damit auf die später so sattsam diskutierten „Antinomien der Mengenlehre", die also, wie aus den Briefstellen deutlich hervorgeht, Cantor längst bekannt waren und von ihm bereits zutreffend aufgefaßt und gewertet wurden. In diesen Briefen findet sich aber auch Dedekinds bisher unbekannter Beweis des „Äquivalenzsatzes", der, mit Hilfe der „Ketten"-Theorie geführt, den Beweis des Herausgebers von 1908 antizipiert und bei dieser Gelegenheit zum ersten Male im Druck erscheint.

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN

## Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Unter dieser Rubrik werden wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften veröffentlichen, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen.

Sonderausgabe aus den Sitzungsberichten der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Phys.-math. Klasse

**J. E. Hofmann, H. Wieleitner** und **D. Mahnke, Die Differenzenrechnung bei Leibniz.** 1 Heft 8°. 41 S. Berlin 1931, Verlag der Akad. d. Wiss. In Kommission bei W. de Gruyter & Co.

**N. Wiener** und **E. Hopf, Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen.** Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften. 1931. 1 Heft 8°. 13 Seiten.

**W. Mayer, Beitrag zur Differentialgeometrie $l$-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, die in Euklidischen Räumen eingebettet sind.** Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften. 1931. 1 Heft. 8°. 12 S.

**G. Hoheisel, Kurvenfelder bei Differentialgleichungen erster Ordnung.** Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften. 1931. 1 Heft 8°. 9 S.

---

**Sierpiński, W., Wstęp do teorji funkcji zmiennej rzeczywistej.** 1 Heft 8°, 68 S. Lwów-Warszawa 1932, Książnica-Atlas.

---

**Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität.** Herausg. von E. Artin, W. Blaschke, E. Hecke. 9. Band, 1. Heft. 8°. 95 S. Leipzig 1932. B. G. Teubner.

---

**Studia Mathematica.** Tom III. 1 Bd. 8° brosch. 247 S. Lwów 1931.

---

**Bernard Bolzano's Schriften.** Herausgegeben von der Königlichen Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Bd. 2: Zahlentheorie. 1 Bd. 8°. brosch. 57 u. 7 S. Prag 1931.

---

**Lenz, F., Lebensraum und Lebensgemeinschaft.** Eine Einführung. (Math.-Naturw.-Techn. Bücherei. Band 27.) 1 Bd. 8°, geb. 183 S. Mit 36 Abbildungen im Text. Frankfurt a. M. und Berlin 1931, Otto Salle.

---

**Möller, G., Rechenbuch für höhere Schulen.** Nach den Lehrplänen der höheren Schulen Hamburgs bearbeitet. Teil I. Sexta. 1 Bd. 8°. brosch. 128 S. Frankfurt a. M. 1932, M. Diesterweg.

---

**Zacharias, M.,** und **Ebner, M., Arithmetik und Geometrie III (Prima).** Ausgabe B für Gymnasien. 1 Bd. 8°. geb. VIII, 254 S. Mit 143 Fig. im Text. Frankfurt a. M. 1932, M. Diesterweg.

---

**Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.** Band 51 (Jahrgang 1925) Heft 4, Band 54 (Jahrgang 1928) Heft 6 und Band $55_{\text{I}}$ (Jahrgang 1929) Heft 3. 3 Bde. 8° brosch. je 160 S. Berlin, Leipzig 1931 u. 1932, W. de Gruyter & Co.

**Hierzu zwei Beilagen vom Verlag Julius Springer in Berlin und Wien.**

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig
Printed in Germany